

特殊相対性理論

H E N L O U

2012年7月16日

HPの掲示板でのやり取りが契機となって特殊相対性理論のレポートをまとめてみる気になりました。振りかえってみると特殊相対性理論を最初からキチンと勉強した記憶がなく、必要なときに必要なところだけを齧って、いわばつまみ食い済ませていたようです。まあそれでも特に支障はなかったのですが、この際、最初からキチンと(?)勉強し直してみようということで、高橋康著「初等相対性理論 - ジュニアからシニアまで」をメインテキストに、ランダウ・ジューコフ「相対性理論入門」、M. ボルン「アインシュタインの相対性原理」、恒岡美和「明快相対性理論入門」、中野薫夫「物理入門コース・相対性理論」、砂川重信「理論電磁気学」等を参考にしながら勉強を進めました。

本レポートはこのような勉強結果をまとめたもので、これから特殊相対性理論でも勉強しようかという初心の方の少しでも参考になればという思いで公開することにしました。計算はくどいほど詳細にフォローしていますが、誤解に基づくおかしい議論や見当はずれなことを言っている箇所があるかもしれません。もし、そのような箇所を発見された方は、お手数でもご一報いただければありがたい。

それではゆっくりとご賞味ください。

目次

第1章	ニュートン力学とガリレイの相対性	4
1.1	ニュートン力学の3つの基本法則	4
1.2	慣性系と非慣性系	4
1.2.1	慣性系	4
1.2.2	非慣性系	5
	等加速度座標系	5
	回転座標系	6
1.3	ガリレイの相対性原理とガリレイ変換	8
1.3.1	ガリレイの相対性原理	8
1.3.2	ガリレイ変換	8
1.3.3	ガリレイ変換群	9
1.3.4	ガリレイ変換の幾何学的表示	9
1.3.5	波の伝播とガリレイ変換	11
	ドップラー効果	11
1.4	波動方程式とガリレイ変換	13
1.4.1	マイケルソン・モーレーの実験	14
1.4.2	波動方程式を不変にする変換	15
	ガリレイ変換との関係	17
第2章	特殊相対論における空間と時間	19
2.1	アインシュタインの考え	19
2.2	ローレンツ変換	19
2.2.1	ローレンツ変換群	22
2.3	同時性について	23
2.3.1	時刻合わせ	23
2.3.2	事件の空間的・時間的構造	24
2.3.3	走っている棒は短くなる	25
2.3.4	走っている時計はゆっくり進む	26
2.3.5	因果律について	26
2.4	光のドップラー効果	27
	横ドップラー効果	29
2.5	速度・加速度のローレンツ変換	30
2.5.1	速度のローレンツ変換	30
	フレネルの随伴係数	32
	相対速度	33
2.5.2	加速度のローレンツ変換	33
2.6	固有時	36
2.7	ローレンツ変換の幾何学的表示	38
	幾何学的表示上の注意点	38

	同時刻の相対性	39
	ローレンツ収縮	39
	走っている時計の遅れ	39
	速度の合成則	40
	相対速度	40
	ドップラー効果	41
第 3 章	相対論的力学	43
3.1	数学的準備	43
3.1.1	2次元時空	43
	スカラー, ベクトル	44
3.1.2	4次元時空 (ミンコフスキー空間)	47
	スカラー, ベクトル, テンソル	47
3.1.3	一般のローレンツ変換	52
	一般の速度合成則	53
3.2	相対論的力学	53
3.2.1	固有時	53
3.2.2	4元 - 速度・加速度・運動量	55
	4元速度ベクトル	55
	4元加速度	56
	4元運動量	56
3.2.3	相対論的運動方程式	58
	加速度と力の方向は一致しない	59
3.2.4	解析力学からのアプローチ	60
	自由粒子	60
	ポテンシャル力	62
第 4 章	相対論的電磁気学	63
4.1	マクスウェル方程式のローレンツ変換	63
4.1.1	電場と磁場のローレンツ変換	63
4.1.2	電荷密度, 電流密度のローレンツ変換と 4元電流密度	65
4.1.3	4元ベクトルポテンシャル	66
4.1.4	電磁場テンソル	67
4.1.5	マクスウェルの方程式を電磁場テンソルで書き換える	69
4.1.6	ゲージ変換	72
	ローレンツゲージとゲージ固定	72
4.2	相対論的荷電粒子の運動	73
4.2.1	ローレンツ力	73
4.2.2	荷電粒子のラグランジアン	75
4.3	電磁場のエネルギーと運動量	76
4.3.1	電磁場のエネルギー保存則	76
4.3.2	電磁場のエネルギー運動量テンソル	77

第1章 ニュートン力学とガリレイの相対性

1.1 ニュートン力学の3つの基本法則

- 第1法則：「すべての物体は、外部から力を加えられない限り、静止している物体は静止状態を続け、運動している物体は等速直線運動を続ける」

第1法則は慣性の法則ともいわれます。慣性の法則が成立するような座標系を慣性系といいます。慣性の法則が成立しない座標系を非慣性系といいます。非慣性系については後でもう少し詳しく議論します。

- 第2法則：「物体が力を受けると、その力の働く方向に加速度が生じる。加速度は力の大きさに比例し、慣性質量に反比例する。」

第2法則はニュートンの法則とか運動の法則ともいわれます。

- 第3法則：「2つの物体が互いに作用を及ぼすとき、一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しい。」

第3法則は作用・反作用の法則ともいわれます。

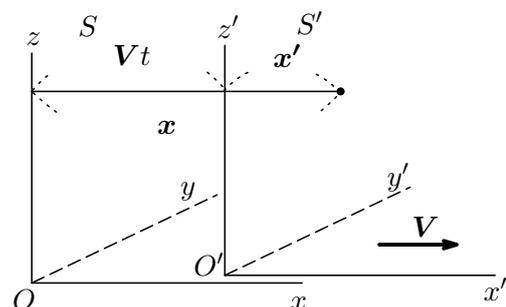
1.2 慣性系と非慣性系

1.2.1 慣性系

慣性系は運動の第1法則（慣性の法則）が成立する座標系であるといってしまうまでもありますが、これら法則にでてくる“速度”とか“加速度”という言葉は、あらかじめ決められた基準となるある座標系からみた場合にはじめて意味を持ちます。外力の影響が無視できる空間にある座標系を設定し、この座標系に関して物体は等速運動するとしたのが第1法則で、この座標系のことを慣性系と呼んでいます。

一方、自由落下しているエレベータに乗った人が手に持っていたリングから手を離すと、リングには地球の重力（外力）が働いているにもかかわらず、エレベータの人から見ればリングは宙に浮いたまま静止して見えます。この人にとっては第1法則は成り立ちません。エレベータに固定した座標系を非慣性系といいます。第1法則が成り立つのはある特別な座標系の一群に限られるということになります。

第1法則が成立する慣性系 S が1つ見つかり、それに対して一定の速さで動いている別の座標系を S' とします¹。 S 系において静止または等速運動している物体は S' 系から見ると、その速さは異なるにしろ、やはり同じ状態を続けています。従って、 S' もまた慣性系ということになります。このように慣性系は無数に存



¹ ただし、回転は除きます。回転系は加速度を含みます。

在します。

ところで、慣性系と第2法則の関係はどうなっているのか？ 第2法則は第1法則の特別な場合とはならず、慣性系を基準座標にとれば第2法則がでてくるといことになります²。このあたりのことを、以下に、数式を使って説明します。

慣性系 S におけるある物体の位置をベクトル x で示し、その座標系 S に対して速度 V で動いている座標系 S' におけるその物体の座標を x' とすると、 x' と x との間には次の関係式が成り立ちます。

$$x'(t) = x(t) - Vt \quad (1.2.1)$$

これを t で微分すると

$$\frac{dx'(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - V \quad (1.2.2)$$

が得られます。左辺は S' 系における物体の速度で、右辺第1項は S 系における同一物体の速度、 V は S' 系の S 系に対する速度。これから S 系における物体の速度が一定であれば、 S' 系での同一物体の速度は、大きさは異なるが一定で、第1法則が成り立ちます。

(1.2.2) をさらに t で微分して加速度の関係を求めると

$$\frac{d^2x'(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (1.2.3)$$

となり、 S 、 S' の両座標系において、それらの相対速度 V によらず、加速度は同じとなります。 S 系から見たニュートンの運動方程式を

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f \quad (1.2.4)$$

としましょう。 f は S 系から見た力です。 S' 系から見た場合の力を f' とし、力は速度に無関係で $f = f'$ とすると、(1.2.3) より

$$m \frac{d^2x'(t)}{dt^2} = f' \quad (1.2.5)$$

となり、 S' 系から見た物体の運動は (1.2.4) とまったく同じ形の法則が成立しています。つまり、基準にとる慣性系を S から S' に変えても第2法則は不変ということになります。いい替える、物体の加速度はどの慣性系に対しても不変ということですね。

1.2.2 非慣性系

等加速度座標系

慣性系のことをよく理解するために非慣性系における運動方程式を取り扱ってみましょう。慣性系 S に対して等加速度直線運動している座標系 S' を考えます。 S' は回転座標でないとしします。(1.2.2) の V が一定でないケースです。(1.2.2) を t で微分すると

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dV}{dt} \longrightarrow a' = a - A \quad (1.2.6)$$

と加速度の関係式が得られます。左辺は S' 系における物体の加速度、右辺第1項は S 系における同一物体の加速度、右辺第2項は S' 系の S に対する加速度です。この両辺に質量 m を掛けると $ma' = ma - mA$ で、これから非慣性系 S' 系における物体の運動方程式として

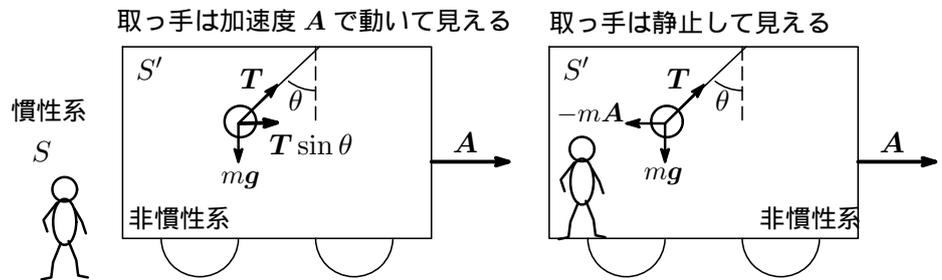
$$ma' = f - mA \quad (1.2.7)$$

² 第3法則の重要性については後に触れることにします。

が得られます。慣性系の間では物体の加速度は不変、つまり、物体に働く外力は等しく $f' = f$ でしたが、非慣性系の間ではこの等式が成立せず、 S' 系においては真の力 f に $-mA$ の見かけの力が加わることとなります。この力を慣性力といいます。

くどいようですが、慣性力をもう少し理解するために、慣性系 S で物体は静止していたとします。 S 系では力が物体に働かないので $f = 0$ 。これを (1.2.7) に入れると $ma' = -mA$ となり、 S に対して加速度 A で動いている非慣性系 S' においては、物体は $f' = -mA$ の力を受けると言い表すことができます。真の力はもともと物体に働いていないのですが、非慣性系に移ったときには f' という力が働いているように見える。この見かけの力を「慣性力」と呼んでいるわけです³。

水平方向 (x 方向) に加速度 A で加速する、電車の取っ手に働く力を考えてみましょう。取っ手は鉛直方向に対して角度 θ 傾い



ています。地上⁴に止まっている観測者 S からすれば、取っ手は加速度 A で動いており、取っ手に働く外力は吊り革の張力 T の x 成分なので、運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mA = T \sin \theta \quad (1.2.8)$$

一方、電車に乗っている観測者からすれば、取っ手は静止して見えます。つまり、取っ手は加速度運動していないので、外力は 0 でなければなりません。したがって運動方程式は

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0 = T \sin \theta - mA \quad (1.2.9)$$

となります。右辺第 2 項にでてきた力 $-mA$ は見かけの力、つまり慣性力ですね。

回転座標系

次に、慣性系 S に対して原点が共通で、 z 角軸の周りに角速度 ω で反時計方向に回転している座標系を考えます。 $t = 0$ で S, S' の座標軸が一致していたとします。運動している質点 P の時刻 t における S, S' 系での位置ベクトルをそれぞれ x, x' とすると、

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{cases} \quad (1.2.10)$$

いま、慣性系 S で質点 P に力 f が働くとすると、質点 P の S 系における運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_x \\ m\ddot{y} = f_y \end{cases} \quad (1.2.11)$$

で表わされます⁵。また、(1.2.10) より

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - x'\omega^2) \cos \omega t - (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - y'\omega^2) \sin \omega t \\ \ddot{y} = (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - x'\omega^2) \sin \omega t + (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - y'\omega^2) \cos \omega t \end{cases} \quad (1.2.12)$$

³ 慣性系には真の力のみ存在し、見かけの力は存在しない。

⁴ 地上に固定した座標系を慣性系としておく。

⁵ 質点は静止していないことに注意！外力 f が働いて加速度運動している質点を慣性系 S から見た場合と回転座標系 (非慣性系) S' から見た場合の議論を行っている。

が得られ, (1.2.11), (1.2.12) より

$$\begin{cases} f_x = A \cos \omega t - B \sin \omega t \\ f_y = A \sin \omega t + B \cos \omega t \end{cases} \quad \text{ただし, } \begin{cases} A = m(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - x'\omega^2) \\ B = m(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - y'\omega^2) \end{cases} \quad (1.2.13)$$

これから

$$\begin{aligned} A &= f_x \cos \omega t + f_y \sin \omega t \\ B &= -f_x \sin \omega t + f_y \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

が得られます。また, 力 f の x', y' 成分は

$$\begin{cases} f'_x = f_x \cos \omega t + f_y \sin \omega t \\ f'_y = -f_x \sin \omega t + f_y \cos \omega t \end{cases} \quad (1.2.15)$$

となるので, (1.2.14), (1.2.15) より, 非慣性系 S' における質点 P の運動方程式として

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = f'_x + m\omega^2 x' + 2m\omega\dot{y}' \\ m\ddot{y}' = f'_y + m\omega^2 y' - 2m\omega\dot{x}' \end{cases} \quad (1.2.16)$$

を得ます。

質点 P の S 系における運動方程式 (1.2.11) と S' 系における運動方程式 (1.2.16) を比較すると, S' 系では実際に質点に働いている外力 f'_x, f'_y に加え, 慣性力として遠心力 ($m\omega^2 x', m\omega^2 y'$) と ($2m\omega\dot{y}', -2m\omega\dot{x}'$) の力が働いていることがわかります。2つ目の見かけの力をコリオリ力と呼んでいます。遠心力やコリオリ力はどの方向に働いているのかを調べるために, 大きさ ω , z 軸の正の向きをもつ回転ベクトル ω を

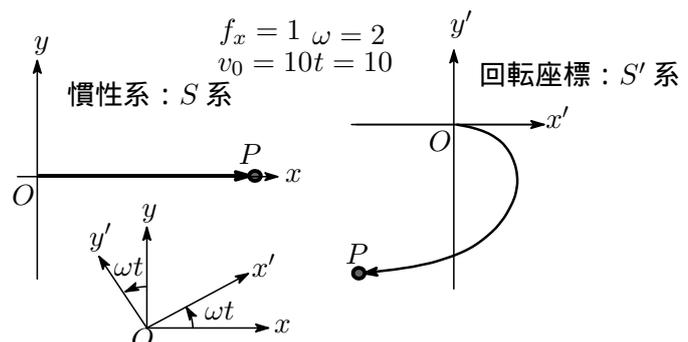
$$\omega = (0, 0, \omega) \quad (1.2.17)$$

で定義します。 $x' = (x', y'), v' = (\dot{x}', \dot{y}')$, 遠心力を f'_c , コリオリ力を f'_o とすると

$$\begin{aligned} f'_c &= m\omega^2 x' \\ f'_o &= 2m v' \times \omega \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

と表わせます⁶。これから, 遠心力は回転中心から外に向かって働く力で, コリオリ力は質点の速度ベクトル v' に垂直で, 質点の進行方向に向かって右向きに働く力であることが分かります。

簡単な例として慣性系 S で $m=1$ の質点 P が x 軸方向に $f=1$ の外力を受けて運動しているケースを取り上げます。質点 P の動きを非慣性系の回転座標 S' で見ると, その軌跡はどうみえるでしょうか。この軌跡は (1.2.16) の微分方程式を解いて求められます。解くべき微分方



⁶ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

方程式は (1.2.16) で $f_x = 0, f_y = 0$ とおいて

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = \cos \omega t + \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \\ m\ddot{y}' = -\sin \omega t + \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' \end{cases}$$

Mathematica を使って $\omega = 2, v_0 = 10$ として $t = 10$ までの質点 P の軌跡を描くと上図のようになります。 S' 系では遠心力とコリオリの力が働いて質点 P はあるカーブを描いて動いていく様子が分かります。

1.3 ガリレイの相対性原理とガリレイ変換

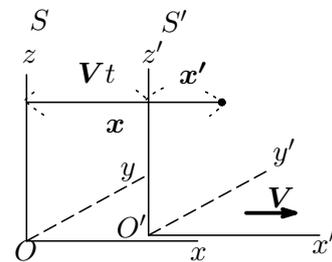
1.3.1 ガリレイの相対性原理

上で見てきたように、外力が物体の速度に無関係ならば、どの慣性系を採用してもニュートン力学の法則はまったく同じ形に書き表せるということが分かりました。これをガリレイの相対性原理といいます⁷。

1.3.2 ガリレイ変換

x から x' への変換 (1.2.1) をガリレイ変換⁸といいます。この変換をよく見ると、物体の S, S' 系における位置ベクトルはそれぞれ x, x' で区別されていますが、時間 t にはそのような区別がなされていません。これは、 S 系にいる観測者も S' 系にいる観測者も同じ時刻を持っているということが暗黙の了解事項となっているからです（普通そのように考えますね）。つまり、それぞれの座標系での時刻を t, t' とすると

$$t = t' \tag{1.3.1}$$



が仮定されています。そこで、改めてガリレイ変換を書くと

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \tag{1.3.2}$$

となります。ガリレイの相対性原理はガリレイ変換によって変換するあらゆる慣性系においてニュートンの法則が不変であると表現できます⁹。

さて、 S 系において速度 v で走っている物体をその座標系に対して V で動いている座標系からながめると、速度は (1.2.2) より

$$v' = v - V \tag{1.3.3}$$

と速度の合成則が成立します。ところで、速度の合成則を利用すれば、ニュートン力学では物質の速度をいくらでも早くすることができ、光速以上の実現できることとなります。一方、アインシュタインの相対性理論によれば、光速より早いものはありえないので、この点においてガリレイ変換は修正を迫られ、また、ガリレイ変換に対して不変にできているニュートンの法則も変更せざるを得なくなります。

⁷ 物体の座標と速度は慣性系によって異なるが、物体の加速度はすべての慣性系に対して不変といことからきています。

⁸ 1つの慣性系から他の慣性系に移す変換。

⁹ 「ニュートン力学はガリレイ変換に関して共変な理論である」ともいわれる。

あとでローレンツ変換の式と比較するときのために，ガリレイ変換の式 (1.3.3) を次のように書き換えておきます。 $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V_1 & 1 & 0 & 0 \\ -V_2 & 0 & 1 & 0 \\ -V_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow x'_\mu = \sum_{\nu=0}^4 G_{\mu\nu} x_\nu \quad (1.3.4)$$

ここで， $G_{\mu\nu}$ は 2 つの慣性系の相対速度 V だけで決まります。

1.3.3 ガリレイ変換群

ガリレイ変換全体は群をなすことを以下に示しておきます。群の定義は

1. G の任意の要素 AB に対して積 C が定義され，積 C も G の要素となる。これを $C = AB$ と書く。
2. G の任意の要素 A に対して， $AE = EA = A$ が成り立つような要素 E が G の中に存在する。 E を単位元と呼ぶ。
3. G の任意の要素 A に対して， $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ となるような逆元 A^{-1} が G に存在する。
4. 3乗積 ABC が一意的に決まる。すなわち $A(BC) = (AB)C = ABC$ 。結合則。

さて，(1.3.2) のガリレイ変換を $G(\mathbf{V})$ と書くと

$$\begin{aligned} G(\mathbf{V}) : x' &= x - \mathbf{V}t, & t' &= t \\ G(\mathbf{V}') : x'' &= x' - \mathbf{V}'t', & t'' &= t' \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

ここで， $x \rightarrow x' \rightarrow x'', t \rightarrow t' \rightarrow t''$ と連続した変換は $G(\mathbf{V}')G(\mathbf{V})$ という積で表わされます。これを具体的に計算すると

$$x'' = (x - \mathbf{V}t) - \mathbf{V}'t' = x - (\mathbf{V}' + \mathbf{V})t, \quad t'' = t \quad (1.3.6)$$

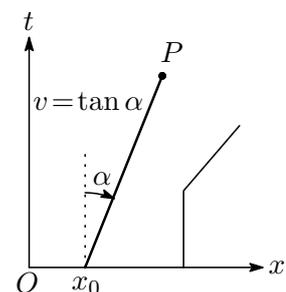
となり，右辺は $G(\mathbf{V}' + \mathbf{V})$ なので

$$G(\mathbf{V}')G(\mathbf{V}) = G(\mathbf{V}' + \mathbf{V}) \quad (1.3.7)$$

となって，1 番目の定義を満足します。結合則の成立は明らかですね¹⁰。単位元¹¹は $G(\mathbf{0})$ で， $G(\mathbf{V})$ の逆元は $G(-\mathbf{V})$ です¹²。

1.3.4 ガリレイ変換の幾何学的表示

縦軸に t ，横軸に x をとった時空間を考えます。 x 軸上を一定の速度 v で走る質点の経路をこの時空間に描くと， $x = vt + x_0$ の関係から右図のような直線となります。時空間に描かれた質点の経路を世界線と呼んでいます。世界線は直線とは限らず，例えば等加速度運動をする質点の世界線は放物線となるし¹³，静止していた物体がある瞬間にある速度で運動し続けるときには，世界



¹⁰ $G(\mathbf{V})(G(\mathbf{V}')G(\mathbf{V}'')) = G(\mathbf{V})G(\mathbf{V}' + \mathbf{V}'') = G(\mathbf{V} + \mathbf{V}' + \mathbf{V}'')$, etc

¹¹ 何もしない。

¹² $G(\mathbf{V})G(-\mathbf{V}) = G(-\mathbf{V})G(\mathbf{V}) = G(\mathbf{0})$

¹³ 自由落下する質点は $x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$

線の一部は垂直で、ある点で折れた直線となります。

さて、ガリレイ変換によって時空間がどのように描かれるか、またその幾何学を使って速度の合成則を導きます。ガリレイ変換は次式で表わされました。

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt \\t' &= t\end{aligned}\tag{1.3.8}$$

変換後の時空間の図は、原点では $(x', t) = (0, 0)$ となるので両座標系の原点は一致します。 x' 軸は $t' = 0$ なので、(1.3.8) より $x' = x$ で x 軸と一致します。

同様に、 t' 軸は $x' = 0$ なので、これは $t = (1/V)x$ の関係を満たし、 (t, x) 座標系で傾き $1/V$ の直線が t' 軸となります。したがって、 t 軸と t' 軸のなす角を ϕ とすると、

$$V = \tan \phi\tag{1.3.9}$$

の関係となり、相対速度が大きければ t' 軸は大きく傾きます ($V \rightarrow \infty : \phi \rightarrow \pi/2$)。図より

$$\tan \phi = (x_p - x'_p)/t_p, \quad \therefore x'_p = x_p - t_p \tan \phi = x_p - Vt_p\tag{1.3.10}$$

となって、第1式の変換則がでてきます。

次に、 $t_p = t'_p \cos \phi$ より

$$t'_p = \frac{t_p}{\cos \phi} = t_p \sqrt{1 + \tan^2 \phi} = \sqrt{1 + V^2} t_p\tag{1.3.11}$$

これは、(1.3.8) の第2式と較べると $\sqrt{1 + V^2}$ だけ余計な係数が掛かっています。幸いにもこの係数は t や x に依存しないので、 t'_p 軸の目盛りを $\sqrt{1 + V^2}$ だけスケール変換してやっても何の影響もありませんね。そうすると

$$\cos \phi = \frac{OA}{OB} = \frac{t_p}{t'_p \sqrt{1 + V^2}} = \frac{t_p}{t'_p} \cos \phi, \quad \therefore t'_p = t_p\tag{1.3.12}$$

となって、めでたく第2式の変換則がでてきました。

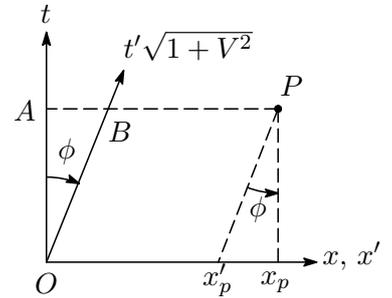
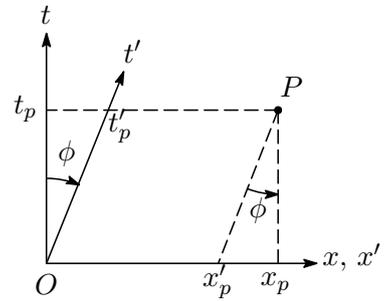
注：図を使って定量的な議論する場合には、 t' 軸は t 軸の時間単位と同じものを使わなければなりません。 t' 軸の単位時間として t 軸の単位時間の $\sqrt{1 + V^2}$ 倍となります。

それでは、図を使って速度の合成則を導いてみましょう。質点 P は S 系で速度 v で運動しているとすると、その世界線は図(1)の OP で表わされます。 S 系に対して速度 V で走っている座標系 S' からこの質点 P の運動を眺めると、図(2)のようになります。そうすると

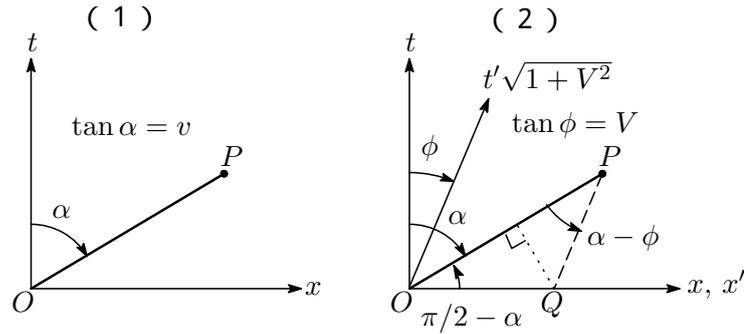
$$\begin{aligned}PQ \sin(\alpha - \phi) &= OQ \sin(\pi/2 - \alpha) \\&= OQ \cos \alpha \\ \therefore \frac{OQ}{PQ} &= \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos \alpha} \\&= \tan \alpha \cos \phi - \sin \phi = \cos \phi (\tan \alpha - \tan \phi) = \frac{v - V}{\sqrt{1 + V^2}}\end{aligned}$$

一方、 $OQ = x'_p$ 、 $PQ = \sqrt{1 + V^2} t'_p$ なので、

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}} \frac{x'_p}{t'_p} = \frac{v'}{\sqrt{1 + V^2}}, \quad \therefore v' = v - V$$



となって、速度の合成則が導かれました。



1.3.5 波の伝播とガリレイ変換

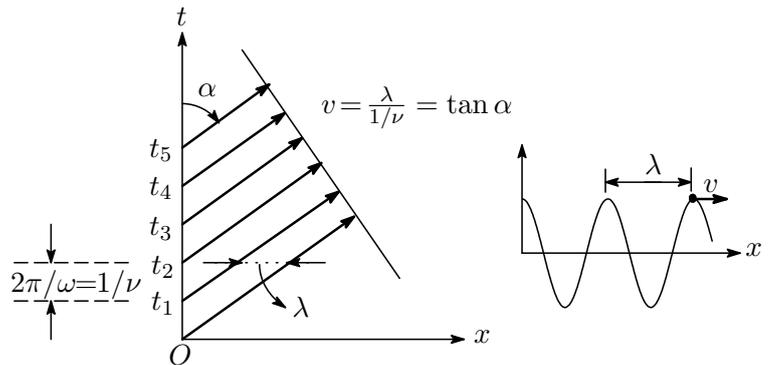
ドップラー効果

空間の中を進んでいく波を時空間の中に描くことを考えます。ここでは簡単化のために1次元空間を伝わる波を考えます。波の1つの山が一定速度 v (位相速度) で x 軸方向に走っている波は次式で表わされます。

$$\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t), \quad (k = 2\pi/\lambda, \omega = 2\pi\nu, T = 2\pi/\omega) \quad (1.3.13)$$

ここで k : 波数, ω : 角振動数, ν : 振動数, T : 周期で、波の山の速度は波長 λ と振動数の積 $v = \lambda\nu$ で表されます。

$t = 0$ に $x = 0$ を出発した先頭の波は x 軸方向にどんどん進み、 $t_1 = 2\pi/\omega$ 後には次の波の山が原点を通過します。この状況を時空間に描くと右図のようになります。



さて、波源が $x = 0$ に静止しており、観測者が x 軸の方向に速さ V で遠ざかっていく場合を考えます。但し、 $V < v$ とします。時空間におけるガリレイ変換の図を下に示します。

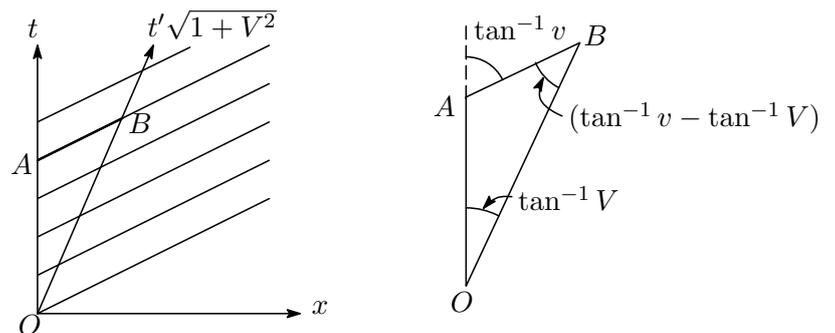
O から A までの時間に n 個の波の山が放出されたとする

$$OA = n \times \frac{1}{\nu} = \frac{n}{\nu} \quad (1.3.14)$$

同じ数の波の山を観測者が受けとるまでには時間 OB だけかかります。

観測者が観測する波の振動数を ν' とすると、 t' 軸のスケール変換を考慮して

$$OB = \frac{n}{\nu'} \sqrt{1 + V^2} \quad (1.3.15)$$



となります。正弦定理を使うと

$$\begin{aligned}
 \frac{OB}{\sin \angle OAB} &= \frac{OA}{\sin \angle OBA} \\
 \therefore \frac{OA}{OB} &= \frac{\sin \angle OBA}{\sin \angle OAB} \\
 &= \frac{\sin(\tan^{-1} v) \cos(\tan^{-1} V) - \cos(\tan^{-1} v) \sin(\tan^{-1} V)}{\sin(\tan^{-1} v)} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} \\
 &= \frac{v - V}{v} \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}}
 \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

ただし,

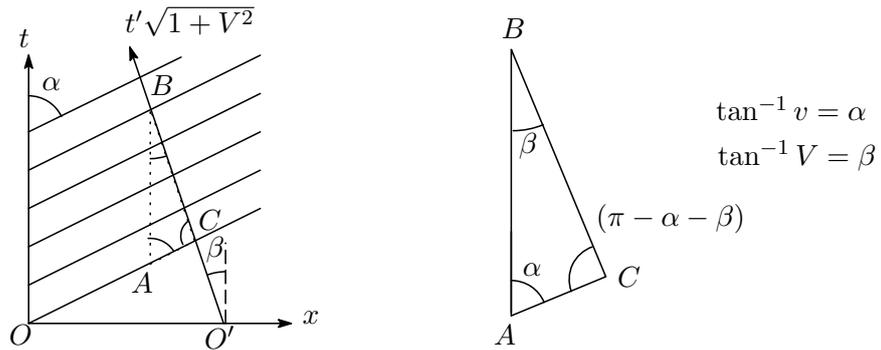
$$\begin{cases} \tan^{-1} v = \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}, & \sin \alpha = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}} \\ \tan^{-1} V = \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}}, & \sin \beta = \frac{V}{\sqrt{1 + V^2}} \end{cases}$$

ところで(1.3.16)の右辺は(1.3.14), (1.3.15)より $OA/OB = \frac{v'}{v} \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}}$ となるので, (1.3.16)は

$$\frac{v'}{v} = \frac{v - V}{v} = 1 - \frac{V}{v} < 1 \tag{1.3.17}$$

となり, 波の源から遠ざかる観測者に対しては, 波の振動数は小さくなります。

次に, 波の源に観測者が V の速さで近づく場合を考えます。この場合には t' 軸の傾きが $-1/V$ となります。



観測者の観測する波の振動数を ν' とすると

$$BC = \frac{n}{\nu'} \sqrt{1 + V^2} \tag{1.3.18}$$

正弦定理を使って

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{v + V}{v} \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}} \tag{1.3.19}$$

一方, $AB = n/\nu$ なので $AB/BC = (n/\nu')\sqrt{1 + V^2}$ 。したがって, (1.3.19)より

$$\frac{v'}{v} = \frac{v + V}{v} = 1 + \frac{V}{v} > 1 \tag{1.3.20}$$

波の源に近づく観測者に対しては, 波の振動数は大きくなります。

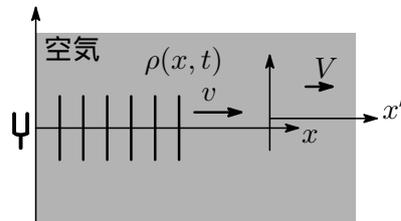
1.4 波動方程式とガリレイ変換

空気中を速度 v で伝わる密度波（音波）の方程式は、 $\rho(x, t)$ を空気の密度とすると次式で与えられます。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \rho(x, t) = 0 \quad (1.4.1)$$

波動方程式の中にある v は、音が伝わる媒質としての 空気が静止している座標系 に対する音波の速度 v です。

この方程式を空気に対して速さ V ($\neq v$) で x 軸方向に遠ざかっている座標系 S' で記述するとどうなるか？ それは (1.4.1) をガリレイ変換をすればよいわけで、簡単のために 1 次元の場合を取り上げます。 $x' = x - Vt$, $t' = t$ として



$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \end{cases} \quad (1.4.2)$$

を 1 次元波動方程式に入れて整理すると¹⁴

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2V}{v^2 - V^2} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{v^2 - V^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \rho(x', t') = 0 \quad (1.4.3)$$

が得られます。この式は (1.4.1) と異なり、波動方程式はガリレイ変換に対して不変でないことがわかります。つまり、空気に対して静止している観測者に対して波動方程式が成り立っていても、空気に対して V の速度で動いている観測者に対しては同じ方程式が成り立たないということです。

さて、光（電磁波）の場合を考えます。光の波動方程式は次のマクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (1.4.4)$$

から導かれ、電場を \mathbf{E} 、磁場を \mathbf{B} とすると、電磁波の波動方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

で与えられます。音波は空気という媒質の振動（粗密振動）が伝播していくものですが、光（電磁波）を伝える媒質は何でしょうか？ とりあえずここでは、それをエーテルとし、宇宙に充満しているエーテルの揺れ動きが電場や磁場の振動として伝わっていくとしておきます¹⁵。波動方程式にでてくる光速 c は静止しているエーテルに対する速度ということになります。

ニュートン力学はすべての慣性系で成立しましたが、光の理論（マクスウェルの理論）はガリレイ変換に対して不変でないため、エーテルに対して静止している座標系でのみ成立する理論

¹⁴ このセクションの詳しい話は「相対論」のコーナーの「波動方程式とガリレイ変換」のレポートを参照されたし。

¹⁵ このあたりの歴史的なお話はよくご存知のことと思います。

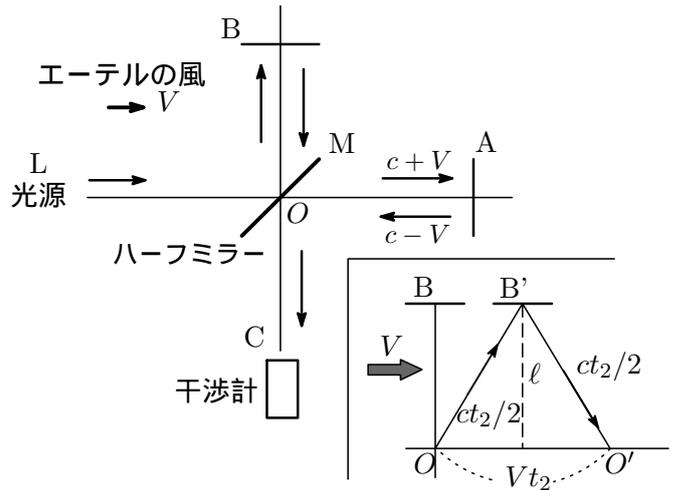
ということになります。エーテルに対して速度 V で動いている座標系では波動方程式 (1.4.3) で $v = c$ としたものを解くことにはなりますが、問題は V の値ですね。これをどのようにして測るか。。

音速の場合、風が x 軸方向に V の速度で吹いていれば、地上に静止している観測者には見かけ上 $v+V$ の音速が観測されるし、逆に $-x$ 軸方向に風が吹いていれば $v-V$ と観測されます¹⁶。光の場合、空気の風に相当するのはエーテル風で、 x 軸方向に吹くエーテルの風向きによって光速は見かけ上 $c+V$ あるいは $c-V$ と観測されるはずですが、地球は自転や公転¹⁷ をしているの宇宙に静止しているエーテルに対して動いており、地上の観測者からすれば速度 V のエーテルの風が吹いていることになります。

1.4.1 マイケルソン・モーレーの実験

マイケルソン・モーレーは 1887 年の有名な実験でエーテルの速度 V の測定を試みました。

エーテルの風が図に示した方向に速度 V で吹いているとします。光源 L から出た光は、 O にあるハーフミラー M でその一部は反射されて OB の方向に向かい、鏡 B で反射されて再び M に戻り、 M を透過して干渉計 C に入ります。また、 L からきた光の残りは M を透過して OA の方向へ向かい、鏡 A で反射されて再び M に戻り、その一部は反射されて干渉計 C に入ります。OA, OB の距離をそれぞれ l とすると、光が光路 OA を往復する時間を t_1 とすれば、往路の光の速度は $c+V$ 、帰路は $c-V$ となるので



$$t_1 = \frac{l}{c+V} + \frac{l}{c-V} = \frac{2l/c}{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{V}{c} \quad (1.4.6)$$

一方、光路 OB を通る光はエーテルの風の影響を受けて OB' 方向へ流されるので、 $OB'O'$ という光路をたどることになり、その所要時間を t_2 とすると、ピタゴラスの定理より

$$\left(\frac{1}{2}ct_2\right)^2 = l^2 + \left(\frac{1}{2}Vt_2\right)^2, \quad \therefore t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.4.7)$$

光が光源 L からでて干渉計に入るまでの 2 つの光の光路差 Δ は $\beta \ll 1$ として¹⁸

$$\Delta = c(t_2 - t_1) = 2l \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{1-\beta^2} \right) \approx -l\beta^2 \quad (1.4.8)$$

これは非常に小さい量ですが観測精度範囲内で、高精度な干渉計には干渉縞が観測されるはずですが、しかし、何度も精密な実験を行っても干渉縞は観測されずに終わりました。

この実験結果を説明するために、ローレンツとフィッツジェラルドはそれぞれ独立して次のような仮説（収縮仮説）を立てました。

「エーテルに対して速度 V をもつすべての物体は、その運動方向に沿って長さが $\sqrt{1-\beta^2}$ の割合で収縮する」

¹⁶ 媒質の空気がそれぞれ $V, -V$ で動いているとする。

¹⁷ 地球の自転速度は赤道付近で約 0.5km/s。公転速度は約 30km/s と猛烈な速さ。

¹⁸ $c \sim 3 \times 10^{10}$ cm/sec, V として地球の公転速度をとると $V \sim 3 \times 10^6$ cm/sec で圧倒的に光速の方が早い。

この仮説に従えば，光路 OA の長さは $\ell/\sqrt{1-\beta^2}$ と縮まり， $t_1 = 2(\ell/c)/\sqrt{1-\beta^2}$ となって， $t_1 = t_2$ となり，その差を観測できないというマイケルソン・モーレーの実験結果を説明できます¹⁹。この問題の真の解決はご存知のようにアインシュタインの特殊相対性理論によってなされましたが，その話は後のお楽しみ。

M.E.M.O - 1: マクスウェル方程式のガリレイ変換

マクスウェルの方程式 (1.4.4) はエーテルに対して静止している座標系 (S 系) で成立しました。いま，エーテルが速度 V で任意の方向に吹いているとします。エーテルに固定した座標系 (S' 系) でマクスウェルの方程式が成立しているとします。そうすると S 系ではどのような方程式が成立するのでしょうか？ 結果は， S 系では次の方程式が成立します。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} - \frac{1}{c^2} \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t'} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho\end{aligned}\tag{1.4.9}$$

この式をヘルツの式と呼んでいます。

1.4.2 波動方程式を不変にする変換

さて，波動方程式を不変にするような変換はあるのでしょうか。ここではその問題を考えます。簡単のために 1 次元の波動方程式を考えます²⁰

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0 \longleftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \phi(u, w) = 0\tag{1.4.10}$$

(x, t) と新たな変数 (u, w) の間に $u = Ax$ なる線形関係を仮定します²¹。

$$\begin{cases} u = Ax + Bt \\ w = Cx + Dt \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\tag{1.4.11}$$

また，逆変換 $x = A^{-1}u$, ($A^{-1} \neq 0$) も存在すると仮定すると

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0 \\ \therefore \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.4.12}$$

となります。ここで微分演算子の関係を求めておくと， $x = x(u, w)$, $t = t(u, w)$ なので

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} = A \frac{\partial}{\partial u} + C \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w} = B \frac{\partial}{\partial u} + D \frac{\partial}{\partial w} \end{cases}\tag{1.4.13}$$

¹⁹ 地上にあるすべての物差しも同じ仕方で収縮するので，“光路 OA の収縮”を観測しようとしても，地上では決して確認することができない。

²⁰ 3 次元への拡張は自動的にできます。

²¹ このあたりの話は「ガリレイ変換と波動方程式」も参照ください。

したがって, (1.4.10) の左の項は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) \\ &= \left(A^2 - \frac{B^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - (D^2 - c^2 C^2) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \left(AC - \frac{BD}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

となります。そこで,

$$\begin{cases} A^2 - B^2/c^2 = 1 \\ D^2 - c^2 C^2 = 1 \\ AC - BD/c^2 = 0 \end{cases} \quad (1.4.15)$$

となるように A, B, C, D を決めてやることができれば, (1.4.14) は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \quad (1.4.16)$$

となり, 新たな変数 (u, w) で記述した波動方程式は元の形と同じになります。問題は, そのような A, B, C, D が見つかるかということですが, (1.4.15) は 4 個の未知数に方程式が 3 個なので未知数の 1 個は決まりません。解は 1 個の未知数をパラメータとして表わされるはずで, A をパラメータとして B, C, D を形式的に解き, その 1 つの解として

$$B = -c\sqrt{A^2 - 1}, \quad C = -\frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}, \quad D = A \quad (1.4.17)$$

を得ます。 χ を実数として, $A = \cosh \chi$ とおくと²²

$$B = -c \sinh \chi, \quad C = -\frac{1}{c} \sinh \chi, \quad D = \cosh \chi \quad (1.4.18)$$

となり, B, C, D が得られます。したがって, 求める変換式は, (1.4.11) より

$$\begin{cases} u = x \cosh \chi - ct \sinh \chi \\ w = t \cosh \chi - \frac{x}{c} \sinh \chi \end{cases} \quad (\chi: \text{実数}) \quad (1.4.19)$$

となります。双曲線関数と三角関数との間に成り立つ関係式²³

$$\begin{aligned} \cosh \chi &= \cos(i\chi) = \frac{e^\chi + e^{-\chi}}{2} \\ \sinh \chi &= -i \sin(i\chi) \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

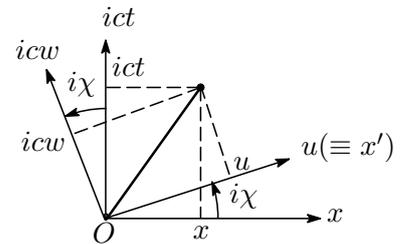
を使うと (1.4.19) は

$$\begin{cases} u = x \cos(i\chi) + ict \sin(i\chi) \\ icw = -x \sin(i\chi) + ict \cos(i\chi) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ icw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} \quad (1.4.21)$$

と表せます。ただし, $\theta = i\chi$ 。

これは縦軸に ict 軸をとり, 横軸に x 軸をとった座標系での虚数角 $i\chi$ の回転で, 形式的には 2 次元平面の座標回転を表わします。(1.4.21) より

$$\begin{aligned} u + (icw)^2 &= (x \cos \theta + ict \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + ict \cos \theta)^2 \\ &= x^2 + (ict)^2 \end{aligned} \quad (1.4.22)$$



²² $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

²³ $\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2, \sinh \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2, \cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2, \sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$

で、 $x^2 + (ict)^2$ はこの変換の不変量。以上、要約すると「波動方程式を不変にする変換とは、 x 軸と ict 軸によって張られる空間での虚数角 $i\chi$ の回転で、原点からの距離の 2 乗に相当する $x^2 + (ict)^2$ はこの変換の不変量」というです。

3次元波動方程式の場合も全く同様で、波動方程式を不変にする変換は、 x, y, z, ict で張られる 4次元空間において、 x 軸と ict 軸のなす平面内における角 $i\chi$ だけの回転ということになります。

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + x_0 \sin \theta \\ y' = y \\ z' = z' \\ ict' = -x \sin \theta + ict \cos \theta \end{cases} \quad (1.4.23)$$

行列形式で書くと、

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \theta = i\chi \quad (1.4.24)$$

変換の不変量は

$$(ict')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ict)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.4.25)$$

となります。

ガリレイ変換との関係

波動方程式を不変にする変換は、虚数角 $i\chi$ の回転であることが判りました。その物理的意味はよく分からないものの、回転角が小さい場合を考えると

$$\begin{aligned} \cosh \chi &\simeq 1 \\ \sinh \chi &\simeq \chi \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

と近似できるので、(1.4.19) は

$$\begin{cases} u = x - ct\chi \\ w = t - \frac{x}{c}\chi \end{cases} \quad (1.4.27)$$

となります。そこで $\chi = V/c$ とおくと、(1.4.28) は

$$\begin{cases} u = x - Vt \\ w = t - \frac{xV}{c^2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \quad (1.4.28)$$

となるので、 u を x' 、 w を t' とみなし、 $c \rightarrow \infty$ とおけば、(1.4.28) の矢印で示す式に見るようにガリレイ変換になります。ということで、波動方程式を不変にする 4次元の回転とニュートン力学を不変にするガリレイ変換とはまったく別物ではなく、光速度に比較して非常に遅い運動を問題にするかぎり、 u を x' 、 w を t' とみなせば、両変換は一致することになります。

次章に進む前に、いままでの話をざっと整理しておく次のようになるでしょう。

1. ニュートン力学はガリレイ変換 $x(t)' = x(t) - Vt$ 、 $t' = t$ に対して不変である。
2. ガリレイ変換から帰結される速度の合成則は $v' = v - V$ で、速度の上限というものは規定されない。速度が無限大ということもあり得ることになる。

3. 波動方程式はガリレイ変換に対して不変でない。電磁波の媒質としてエーテルを仮定する。マクスウェル理論による電磁波の波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.4.29)$$

は静止しているエーテルに固定した座標系に対して成立するが、エーテルに対して速度 V で動いている座標系では (1.4.29) は成り立たず、1次元の場合を表記すれば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2V}{c^2 - V^2} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2 - V^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \phi(x', t') = 0 \quad (1.4.30)$$

となる。 c はエーテルに対する速度。

4. 地上は自転、公転に伴い見かけ上エーテルの風が吹いており、エーテルの速度 V を知る必要がある。これは光の速度を観測することによって求めることが可能はずである。
5. しかし、マイケルソン・モーレーの精密な実験からは光の速度に及ぼすエーテルの影響は観測されなかった。この実験結果を説明するために、ローレンツらは「エーテルに対して速度 V をもつすべての物体は、その運動方向に沿って長さが $\sqrt{1 - \beta^2}$ の割合で収縮する」という収縮仮説を提案。
6. 光の波動方程式 (1.4.29) を不変にする変換が見つかった。この変換は「 x 軸と ict 軸によって張られる空間での虚数角 $i\chi$ の回転」である。この変換ではニュートンの運動方程式は不変とならないが、光速に対して非常に小さい速度を問題にする場合には、ガリレイ変換と完全に一致する。
7. 力学現象と電磁現象を統一的に記述できる理論体系はないのだろうか？

第2章 特殊相対論における空間と時間

2.1 アインシュタインの考え

アインシュタインは、1905年の「運動物体の電気力学」という論文の中で

1. 力学の方程式が成り立つすべての慣性座標系に対しては、同一の電気力学と光学の法則が成り立つ。(アインシュタインの相対性原理)
2. すべての慣性系において、光の真空中における速度は、光を放出する物体の運動状態によらず、すべて相等しい値をもつ。(光速不変の原理)

という2つの仮定をおけば、エーテルの導入という余計なことを考えなくても、力学現象、電磁現象を記述できる統一的な理論が構築できることを示しました。これを特殊相対性理論と呼んでいます¹。ガリレイ変換では時刻 t はどの慣性座標系でも同じという絶対時間を仮定していましたが、特殊相対性理論では、時間 t は各座標系ごとに異なった値をとるというように、時間・空間の概念を根底から再構築しています。

2.2 ローレンツ変換

マクスウェルの理論がそのまま成り立つ慣性座標系を S とし、もう1つの慣性座標系を S' とします。ガリレイ変換では $S(x, t)$ から $S'(x', t')$ (あるいはその逆) への変換は線形変換で表わされました。そこで、ガリレイ変換を一般化した線形変換を考えます²。簡単化のために、座標系 S' は座標系 S の x 方向に向いて速度 V で動いていると仮定し、その間に次の線形関係が成り立つとします³。

$$\begin{aligned}x' &= A(V)x + B(V)x_0 \\y' &= K(V)y \\z' &= K(V)z \\x'_0 &= C(V)x + D(V)x_0\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

ただし、

$$x_0 = ct, \quad x'_0 = ct'\tag{2.2.2}$$

です。 S 系は S' 系から見れば $-V$ の速度で遠ざかっています。 S, S' の2つの座標系はまったく等価(空間・時間の一樣性)であるので、係数 A, B, C, D, K はどちらの場合も同じになると考えられ、 S' 系から見た S の関係は上式で V を $-V$ で入れ替えればよく

$$\begin{aligned}x &= A(-V)x' + B(-V)x'_0, \quad y = K(-V)y' \\z &= K(-V)z', \quad x_0 = C(-V)x' + D(-V)x'_0\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

¹ "特殊" という理由は、互いに加速しているような系間の関係は除外されていることから来ており、互いに加速しているような系間の関係は、一般相対性理論で取り扱われます

² 仮に非線形変換を採用すると、1つの慣性系での等速度運動はもう1つの慣性系において速度はその物体の位置にも関係してきて、空間の一樣性が成立しなくなります。アインシュタインの原論文では『我々が空間と時間に付与する一樣性のために、方程式が線形でなければならないのは明らかである』と述べられています。

³ 第1式の右辺に x_0 が、第4式の右辺に x が入っていることに注意！空間と時間が同列に扱われ、このことはそれぞれの慣性系にはそれぞれの時間を持つということを意味しています。

と表すことができます。次に，兩座標系で $x^2 - c^2t^2$ は不変⁴，すなわち

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2 \quad (2.2.4)$$

という条件をおきます。以上の関係式から係数 A, B, C, D, K を求めていきましょう。(2.2.1) を (2.2.3) に入れて

$$\begin{aligned} x &= \{A(-V)A(V) + B(-V)C(V)\}x + \{A(-V)B(V) + B(-V)D(V)\}x_0 \\ y &= K(-V)K(V)y \\ z &= K(-V)K(V)z \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$x_0 = \{C(-V)B(V) + (-V)D(V)\}x + \{C(-V)A(V) + D(-V)C(V)\}x_0$$

これが任意の x, y, z, x_0 で成り立つためには，両辺の各係数が等しくなければならないので

$$\begin{cases} A(-V)A(V) + B(-V)C(V) = 1 \\ A(-V)B(V) + B(-V)D(V) = 0 \\ K(-V)K(V) = 1 \\ C(-V)B(V) + (-V)D(V) = 0 \\ C(-V)A(V) + D(-V)C(V) = 1 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

次に，(2.2.3) を (2.2.5) の左辺に入れると

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - x_0'^2 &= \{A^2(V) - C^2(V)\}x^2 + K^2(V)(y^2 + z^2) \\ &\quad - \{D^2(V) - B^2(V)\}x_0^2 + 2\{A(V)B(V) - C(V)D(V)\}x_0x \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

が得られます。ここで右辺が $x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2$ という形にまとまるように係数 A, B, C, D, K の関係式を求めていくと

$$\begin{aligned} A^2(V) - C^2(V) &= D^2(V) - B^2(V) = K^2(V) = 1 \\ A(V)B(V) - C(V)D(V) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

が得られます。これから⁵

$$K(V) = 1 \quad (2.2.9)$$

次に，(2.2.8) の第 2 式より

$$\frac{C(V)}{A(V)} = \frac{B(V)}{D(V)} \equiv -\beta(V) \quad (2.2.10)$$

これと (2.2.8) の第 1 式より

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{C}{A}\right)^2 &= 1 - \beta^2 = \frac{1}{A(V)^2}, \quad \therefore A(V) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \\ 1 - \left(\frac{B}{D}\right)^2 &= 1 - \beta^2 = \frac{1}{D(V)^2}, \quad \therefore D(V) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

が得られます。次に (2.2.8) より $V \rightarrow 0$ で (x', x'_0) が (x, x_0) に戻る⁶ことを使うと，(2.2.1) より

$$A(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}}, \quad D(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \quad (2.2.12)$$

⁴ 4次元空間における距離に相当。

⁵ 臍を曲げて， $K^2(V) = 1$ を満たすのは $K(V) = 1$ 以外も考えられますが，それらは物理的に不合理な結果となることが分かっています。

⁶ $V = 0$ で $x' = x, x'_0 = x_0$

また, (2.2.8) の第 1 式より

$$C(V) = \frac{-\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}}, \quad B(V) = \frac{-\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \quad (2.2.13)$$

が得られます。(2.2.12), (2.2.13) を (2.2.6) の第 2 式に入れると

$$\begin{aligned} & A(-V)B(V) + B(-V)D(V) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta(-V)^2}} \frac{-\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} + \frac{-\beta(-V)}{\sqrt{1-\beta(-V)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} = 0 \\ &\therefore \beta(V) + \beta(-V) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

が得られ, A, B, C, D は 1 つの V の奇関数 $\beta(V)$ で表わされることとなります。これを使って (2.2.1) を書き換えると

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - \beta(V)x_0}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta(V)x}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + \beta(V)x'_0}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ x_0 = \frac{x'_0 + \beta(V)x'}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \end{array} \right. \quad (2.2.15)$$

となります。ついでに逆変換の式を右に書いておきました。

次に $\beta(V)$ ですが, これは次のようにして求められます。 S' 系での速度は

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial x_0} dx_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} dx - \frac{\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} dx_0 \\ dx'_0 &= \frac{\partial x'_0}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x'_0}{\partial x} dx = \frac{1}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} dx_0 - \frac{\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} dx \\ \therefore \frac{dx'}{dx'_0} &= \frac{dx - \beta(V)dx_0}{dx_0 - \beta(V)dx} = \frac{\frac{dx}{dx_0} - \beta(V)}{1 - \beta(V)\frac{dx}{dx_0}} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

となるので, いま S 系に静止している物体を考えた場合, この物体は S' 系から見れば $-V$ の速度で移動していることとなります。そこで, $dx/dx_0 = 0$, $dx'/dx'_0 = dx'/cdt' = -V/c$ とおけば, 上式より

$$\frac{V}{c} = \beta(V) \quad (2.2.17)$$

となって, $\beta(V)$ が求まります。(2.2.15) の分母から $\beta < 1$ でなければならず⁷, 光速以上の速さは存在しないこととなります。(2.2.15) と (2.2.17) を x 方向へのローレンツ変換 (これを x 方向へのローレンツブーストといいます。)と呼んでいます。(2.2.15) の第 1 式や第 4 式に見られるように, 時間は相手の座標系の位置にも依存するという点に注目してください。また, ガリレイ変換のときのように, すべての慣性系に共通した絶対的時間という概念はありません⁸。

ローレンツ変換で $V \ll c$ の場合, つまり $\beta \ll 1$ のとき, (2.2.15) を β で展開してその 1 次までとると

$$\begin{aligned} x' &= (x - \beta x_0)(1 - \beta^2)^{-1/2} \doteq (x - \beta x_0)(x + \beta^2/2) \doteq x - \beta x_0 = x - Vt \\ x'_0 &= (x_0 - \beta x)(1 - \beta^2)^{-1/2} \doteq (x_0 - \beta x)(x + \beta^2/2) \doteq x_0 - \beta x \doteq x_0, \quad \therefore t' = t \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

⁷ そうでないと分母は虚数になってしまう。

⁸ ただし, 絶対時間に相当するものとして固有時というのがありますが, これは相対論的力学のセクションで登場します。

となって, ガリレイ変換となります。ここで波動方程式を不変にする変換 (4次元空間での回転) とローレンツ変換の関係を見てみましょう。双方の変換式を併記すると

$$\begin{cases} x' = x \cosh \chi - ct \sinh \chi \\ x'_0 = \frac{t}{c} \cosh \chi - x \sinh \chi \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{x - \beta(V)x_0}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta(V)x}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \end{cases} \quad (2.2.19)$$

これから

$$\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \sinh \chi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \tanh \chi = \beta = \frac{V}{c} \quad (2.2.20)$$

という関係が得られます。虚数角 $\theta \equiv i\chi$ を使うと

$$\begin{aligned} \cosh \chi = \cos \theta = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \sinh \chi = -i \sin \theta = \beta/\sqrt{1 - \beta^2} \\ \begin{cases} x' = x \cos \theta + (ix_0) \sin \theta \\ ix'_0 = -x \sin \theta + (ix_0) \cos \theta \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ ix'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ix_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

ローレンツ変換は4次元空間での回転ということになります。

2.2.1 ローレンツ変換群

ある慣性系 S から別の慣性系 S' へのローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x) \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

でした。次に S' 系からもう1つ別の慣性系 S'' 系へのローレンツ変換で移ったとすると

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma'(x' - \beta' x'_0), \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - \beta'^2} \\ x''_0 &= \gamma'(x'_0 - \beta' x') \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

となります。さて, S 系から S'' 系への変換もローレンツ変換となることを以下にみていきましょう。

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma'(x' - \beta' x'_0), \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - \beta'^2} \\ &= \gamma\gamma' \{ (1 + \beta\beta')x - (\beta + \beta')x_0 \} = \gamma\gamma'(1 + \beta\beta') \left(x - \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} x_0 \right) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

ここで

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \quad (2.2.25)$$

とおくと

$$\begin{aligned} 1 - \beta''^2 &= \frac{(1 + \beta\beta')^2 - (\beta + \beta')^2}{(1 + \beta\beta')^2} = \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta'^2)}{(1 + \beta\beta')^2} = \frac{1}{\{\gamma\gamma'(1 + \beta\beta')\}^2} \\ \therefore \gamma\gamma'(1 + \beta\beta') &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

これを上式に入れると

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} (x - \beta'' x_0) = \gamma'' (x - \beta'' x_0), \quad \gamma'' = 1/\sqrt{1 - \beta''^2} \quad (2.2.27)$$

全く同様にして

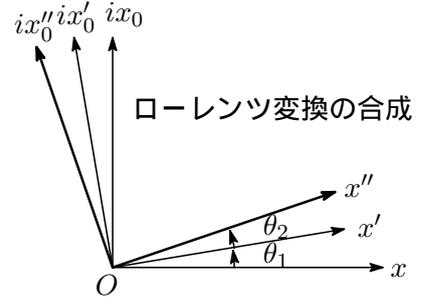
$$x_0'' = \gamma''(x_0 - \beta''x) \quad (2.2.28)$$

したがって, $S \rightarrow S''$ の変換はローレンツ変換になります。
回転行列を使った場合は以下の通りです⁹。

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \gamma_1, & \sin \theta_1 &= i\gamma_1\beta_1 \\ \cos \theta_2 &= \gamma_2, & \sin \theta_2 &= i\gamma_2\beta_2 \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

とにおいて, これから

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_1\gamma_2\beta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= i(\gamma_1\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_2) \end{aligned} \quad (2.2.30)$$



$S \rightarrow S' \rightarrow S''$ の変換は次の回転行列の積で表わされるので

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x'' \\ ix_0'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & i\gamma_1\beta_1 \\ -i\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & i\gamma_2\beta_2 \\ -i\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ix_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & i\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \\ -i\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ix_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ix_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

先ほどの式と比べると

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \\ \gamma''\beta'' &= \gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

これから

$$\beta'' = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \quad (2.2.33)$$

これは (2.2.25) に他なりません。また, (2.2.33) と (2.2.29) より

$$\begin{aligned} \gamma''^2(1 - \beta''^2) &= \gamma_1^2(1 - \beta_1^2)\gamma_2^2(1 - \beta_2^2) = 1 \\ \therefore \gamma'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

ローレンツ変換には逆変換も存在し, 単位変換 (なにも変換しない) もあるので, ローレンツ変換はガリレイ変換群のところで触れた群の定義を満たし, これをローレンツ変換群と呼んでいます。

2.3 同時性について

2.3.1 時刻合わせ

東京と大阪から同時に出発しようとか, “同時” という言葉を普段日常的に使いますが, 距離的に離れた場所 A, B での同時というのは, 双方で時計の針が同じ時刻を指していることですね。ところで 2 つの時計の時刻を合わせるのにどのようにすればよいでしょうか? それは, 2 つの時計 W_A, W_B を例えば場所 A で時刻合わせをして, それから時計 W_B を B の地点まで持って行けばいいのではないかと常識では考えますが, 相対論の世界では時計 W_B を動かすと W_B の

⁹ x_0 軸は虚数 i が掛かることに注意。

時を刻む速さ (テンポ) は W_A よりゆっくりとなり, B 点に到達したときには W_A の示す時刻とずれてしまっていることとなります。ということで, 時計を動かすのはまずいので, 2 点 A, B に時計 W_A, W_B を固定します。点 A から時刻 t_A に光を発射し, 点 B で光を受信したとき, W_B の示す時刻が t_B だったとします。光は点 B で即座に反射され点 A に戻ります。戻ってきた瞬間の時計 W_A の示す時刻を t'_A とします。もし, $t_B - t_A = t'_A - t_B$ となっていれば, つまり, $t_B = (t'_A + t_A)/2$ となっていれば, 時計 W_A と W_B は同時刻・同じ速さで時を刻んでいることとなります。しかし, そうでなかった場合, 光が B 点に到達したとき W_B の時計が t'_B を示したとすると, $(t_A + t'_A)/2 - t'_B$ だけ W_B の針を進めるように調整すればよいこととなります。すなわち, 調整後の B 点の時計の示す時刻を t_B とすると

$$t_B = t'_B + \text{調整分} = t'_B + \left\{ \frac{1}{2}(t_A + t'_A) - t'_B \right\} = \frac{1}{2}(t_A + t'_A) \quad (2.3.1)$$

このように同一慣性系の任意の位置に配置された時計の時間あわせ (同期化) をしておくことで, その位置における時刻を知ることができます。座標に配置された時計の示す時間を座標時間といいます。以後, 基準とする慣性系 S での時刻は その位置に配置された時計が示す時刻 ということのを忘れないように。

2.3.2 事件の空間的・時間的構造

1 つの慣性系 S である事件, 例えば花火が炸裂し, その場所を x , 起こった時刻 t に c を掛けたものを $x_0 (\equiv ct)$ とします。そして, 花火の炸裂事件を一定の速度 V で x の正の方向に走っている車から見たとき, 車に固定された慣性系 S' での場所と時刻をそれぞれ x', x'_0 とします。なお, S, S' 両座標系の原点が一致したときに双方の時計も一致していたとします。 (x, x_0) と (x', x'_0) はローレンツ変換 (2.2.15) で互いに結ばれています。

さて, 勝手に起こった互いに関連性のない (因果関係のない) 2 つの事件 A, B を, 次の 2 つのケースで考えてみます。

1. S 系で事件 A, B が同じ位置, かつ異なった時刻に発生した。
2. S 系で事件 A, B が同時刻で, かつ異なった場所で発生した。

事件 A, B に対して S と S' 系は次のローレンツ変換で結ばれています。 V は S に対して x 方向へ S' が動く速度です。

$$\begin{aligned} x_{A'} &= \gamma(x_A - Vt_A), & t'_A &= \gamma(t_A - Vx_A) & (\because x_0 = ct_A, x'_0 = ct'_A) \\ x_{B'} &= \gamma(x_B - Vt_B), & t'_B &= \gamma(t_B - Vx_B) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

1. のケースで $x_A = x_B, t_A \neq t_B$ とすると, (2.3.2) より

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A &= -\gamma V(t_B - t_A) \\ t'_B - t'_A &= \gamma(t_B - t_A) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

が得られます。この第 1 式を見ると, $x'_B - x'_A \neq 0$ で, S' 系では, 2 つの事件 A, B が同じ場所で発生していない! ということになります。また, 第 2 式より, $t'_B - t'_A > t_B - t_A$ となるので, 2 つの事件 A, B が発生した時間間隔 $t'_B - t'_A$ は, S' 系では S 系に較べて γ だけ長くなります! つまり, S 系から見た場合, S' 系ではゆっくり時を刻んでいることになりますね。

2. のケースで $t_B = t_A, x_B \neq x_A$ とすると

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A &= -\gamma(x_B - x_A) \\ t'_B - t'_A &= -\gamma V(x_B - x_A)/c^2 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

が得られます。これから、 S' 系でも事件A,Bは、異なる場所で発生していますが、 $t'_B - t'_A \neq 0$ で、事件A,Bは同時には起こっていません！仮に $x_A > x_B$ とすると、 $t'_B > t'_A$ となり、 S 系で事件A,Bが同時に起こったことが、 S' 系では事件Aが先に起こり、その後事件Bが起こっている。 $x_A < x_B$ であれば時間的に逆の事象が起こっていることとなります。このように、ある慣性系では同時であったことが、別の慣性系では同時ではないという、ニュートン力学の常識では考えられない事情が表れます。

- ある慣性系で空間的に同じ場所であっても、異なる慣性系では同じ場所とならない。
- ある慣性系で時間的に同時であっても、異なる慣性系では同時とならない。

2.3.3 走っている棒は短くなる

長さ ℓ_0 の棒が S 系に対して速さ V で x 軸方向に走っているとします。棒と共に動く座標系を S' とすると、 S' 系では棒は静止しているので、先端と後端の座標を x'_A, x'_B とすると

$$\ell_0 = x'_B - x'_A \quad (2.3.5)$$

この棒を S 系から眺めた場合の棒の長さを ℓ とすると、 ℓ は棒の先端座標 x_B と後端座標 x_A を同時に測定したときの座標の差であるので、 x'_A, x'_B をローレンツ変換

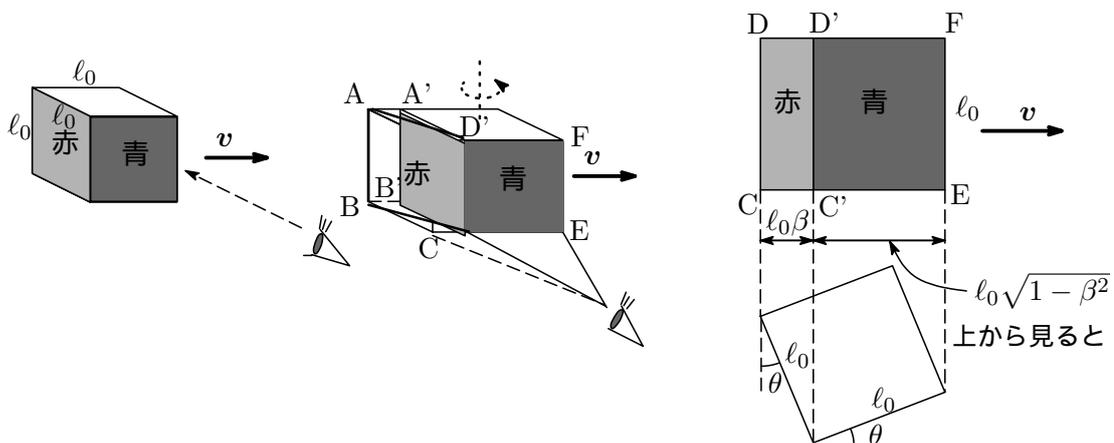
$$x_A = \gamma(x'_A + \beta ct_A), \quad x_B = \gamma(x'_B + \beta ct_B)$$

し、 $t_A = t_B$ とおいて $x_B - x_A$ を求めると

$$\ell = x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma \ell_0 \quad (2.3.6)$$

となり、 γ は常に 1 より小さいので $\ell < \ell_0$ 、つまり、走っている棒は運動方向に短くなります。これをローレンツ収縮と呼んでいます¹⁰。

それでは、速度 v で動いている立方体はどのように見えるでしょうか。立方体は観測者に近い面は青色、側面は赤色に塗り分けられているとします。



¹⁰ ℓ_0 はローレンツ変換で不変になるので固有長さとも呼ばれます。証明は各自試みられたし。

“見える”にわざわざルビを振っている点に注意ください。観測者に見える形というのは、観測者の目に同時に入る光で決まり、物体から同時にでた光で決まるものではありません。動く立方体の場合、ローレンツ収縮という相対論からの帰結に加えて、光の速さは有限であるということとを合わせて考慮しなければなりません。

さて、立方体の観測者から遠い辺 AB からでた光が観測者に近いほうの辺 CD に達するまでに時間は l_0/c 経過しており、その間に立方体は $vl_0/c = l_0\beta$ だけ前に進んでいます。そうすると観測者の目に同時に飛び込んでくる光は、図の真ん中の ABC'D' の側面部からでた光となり、その部分は赤く見えます。また、同時に長さ C'E はローレンツ収縮により $l_0\sqrt{1-\beta^2}$ と収縮しているので、結局観測者の目には図の右のようなものが見えることとなります。立方体の運動方向のローレンツ収縮を見ようとしても（あるいはカメラで撮影しようとしても）それを確認できず、面白いことに、 $\beta = \theta$ とおくと、図に示すように立方体が角 θ 回転したかのように見えるわけですね。光速に近い速度になると赤い面が広がってきて、その分青い部分はローレンツ短縮により狭くなり、光速に達すると赤い面だけが見えるようになります。

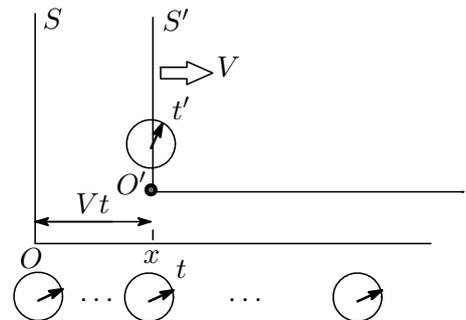
2.3.4 走っている時計はゆっくり進む

x の正の方向に速度 V で S' 系が動いており、質点は S' 系の原点にあるとします。 S 系では x 軸に沿って時刻合わせがなされた時計 W がびっしりと無数に配置され、質点が x 軸上のある位置 x を通過する瞬間の時刻 t は、その位置に配置された時計で計測されます（座標時間）。一方、 S' 系の時計 C は質点に固定されており、質点と一緒に動くようになっています。 S と S' 系の原点は $t = t' = 0$ で一致していたとします。

質点が位置 x に達する瞬間の時刻が t であったとし、質点に固定された時計の時刻は t' であったとします。このとき、 t' と t の関係はローレンツ変換 (2.2.15) より

$$t' = \frac{t - (\beta/c)Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t\{1 - (V/c)^2\}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.3.7)$$

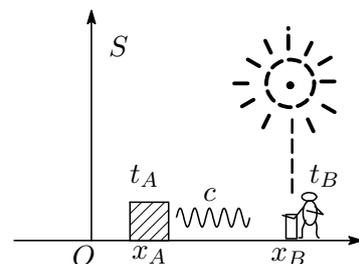
$$= t\sqrt{1-\beta^2} = \frac{t}{\gamma} < t \quad (\because \gamma > 1)$$



となります。この式は、質点に固定した時計の時刻 t' は座標時間 t よりゆっくり進むということを示しています。質点に固定した時計が示す時刻を固有時あるいは固有時間といいますが、固有時についてはセクション 2.6 でまた触れます。

2.3.5 因果律について

セクション 2.3 のケースで見たように、ある慣性系で 2 つの事件 A, B が同時に起こったことが、別の慣性系では A が B より先に起こったり、また別の慣性系では B が先に起こって A が起こったりします。このケースでは事件 A, B の間には因果関係がないとしているので、A が先に起ころうが、B が先に起ころうが特に問題はないのですが、A が原因で B が起こったというように両者の間に因果関係があった場合、慣性系によって“結果”である B が先に起こって、その“原因”となる A が後から起こるといふ、因果律が破られることがあり得るのでしょうか？



花火師がセンターから送信されてくる打上げ開始の光信号（原因）を受信した瞬間に花火を打ち上げた（結果）とします。センターの位置を x_A ，光信号を発射した時刻を t_A とし，花火師の位置を x_B ，花火を打ち上げた時刻を t_B とすると，

$$x_B - x_A = \pm c(t_B - t_A) \quad (2.3.8)$$

の関係が成り立ち，慣性系 S では信号を受信して花火を打ち上げたのだから $t_B - t_A > 0$ です。これを別の慣性系から眺めたとすると，

$$\begin{aligned} t'_A &= \gamma(t_A - \beta x_A/c), & t'_B &= \gamma(t_B - \beta x_B/c) \\ \therefore t'_B - t'_A &= \gamma(t_B - t_A - \beta(x_B - x_A)/c) = \gamma(t_B - t_A)(1 \mp \beta) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

となります。 $\gamma(1 \mp \beta)$ は常に正なので， $t'_B - t'_A > 0$ となり，別の慣性系でも原因と結果が逆転することはありません。

2.4 光のドップラー効果

S 系で単位ベクトル \mathbf{n} 方向に進んでいる振幅 A ，振動数 ν ，波長 λ ，角振動数 ω ，波数ベクトルを \mathbf{k} とする次の平面波¹¹を考えます。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{k} = (\omega/v)\mathbf{n}, \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi(v/\lambda) \quad (2.4.1)$$

この波を S に対して速度 V で動いている別の慣性系 S' から見たとき，その振る舞いがどうなるか調べます。ただし， $t = t' = 0$ のとき S' の原点は S の原点に一致するようにとっておきます。

ある慣性系で見た波の山あるいは谷は，別の慣性系で見たときも山あるいは谷に見えなければならないので，波の位相 $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ はローレンツ変換に対して不変，つまり変換前後で値は変わらないと考えられます（本セクション最後の【補注】やMEMO-3も参照）。

さて，光源が慣性系 S の原点に固定されているとして， S' 系に静止している観測者が観測する波の角振動数，波数ベクトルをそれぞれ ω' ， \mathbf{k}' とすると

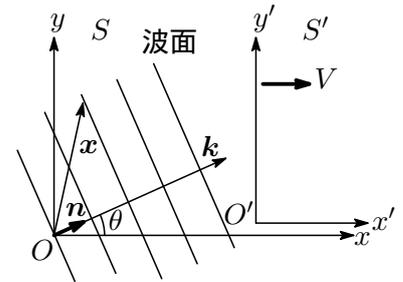
$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' \quad (2.4.2)$$

が成り立ちます。そこで，左辺をローレンツ変換(2.2.15)して右辺の \mathbf{k}' ， ω' の係数と比較すると

$$\begin{aligned} \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} &= \omega t - k_x x - k_y y - k_z z \\ &= \gamma\omega\{t' + (\beta/c)x'\} - \gamma k_x\{x' + (\beta/c)t'\} - k_y y' - k_z z' \\ &= \gamma t'\{\omega - (\beta/c)k_x\} - \gamma x'\{k_x - (\beta/c)\omega\} - k_y y' - k_z z' \\ &= \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z' \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$$\therefore \omega' = \gamma\{\omega - (\beta/c)k_x\}, \quad k'_x = \gamma\{k_x - (\beta/c)\omega\}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z$$

が得られます。ここで， k'_x ， ω' は S' 系での波数ベクトルと角振動数です。



¹¹ 単色平面波の波の山の動く速さを位相速度といいます。位相速度 v とすると $v = \omega/k$ で与えられます。光の位相速度は c です。

k と x 軸のなす角を θ , k' と x' 軸のなす角を θ' とすると

$$\begin{aligned} k_x &= |k| \cos \theta = (\omega/c) \cos \theta = 2\pi(\nu/c) \cos \theta \\ k'_x &= |k'| \cos \theta' = (\omega'/c) \cos \theta' = 2\pi(\nu'/c) \cos \theta' \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

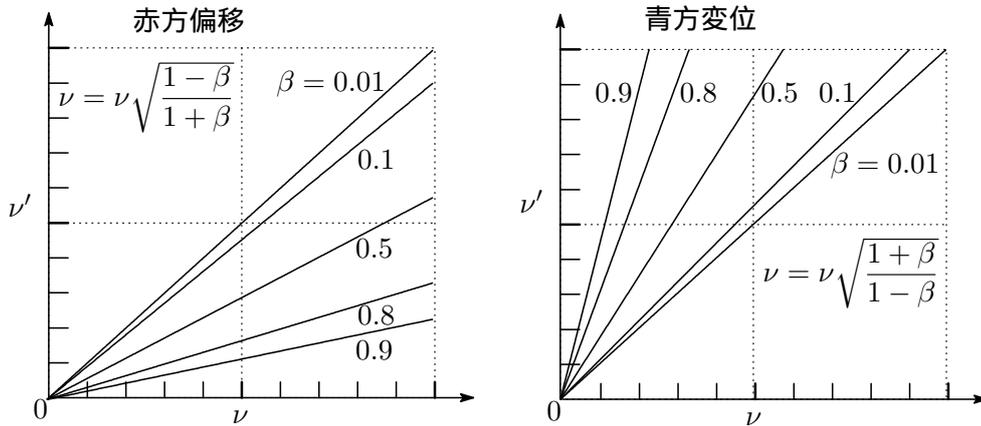
これと (2.4.3) より振動数 ν' , ν に対する関係式

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \beta \cos \theta), \quad \nu' \cos \theta' = \gamma\nu(\cos \theta - \beta) \quad \nu' \sin \theta' = \nu \sin \theta \quad (2.4.5)$$

を得ます。(2.4.5) の第 1 式は、相対論から導かれる光のドップラー効果の一般式です。ここで、 $\theta = 0^\circ$ とすると、光の進行方向と観測者の運動方向が同じで、観測者の観測する振動数 ν' は

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (2.4.6)$$

となります。この現象は縦ドップラー効果と呼ばれ、この場合、 ν' は減少し、可視光では波長が赤い方にずれるので「赤方偏移」と呼ばれます。



逆に、光源と観測者が近づいていく場合は、(2.4.5) の $\beta \rightarrow -\beta (= -V/c)$ に入れ替えればよいので、

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.4.7)$$

となり、観測される振動数は増加し、可視光では波長が青い方にずれるので「青方偏移」と呼ばれます。いずれにしても光源が運動しているのか、あるいは観測者が運動しているのかの区別はなく、両者の相対速度のみによってドップラー効果が決まります。

(2.4.5) より

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \tan \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta - \beta} \quad (2.4.8)$$

が得られます。光の進路方向を θ とすると観測者は θ' の方向に光を観測することになり、この式は光行差に対する相対論的公式と呼ばれます。

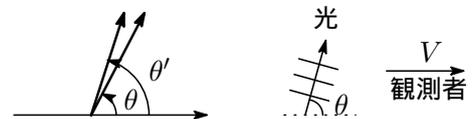
$\theta = \pi/2$ なら

$$\cos \theta' = -\beta \quad (2.4.9)$$

と簡単な形になります。 $V \ll c$ のときには、(2.4.8)

の第 1 式より

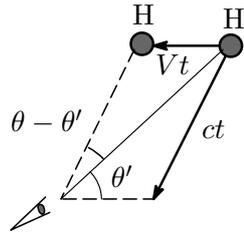
$$\cos \theta' = (\cos \theta - \beta)(1 - \beta \cos \theta)^{-1} \doteq (\cos \theta - \beta)(1 + \beta \cos \theta) \doteq \cos \theta - \beta \sin^2 \theta \quad (2.4.10)$$



$\Delta\theta = \theta' - \theta$ とおくと,
 $\Delta\theta \sim 0$ として $\cos\theta' \doteq \cos\theta - \Delta\theta \sin\theta$, $\cos\Delta\theta \sim 1$, $\sin\Delta\theta \sim \Delta\theta$
 となるので, (2.4.10) より

$$\Delta\theta = \beta \sin\theta = \frac{V}{c} \sin\theta \quad (2.4.11)$$

古典的光行差の公式が得られます。



参考：星の光行差
 星が静止していて，地球が公転速度 V で運動しているとするとき，星の位置は本当の位置 H からずれて H' に見える。

横ドップラー効果 S 系で平面波が z 軸方向に進行していて，それを S' 系にいる観測者が観測した場合，(2.4.5) で $\theta = 90^\circ$ において

$$\nu' = \nu \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.4.12)$$

が得られます。この現象を横ドップラー効果といい¹²，非相対論的な場合にはなかったことで，相対性理論の1つの特長となっています。(2.4.9) より

$$\cos\theta' = -\beta \quad (2.4.13)$$

仮に $\beta = 0.001$ とすれば $\theta' = 90.057^\circ$ となり， θ' は 90° よりわずかに傾くこととなります。

【補注】波の山や谷などを考えなくても，平面波のローレンツ変換でドップラー効果がでてくることを以下に示します。簡単のために S 系で x 方向に進行する次の平面波を考えます。

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad k = \omega/c \quad (2.4.14)$$

この平面波は S' 系では $(x', t') \rightarrow (x, t)$ のローレンツ変換，すなわち

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad t = \gamma(t' + (\beta/c)x')$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \psi(x', t') &= A \sin\left(\gamma\omega(1 - \beta)t' - \frac{\gamma\omega}{c}(1 - \beta)x'\right) \\ &= A \sin(\omega't' - k'x') \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

と表わせます。 ω' , k' は S' 系での角振動数と波数で，

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta), \quad k' = \frac{1}{c}\gamma\omega(1 - \beta) \quad (2.4.16)$$

これから

$$\nu' = \gamma(1 - \beta)\nu = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.4.17)$$

これは (2.4.5) で $\theta = 0^\circ$ とした式と一致します。

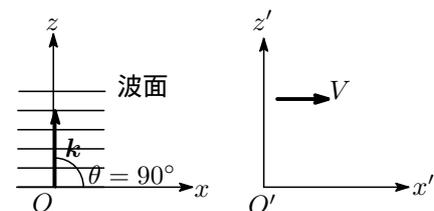
横ドップラー効果は， S 系で z 方向に進んでいる平面波を S' 系からみた場合に起こります。

$$\psi(t, z) = A \sin(\omega t - kz), \quad k = \omega/c \quad (2.4.18)$$

上式にローレンツ変換 $t = \gamma(t' + (\beta/c)x')$ を代入すると

$$\begin{aligned} \psi(t', x', z') &= A \sin(\omega't' - k'z') \\ &= A \sin(\gamma\omega t' - k(z' - \gamma\beta x')) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

これから $\omega' = \gamma\omega \rightarrow \nu' = \gamma\nu$ で，(2.4.12) と一致します。



¹² この効果は非相対論的ドップラー効果では表れません。例えば音源の斜めドップラー効果をみてみましょう。音源の振動数を ν とし，観測者と音源を結ぶ角度を α とすると，観測者が観測する振動数 ν' は $\nu' = \frac{1}{1 - (v/V)\cos\alpha} \nu$ で与えられます (詳細は「社会人のための楽しい物理入門」を参照)。 $\alpha = 90^\circ$ の場合， $\nu' = \nu$ となりドップラー現象は観測されません。

2.5 速度・加速度のローレンツ変換

2.5.1 速度のローレンツ変換

運動している質点の速度 (等速度とは限らない) がローレンツ変換でどのように変換されるか調べます。\$S\$ 系である粒子が速度 \$v(v_x, v_y, v_z)\$ で走っており¹³, \$S\$ 系に対して速度 \$V\$ で \$x\$ の正の方向に動いている \$S'\$ 系から見た同じ粒子の速度を \$v'(v'_x, v'_y, v'_z)\$ とします。それぞれの慣性系で速度は

$$(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (v'_x, v'_y, v'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad (2.5.1)$$

で表わされ, \$S\$ 系と \$S'\$ 系はローレンツ変換 (2.2.15) で結ばれています。(2.2.16) より

$$\frac{dx'}{dx_0} = \frac{1}{c} v'_x = \frac{dx - \beta(V) dx_0}{dx_0 - \beta(V) dx} = \frac{\frac{dx}{dx_0} - \beta(V)}{1 - \beta(V) \frac{dx}{dx_0}} = \frac{\frac{v_x}{c} - \beta}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} \quad (2.5.2)$$

$$\therefore v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{1}{c^2} v_x V}$$

同様に \$v'_y\$ や \$v'_z\$ は

$$\frac{dy'}{dx'_0} = \frac{dy'}{(dx_0 - \beta dx)/\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{dy}{dx_0}}{1 - \frac{V}{c} \frac{dx}{dx_0}} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.5.3)$$

$$\therefore v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} v_x V \right)} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} v_x V \right)}$$

となります。整理すると, 速度のローレンツ変換は次のようになります。

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{1}{c^2} v_x V} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} v_x V \right)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} v_x V \right)} \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{1}{c^2} v'_x V} \\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v'_x V \right)} \\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v'_x V \right)} \end{array} \right. \quad (2.5.4)$$

(2.5.4) 右側の式は, 通常「速度の合成則」とか「速度の加法則」とも呼ばれており, \$S'\$ 系で速度 \$v'\$ で動いている質点の \$S\$ 系で見た場合の速度 \$v\$ を表わしています。周知のようにガリレイの速度合成則では

$$v = v' + V \longrightarrow v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \quad (2.5.5)$$

となり, \$x\$ 方向の速度成分だけが変化しそれに垂直な速度成分は変化しませんでした。特殊相対論では時間もローレンツ変換されるので, この結果垂直方向の速度成分も変換されることになります¹⁴。

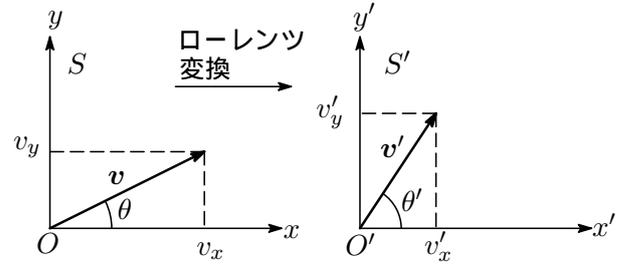
さて, \$S'\$ 系から見た速度ベクトル \$v'\$ の大きさと方向を求めてみましょう。簡単のために粒子の速度 \$v\$ が \$xy\$ 面内にあるように座標軸を設定します。

¹³ 等速度運動とは限定していないことに注意。

¹⁴ (2.5.4) で \$c \to \infty\$ の極限をとるとガリレイの式 (2.5.5) と一致する。

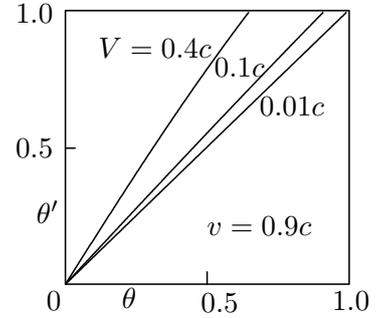
そうすると $v_z = 0$ となるので, (2.5.4) より $v'_z = 0$ で, v' は $x'y'$ 平面上にきます。 v と x 軸のなす角を θ , v' と x' 軸のなす角を θ' とすると

$$\begin{cases} v_x = v \cos \theta \\ v_y = v \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = v' \cos \theta' \\ v'_y = v' \sin \theta' \end{cases}$$



S' 系での「速度の方向」と「速度の大きさ」は, (2.5.4) より

$$\begin{aligned} v'_x &= v' \cos \theta' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{1}{c^2} v_x V} = \frac{v \cos \theta - V}{1 - V(v \cos \theta)/c^2} \\ v'_y &= v' \sin \theta' = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - \frac{1}{c^2} v_x V} = \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - V(v \cos \theta)/c^2} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$



これから

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - (V/c)^2}}{v \cos \theta - V} \quad (2.5.7)$$

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{\{v^2 - 2V(v \cos \theta) + V^2 \{1 - (v \sin \theta/c)^2\}\}^{1/2}}{1 - V(v \cos \theta)/c^2} \quad (2.5.8)$$

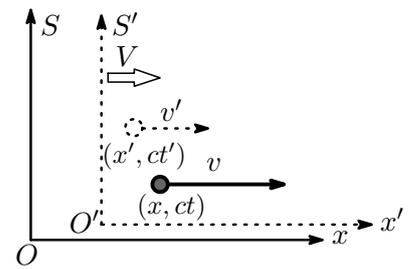
が得られます。 θ' と θ の関係を $v = 0.9c$ として V をパラメータにとってプロットした図を載せておきますので参考にしてください。簡単のために, 速度 v が x 軸に平行な場合を考えると, (2.5.8) で $\theta = 0$ とおいて

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2} \quad (2.5.9)$$

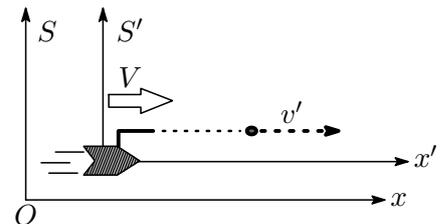
これを v について解くか, $V \rightarrow -V$, $v' \leftrightarrow v$ とすることで

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} \quad (2.5.10)$$

が得られます。この式は慣性系 S' での速度 v' が分かっている場合, 慣性系 S での速度 v を求めるのに利用できます。例えば慣性系 S に対して x 軸の正の方向に速さ V で走っているロケットがあり, ロケットと共に動く慣性系を S' とします。このロケットから速さ v' で走行方向に弾丸を発射したとき, S から観測した弾丸の速度は (2.5.10) で求められるわけです。



光速に近い速度で飛んでいるロケットから光速に近い速度の弾丸が発射されたら, S 系から見た弾丸の速度は光速を超えてしまう。。。? ロケットの速度を $V = k_2 c$, ロケットから見た弾丸の速度を $v' = k_1 c$, ($0 < k_1, k_2 \leq 1$) とすると, (2.5.10) より, 地上 S 系からみた弾丸の速度は



$$v = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2} c \quad (2.5.11)$$

となりますね。ところで,

$$k_1 + k_2 - (1 + k_1 k_2) = -(k_1 - 1)(k_2 - 1) \leq 0$$

となるので、分子は分母より常に小さい、つまり、常に $v \leq c$ で、光速以下の速度をいくら足し合わせても光速 c を超すことはできないということが導かれます。ロケットも弾丸も共に光速 ($k_1 = k_2 = 1$) としても $v = c$ で、このことは光を放出する物体の運動状態によらず光速は常に一定という光速不変の原理を表わしています。

MEC-2 : ラピディティについて ..(蛇足)

(2.2.20) で $\tanh \chi = \beta = \frac{V}{c}$ という関係式を得ました。そこで

$$\beta = \frac{V}{c} = \tanh \chi, \quad \beta' = \frac{v'}{c} = \tanh \chi', \quad \beta'' = \frac{v}{c} = \tanh \chi'' \quad (2.5.12)$$

というものを定義すると、(2.5.10) は

$$\beta'' = \frac{\beta' + \beta}{1 + \beta'\beta} \rightarrow \tanh \chi'' = \frac{\tanh \chi' + \tanh \chi}{1 + \tanh \chi' \tanh \chi} = \tanh(\chi' + \chi) \quad (2.5.13)$$

$$\therefore \chi'' = \chi' + \chi$$

となって単純な加法則がでできます。 χ はラピディティとかブースト・パラメータと呼ばれます。

フレネルの随伴係数

少し歴史的な話から。。。 相対論が登場する以前は

- 光を伝播する媒質はエーテルである。
- エーテルは絶対静止系に対して静止している。エーテルに対する光の伝播速度が c である。
- エーテルは真空中に充満している。また、水やガラス等、あらゆる透明物質の中にも浸透している（だから透明物質の中も光は伝播する）。

と考えられていました。屈折率 n の透明物質中での光の速さ（位相速度）は c/n で与えられます。そこで、もし透明物質がエーテルの海の中を速さ V で走っている場合、同じ向きに透明物質の中を伝播する光の速さは絶対静止系からみていくらになるだろうか？ということになり、次の2つの仮説が提案されました。

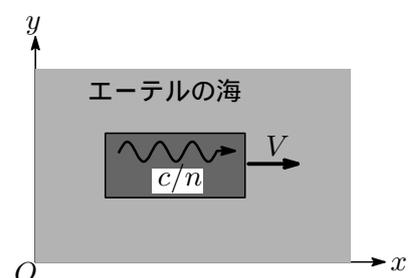
1. 透明物体の中に存在するエーテルは運動する物体に“完全”に引きずられて動くので、求める光の速さは $c/n + V$ となる。
2. 透明物体の中に存在するエーテルは運動する物体に“不完全”に引きずられて動き、エーテルの引きずられる割合を α とすると、求める光の速さは $c/n + \alpha V$ ($\alpha < 1$) となる。
 $\alpha = 1 - (1/n^2)$ で与えられ

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V \quad (2.5.14)$$

となる。

フレネルは2番目の仮説を提案、その後フィゾーの実験によりフレネルの (2.5.14) が正しいことが実証されました。 α はフレネルの随伴係数とか引きずり係数と呼ばれています。

歴史的な話は以上として、特殊相対論から (2.5.14) を導出してみましょう。透明物質として水を取り上げます。水の屈折率を n とすると、静止している水中を進む光の速度は c/n ですね。地面に固定した慣性系を S とし、地面に対して流れる水の流れを V 、水の流れと一緒に動く慣性系を S' とします。先ほどのロケットと弾丸の例を引き合いにして、水の流れる速度をロケットの速度、流れる水



の中を進む光の速度を弾丸の速度 (S' 系では水は静止している) の速度は c/n と置きかえて考えると, 求める速度 v は (2.5.10) より

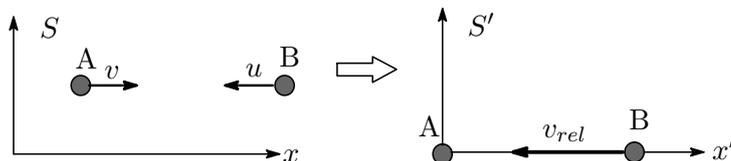
$$v = \frac{c/n + V}{1 + V/nc} = \left(\frac{c}{n} + V\right) \left(1 + \frac{V}{nc}\right)^{-1} \doteq \left(\frac{c}{n} + V\right) \left(1 - \frac{V}{nc}\right) \quad (2.5.15)$$

$$\doteq \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V$$

となり, あっさり (2.5.14) が導出されます。

相対速度

2つの粒子 A, B が互いに光速 c でぶつかり合う場合, その相対速度はどうなるでしょうか。相対速度というのは自分を基準にした相手の速度ということなので, お互いが c の速度で近づいていると相対速度は $2c$ となって光速を超える。。。!?



いま, 粒子 A が右の方向に速さ v で, 粒子 B は左の方向に速さ u で走っていると, その相対速度を求めていきます。 S 系では

$$\frac{dx_A}{dt_A} = v, \quad \frac{dx_B}{dt_B} = -u \quad (2.5.16)$$

ですね。次に相対速度を求めるために粒子 A が静止している慣性系 S' に移り, S' 系での粒子 B の速度, つまり相対速度 v_{rel} を求めます。 S' 系では粒子 A は静止, 粒子 B は v_{rel} で動いているので, (2.5.2) より¹⁵

$$\frac{dx_{A'}}{dt_{A'}} = 0, \quad \frac{dx_{B'}}{dt_{B'}} = -v_{rel} = \frac{\frac{dx_B}{dt_B} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx_B}{dt_B}} = -\frac{u + v}{1 + \frac{1}{c^2} uv} \quad (2.5.17)$$

$$\therefore v_{rel} = \frac{u + v}{1 + \frac{1}{c^2} uv}$$

いま, 粒子 A, B とともに速さが c とすると, 相対速度 v_{rel} は $u = v = c$ とおいて, 上式より

$$v_{rel} = c \quad (2.5.18)$$

となり, やはり光速となります (光速度不変の原理)。

2.5.2 加速度のローレンツ変換

加速度のローレンツ変換を調べます。簡単のために S 系である粒子が x 軸の正の方向に一定の加速度 a で運動 (等加速度運動) していると, この粒子を別の慣性系 S' から観測した場合の加速度を a' とします¹⁶。 (2.5.10) を t で微分すると

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} \right) = \frac{1 - (V/c)^2}{(1 + v'V/c^2)^2} \frac{dv'}{dt} = \frac{1 - (V/c)^2}{(1 + v'V/c^2)^2} \frac{dv'}{dt'} \frac{dt'}{dt} \quad (2.5.19)$$

¹⁵ (2.5.10) から直接求められます。

¹⁶ 特殊相対性理論で加速度運動は扱えないというのは間違いで, S と S' の間の速度 V が一定であれば, S 系での加速度運動は S' においても記述できます。

(2.2.16) より,

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \beta \frac{dx'}{dx'_0} \right) = \gamma (1 + v'V/c^2), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2} \quad (2.5.20)$$

なので, これを上式に入れて

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{1 - (V/c)^2}{(1 + v'V/c^2)^3} \frac{dv'}{dt'} = \frac{1}{\{\gamma(1 + v'V/c^2)\}^3} \frac{dv'}{dt'} = \frac{1}{\{\gamma(1 + v'V/c^2)\}^3} a' \quad (2.5.21)$$

が得られます。 S' 系における加速度 a' は, (2.5.21) をまともに解くか, $a \leftrightarrow a'$, $V \rightarrow -V$, $v' \leftrightarrow v$ の入れ替えをやればよいので

$$a' = \frac{a}{\{\gamma(1 - vV/c^2)\}^3} \quad (2.5.22)$$

となります。この式は, S' 系では S 系における加速度と異なる値をとる, つまり, 慣性系によって加速度は異なるという, ニュートン力学では出会わなかったことを示しています。 S に対して等速度で動いている座標系はすべて慣性系となるので, 慣性系は無限にあり, それに付随した加速度も無限にあることになって, どの慣性系を問題にしているのかというように取り扱いが面倒になります。

加速度運動を分解して考えると, ある瞬間 t の質点の速度を v とした場合, 次の瞬間 $t + \Delta t$ には $v + \Delta v$ となっていますね。瞬間 t に質点と同じ速度 v で動いている慣性座標系 S' を考えます。このように一瞬だけ質点と一緒に動く慣性系 S' を瞬間静止系と呼んでいます。そうすると時刻 t で質点は静止 ($v = 0$) しており, 次の瞬間 $\Delta t'$ 後には速度 $\Delta v'$ で動いています。ただし, 等加速度運動を考えているので Δt での速度の増分 $\Delta v'$ は一定。これを S' 系での質点の速度とみなすと, S 系から見た質点の速度は, (2.5.10) を使って

$$v + \Delta v = \frac{\Delta v' + v}{1 + \Delta v'v/c^2}, \quad \therefore \Delta v = \frac{1 - (v/c)^2}{1 + \Delta v'v/c^2} \Delta v' \quad (2.5.23)$$

と得られます。 Δt と $\Delta t'$ の関係は

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma_p \Delta t', \quad \text{ただし } \gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (2.5.24)$$

なので, (2.5.23) と (2.5.24) より

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\gamma_p^3}{1 + \Delta v'v/c^2} \frac{\Delta v'}{\Delta t'} \quad (2.5.25)$$

ここで $\Delta t' \rightarrow 0$, $\Delta v' \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\substack{\Delta t' \rightarrow 0 \\ \Delta v' \rightarrow 0}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv'}{dt'} \gamma_p^3 \quad (2.5.26)$$

が得られます。 $dv/dt = a$, $dv'/dt' = a'_0$ とおけば

$$a = a'_0 \gamma_p^3 \quad (2.5.27)$$

で, 慣性系 S での質点の加速度 a と S' での加速度 a'_0 との関係式が得られます。この関係式は (2.5.21) で $v' \rightarrow 0$, $V \rightarrow v$, $\gamma \rightarrow \gamma_p$, $a' \rightarrow a'_0$ としても得られます。

$a'_0 = \xi = \text{一定}$ とすると, (2.5.25) より

$$\xi = \frac{dv}{dt} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \quad (2.5.28)$$

変数分離形になっているので容易に積分できる。初期値は $t_0 = 0, v_0 = 0$ として

$$\int \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} dv = \int \xi dt, \quad \therefore \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \xi t \quad (2.5.29)$$

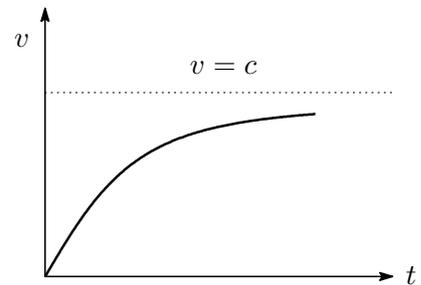
この式を v について解くと

$$v = \frac{\xi t}{\sqrt{1 + (\xi t/c)^2}} \quad (2.5.30)$$

を得ます。これは、初速度 0 の相対論的・等加速度運動の速度 v と時間 t の関係式です (下図)。

次に質点の飛翔距離を求めます。 $t = 0$ のとき $x = 0$ と
して

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{\xi t}{\sqrt{1 + (\xi t/c)^2}} dt \\ &= \frac{c^2}{\xi} \left(\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{c^2} t^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.5.31)$$



を得ます。これから質点の描く世界線を求めると

$$\frac{(x + c^2/\xi)^2}{c^4/\xi^2} - \frac{(ct)^2}{c^4/\xi^2} = 1 \quad (2.5.32)$$

となって、 $t \geq 0$ の領域で $ct = x + c^2/\xi$ を漸近線とする直角双曲線となることが分かります。特に、 $\xi t \ll c$ のときは

$$x \approx \frac{c^2}{\xi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{c^2} t^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} \xi t^2 \quad (2.5.33)$$

となって、ニュートン力学でのお馴染みの式がでてきますが、この世界線は $x = \frac{1}{2c^2} \xi (ct)^2$ で放物線ですね。

さて、質点に固定された時間と基準系 S の時間の関係は (2.5.24) より

$$dt' = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt \quad (2.5.34)$$

なので、これから

$$\begin{aligned} t' &= \int_0^t \sqrt{1 - (v/c)^2} dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{c^2} t^2}} dt = \frac{c}{\xi} \sinh^{-1} \left(\frac{\xi t}{c} \right) \\ \therefore \frac{\xi}{c} t &= \sinh \left(\frac{\xi}{c} t' \right) \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

となります。

【補注】加速度運動と瞬間静止系について少し補っておきます。これは次のロケット運動を考えると分かりやすいと思います¹⁷。ロケットのパイロットは噴射エンジンを連続的に動かすのではなく、ある一定の間隔で断続的に動かせ、エンジンを休止している間は慣性によってロケットを進めています。なお、エンジン噴射によるパイロットの受ける衝撃の大きさはいつも同じであるとします (加速度が一定)。

最初の衝撃までのロケットの速さを v_0 として、ロケットが最初は静止しているような慣性系を S とし、これを外部観測者がいる基準系とすると

$$v_0 = 0 \quad (2.5.36)$$

次に、最初の衝撃のあと、ロケットの速さはある値 α だけ増すので、

$$v_1 = \alpha \quad (2.5.37)$$

¹⁷ ランダウ・ジューコフ「相対性理論入門」(東京図書) 参照

次の衝撃までの間はロケットは慣性による等速直線運動をしており、この間に、ロケットが静止して見える新たな慣性系 S' (瞬間静止系) に移ります。第 2 衝撃のあと、ロケットは速さ α だけ増します。 S 系から見たロケットの速さは、速度の合成則 (2.5.10) により

$$v_2 = \frac{v_1 + \alpha}{1 + \frac{\alpha v_1}{c^2}} \quad (2.5.38)$$

次に、第 2 衝撃のあとロケットが静止して見える新たな慣性系 S'' に移って、第 3 衝撃後の S 系から見たロケットの速さを計算すると

$$v_3 = \frac{v_2 + \alpha}{1 + \frac{\alpha v_2}{c^2}} \quad (2.5.39)$$

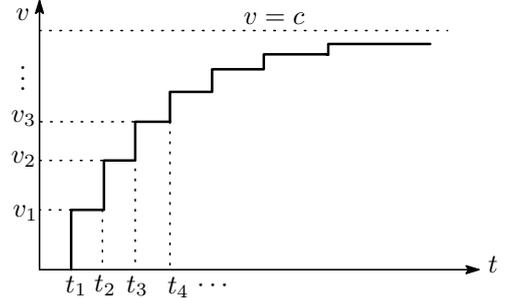
同様にして次々と新たな瞬間静止系に移って、第 n 衝撃後のロケットの S 系での速さは

$$v_{n+1} = \frac{v_n + \alpha}{1 + \frac{\alpha v_n}{c^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; v_0 = 0) \quad (2.5.40)$$

となります。これから、ロケットの速度は光速を超えることはなく、最終的に光速 c の漸近していくことがわかります。パイロットは一定の時間間隔でエンジンを噴射していました。この時間間隔を δ とすると、 S 系から見た n 回目と $n+1$ 回目の時間間隔は

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = \frac{\delta}{\sqrt{1 - v_n^2/c^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; t_0 = 0) \quad (2.5.41)$$

となり、ロケットの速度が光速に漸近するにつれて非常に長くなっていきます。以上の関係を、 S 系から見たロケットの速度と時間の関係グラフとして描くと上図のような階段状のグラフとなります。パイロットが大変短い時間間隔でエンジンを噴射していけば、階段状のグラフは連続的にエンジンを噴射場合の滑らかな曲線 (式 (2.5.30) で表わされる) に近づいていきます。



$$\begin{aligned} \Delta v_n = v_{n+1} - v_n &= \frac{v_n + \alpha}{1 + \frac{\alpha v_n}{c^2}} - v_n = \alpha \frac{1 - \frac{v_n^2}{c^2}}{1 + \frac{\alpha v_n}{c^2}} \\ \therefore \frac{\Delta v_n}{\Delta t_n} &= \frac{\alpha (1 - v_n^2/c^2)^{3/2}}{\delta (1 + \frac{\alpha v_n}{c^2})} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha (1 - v^2/c^2)^{3/2}}{\delta (1 + \frac{\alpha v}{c^2})} \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

ここで、 $\xi = \alpha/\delta$ を一定に保ちながら $\alpha, \delta \rightarrow 0$ の極限をとると

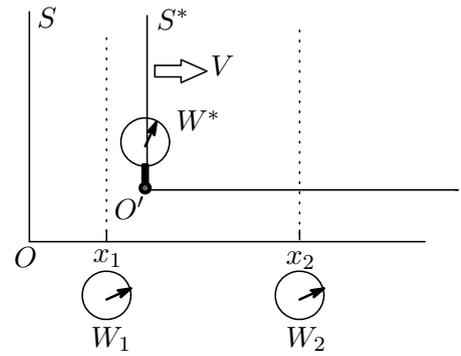
$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} \frac{\Delta v_n}{\Delta t_n} = \xi (1 - v^2/c^2)^{3/2} \quad (2.5.43)$$

$\xi = a'_0$ とすると、これは (2.5.27) と一致しますね。 … (補注終わり)

2.6 固有時

慣性系 S の x 軸上の一点 x_1, x_2 にそれぞれ時計 W_1, W_2 が置かれており、 W_1, W_2 は 2.3.1 の方法で時刻あわせがされており、 $t = t^* = 0$ で原点 O を出発した質点は x 軸方向に速度 V で等速運動しているとします。

質点と一緒に動く慣性系を S^* とし、質点には時計 W^* が固定されています。質点が S 系の位置 x_1 を通過する瞬間、 x_1 に設置された時計 W_1 は時刻 t_1 を示し、質点に固定された時計 W^* は τ_1 を示しました。次に質点が x_2 を通過する瞬間に x_2 に設置された時計 W_2 は時刻 t_2 を示し、 W^* は τ_2 を示したとします。 W_1, W_2 は座標位置に設置された時計なのでこれを座標時間といい、 W^* は質点に固定された時計で固有時ということは既に触れました。時間間隔 $t_2 - t_1$ は座標を指定してはじめて定められるのに対して、固有時間隔 $\tau_2 - \tau_1$ は基準となる慣性系 S の選び方に依存しない質点の固有の時間であることを以下に証明します。



S と S^* の間のローレンツ変換より

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1 - V^2/c^2} (t_2 - t_1) \quad (2.6.1)$$

$\tau_2 - \tau_1$ を $\Delta\tau$ と書くことにします。等速運動している質点の速度 V は

$$V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.6.2)$$

なので、(2.6.1) の両辺を 2 乗して (2.6.2) を代入すると

$$\begin{aligned} (\Delta\tau)^2 &= (1 - V^2/c^2)(t_2 - t_1)^2 = \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} \right\} (t_2 - t_1)^2 \\ &= (t_2 - t_1)^2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

また、 S 系から別の慣性系 S' へローレンツ変換¹⁸をおこなうと

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 &= \frac{\{(x'_2 - x'_1) + U(t'_2 - t'_1)\}^2}{1 - U^2/c^2} \\ (t_2 - t_1)^2 &= \frac{\{(t'_2 - t'_1) + \frac{U}{c^2}(x'_2 - x'_1)\}^2}{1 - U^2/c^2} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

を得ます。これを (2.6.3) に入れて整理すると

$$(\Delta\tau)^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2} = (t'_2 - t'_1)^2 - \frac{(x'_2 - x'_1)^2}{c^2} \quad (2.6.5)$$

となり、固有時間隔 $\Delta\tau$ は S から見ても S' 系から見ても同じ値となるので、ローレンツ変換不変量となることが分かります。(証明終わり)

さて、質点が等速運動をしていない場合はどうなるかということですが、この場合は瞬間静止系の固有時間隔を計算し、それらを加え合わせることで全体の固有時間隔が得られます。具体的には (2.6.6) で計算できます。(2.5.41) を参照されたい。

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_p} \quad (2.6.6)$$

これがローレンツ不変となることはいうまでもないですね。なお、固有時については第 3 章「相対論的力学」のところで、物理的意味を中心に再び取り上げます。

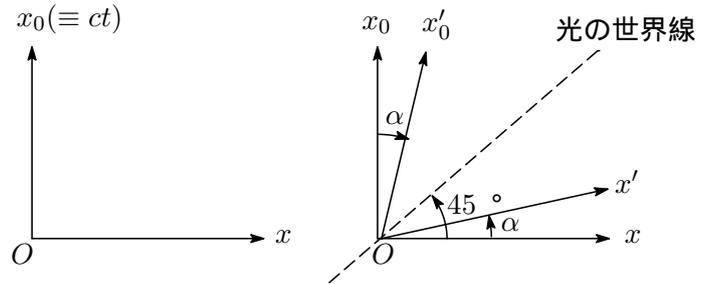
¹⁸ S' 系は S 系に対して速度 U で動いている。

2.7 ローレンツ変換の幾何学的表示

ローレンツ変換の幾何学的表示を使ってローレンツ収縮や時計の遅れなどを調べていきましょう。ローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & x_0 &= ct \\ x' &= \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1 + \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

(2.7.1)



でした。 y, z を省略して、横軸に x 軸をとり、これに直交する縦軸として $x_0 \equiv ct$ をとります¹⁹。縦軸を t ではなく ct としたのは縦横両軸の次元を合わせるためです。 x'_0 軸は $x' = 0$ で表わされ、 x' 軸は $x'_0 = 0$ で表わされるので、それぞれの軸は (2.7.1) より

$$x'_0 \text{ 軸} : x = \beta x_0, \quad x' \text{ 軸} : x_0 = \beta x \quad (2.7.2)$$

という直線に相当し、 x'_0, x' 軸の x_0, x 軸に対する傾斜はそれぞれ同じ角で、 $\alpha = \tan^{-1} \beta$ となります²⁰。

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (2.7.3)$$

$\beta \rightarrow 1$ に近づくほど傾斜 α は大きくなり、 $\beta = 1$ で図に示した光の世界線になります。

さて、慣性系 S からみたもう一つの慣性系 S' は斜交座標となります（逆に言えば S' 系から S 系を見れば、今度は S 系が斜交座標となる）。ガリレイ変換では時間軸だけが傾きましたが、ローレンツ変換では x_0 と x が対称なので、 x_0 軸と x 軸の両方が同じように傾く分けですね。

幾何学的表示上の注意点

ところで、図形上で描いた S' 系のスケールはどうなっているのでしょうか。

S 系を $x_0 - x$ 、 S' 系を $X'_0 - X$ として右図より

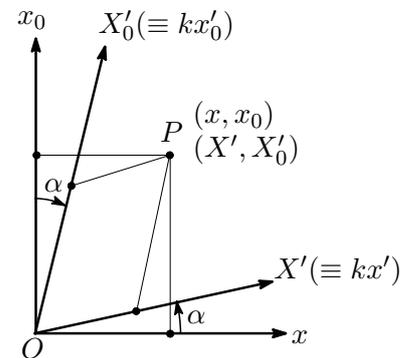
$$\begin{cases} x = X' \cos \alpha + X'_0 \sin \alpha \\ x_0 = X' \sin \alpha + X'_0 \cos \alpha \end{cases} \quad (2.7.4)$$

の関係式が得られます。ここで

$$X' = x' \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad X'_0 = x'_0 \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.7.5)$$

とおくと、(2.7.5) より、ローレンツ変換の式 (2.2.15)

$$\begin{cases} x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + \beta x_0}{\sqrt{1 + \beta^2}} \\ x_0 = \frac{x'_0 + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (2.7.6)$$



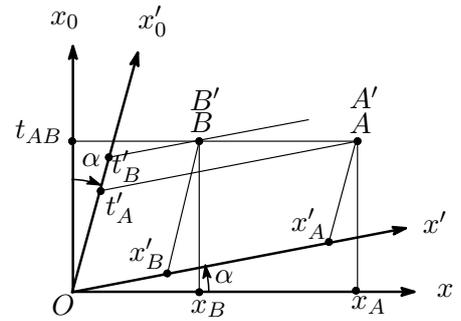
が得られます。 $k = \sqrt{(1 + \beta^2)/(1 - \beta^2)}$ とおくと、 $X' = kx'$ 、 $X'_0 = kx'_0$ なので、図形上の X' 、 X'_0 軸のスケールは k だけずれています。したがって、幾何学的にローレンツ変換を考える場合には、時空軸の x' の代わりに kx' を、 x'_0 の代わりに kx'_0 をプロットしておけばいいことになります。

¹⁹ ict と虚数が付いていないことに注意。この場合、ローレンツ変換は斜交座標で表わされることになります。

²⁰ x'_0, x' の両軸は、粒子の速度の大きさにより扇子が開いたり閉じたりするようなイメージで捉えればよい。

同時刻の相対性

S 系において2つの事件 A, B が同時刻 ($t_A = t_B = t_{AB}$) で起きたとします。この事件は S 系の時空図では点 $A(t_{AB}, x_A)$, 点 $B(t_{AB}, x_B)$ となります。この事件は S' 系では点 $A'(t'_A, x'_A)$, $B'(t'_B, x'_B)$ となり, A' の起こった時刻は t'_A , B' の起こった時刻は t'_B で $t'_A \neq t'_B$ つまり, 同時刻に事件は起こっていないということが図から即座にわかります。



ローレンツ収縮

S' 系の X' 軸に沿って長さ ℓ_0 の棒が横たわっており, その両端を AB とします²¹。これを図で描くと右図のようになりますね。図中で AB の長さは

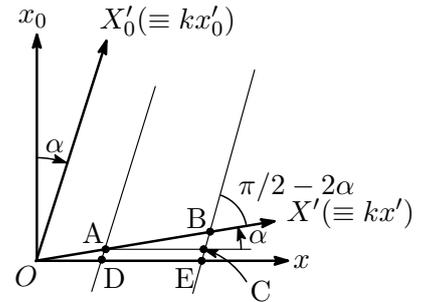
$$\overline{AB} = k\ell_0 = \ell_0 \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.7.7)$$

点 A, B を通る世界線をそれぞれ引いて x 軸と交叉する点を

D, E とすると, \overline{DE} が S から見た棒の長さ ℓ になります。三角形 ABC に正弦定理を適用すると

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC}, \quad \therefore \overline{AC} = \ell = k\ell_0 \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \ell_0 \sqrt{1-\beta^2} \quad (2.7.8)$$

となって, ローレンツ収縮の式がでできます。 S 系でも S' 系でも同時刻に長さを測定しているという点に留意ください。



走っている時計の遅れ

次の2つのケースを考えます。

1. S 系において同じ位置で時間間隔 $x_0 = \tau$ で2つの事件 A, B が起こったとします。その2つの事件を S 系に対して速度 V で動いている S' 系で測ったとき, 時間間隔が $x'_0 = \tau'$ であったとします。事件 A, B の世界線は下図の左側となります²²。 $\overline{AB} = \tau$, $\overline{A'B'} = k\tau'$ であることに注意してください。そうすると正弦定理を使って次式が得られます。

$$k\tau' = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \tau, \quad \therefore \tau' = \frac{1}{k} \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \tau = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau \quad (2.7.9)$$

これは (2.3.3) と同じ式ですね。

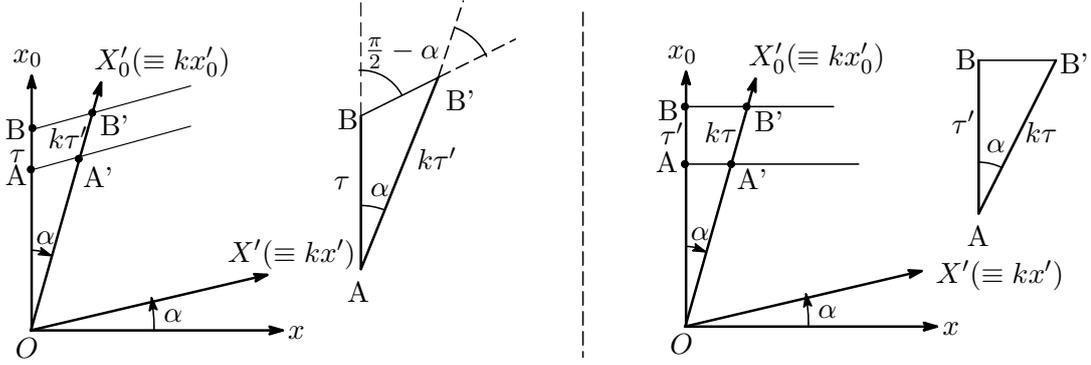
2. 今度は S 系に対して動いている S' 系において, 同じ位置で時間間隔 $x'_0 = \tau$ で2つの事件 A, B が起こったとします。 S' 系で2つの事件の時間間隔は $x'_0 = \tau$ であったとします。 S 系から測定した場合の時間間隔を τ' とすると, 図の右²³から明らかなように

$$k\tau \cos \alpha = \tau', \quad \therefore \tau' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau \quad (2.7.10)$$

²¹ S' 系で同時刻に A, B 両端の位置を測定している。

²² A から斜交座標上の A' への線引きは X' 軸と平行な線を引けばよいわけですね。

²³ 斜交座標 A' 点から直交座標 A 点への線引きは x 軸と平行な線を引けばよいわけですね。



速度の合成則

S系である速度 v で走っている物体を考えます。その世界線を AB とし、 x 軸となす角を γ とすれば

$$\tan \delta = \frac{x_0}{x} = c \frac{t}{x} = \frac{c}{v}, \quad \therefore \frac{v}{c} = \cot \delta \tag{2.7.11}$$

また、

$$\frac{V}{c} = \tan \alpha \tag{2.7.12}$$

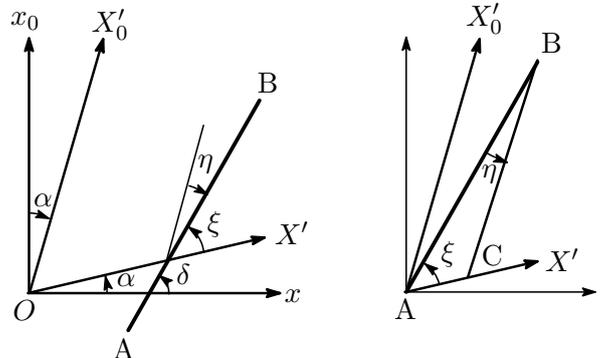
右図より

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \eta} = \frac{\overline{BC}}{\sin \xi}, \quad \overline{AC} = kx', \quad \overline{BC} = kt'$$

$$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{c} \frac{x'}{t'} = \frac{v'}{c} = \frac{\sin \eta}{\sin \xi}, \quad v' = c \frac{\sin \eta}{\sin \xi}$$

角 ξ, η は

$$\xi = \delta - \alpha, \quad \eta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \delta$$



これを (2.7) に入れて

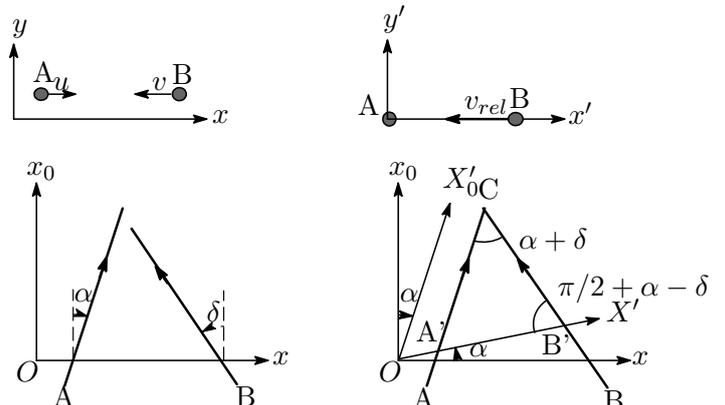
$$v' = c \frac{\cos(\delta + \alpha)}{\sin(\delta - \alpha)} = c \frac{\cot \delta - \tan \alpha}{1 - \cot \delta \tan \alpha} = c \frac{(v/c) - \beta}{1 - (v/c)(V/c)}$$

$$\therefore v' = \frac{v - V}{1 - \frac{1}{c^2}vV} \tag{2.7.13}$$

が得られます。この式は以前導出した (2.5.2) です。

相対速度

2個の粒子 A, B があり、粒子 A は x 軸の正の方向に速さ u で、粒子 B が x 軸の負の方向に速さ v で走っているとせばあ、その相対速度を求めます。粒子 A, B は速さ u, v で動いているので、その世界線は $\tan \alpha = u/c, \tan \delta = v/c$ で表わされます。次に相対速度を求めるために、粒



子 A の静止系に移ります。その系での粒子 A, B の世界線は右の図となりますね。S' 系では粒子 A は静止しています。点 C で 2 粒子が衝突するまでの時間は A'C = kt', 粒子 B の移動距離は A'B' = kx' となるので, 粒子 A から見た粒子 B の相対速度 $v_{rel}(= x'/t')$ はしたがって

$$\frac{A'B'}{A'C} = \frac{1}{c} \frac{x'}{t'} = \frac{1}{c} v_{rel} \quad (2.7.14)$$

で与えられます。三角形 A'CB に正弦定理を適用すると

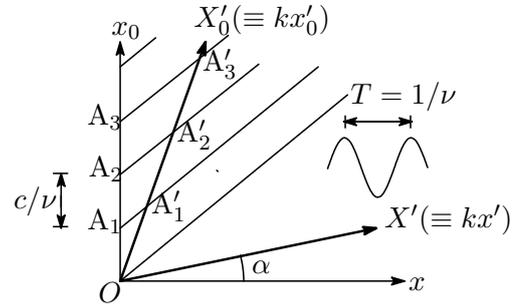
$$\begin{aligned} \frac{A'B'}{A'C} &= \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\pi/2 + \alpha - \delta)} = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\cos(\alpha - \delta)} = \frac{\sin \alpha \cos \delta + \cos \alpha \sin \delta}{\cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \delta}{1 + \tan \alpha \tan \delta} = \frac{1}{c} \frac{u + v}{1 + \frac{1}{c^2} uv} = \frac{1}{c} v_{rel} \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

$$\therefore v_{rel} = \frac{u + v}{1 + \frac{1}{c^2} uv}$$

となって, (2.5.17) と同じ結果が得られます。

ドップラー効果

最後に, 観測者が光源から V の速度で遠ざかっていく場合のドップラー効果を考えます。原点 O に静止した光源が放出する光の世界線は図中 45° の斜線で描かれますね。1 つの波の山が原点からでて次の山が出るまでの時間間隔は, 光の振動数を ν として c/ν です。この波を光源に対して速度 V で遠ざかっていく観測者が眺めるとすると, 右図のようになります。



$$\angle A'_1 A_1 O = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi, \quad \angle A_1 A'_1 O = \pi - (\alpha + \frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{4}\pi - \alpha$$

となるので, 三角形 $OA_1A'_1$ に正弦定理を使うと

$$OA_1 / \sin(\pi/4 - \alpha) = OA'_1 / \sin(3\pi/4) \quad (2.7.16)$$

$OA_1 = c/\nu$, $OA'_1 = (c/\nu')k$ を²⁴上式に入れて整理すると, (2.7.3) を使って

$$\nu' = \nu k(\cos \alpha - \sin \alpha) = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}} \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (2.7.17)$$

となり, (2.4.6) が得られます。

M&M 3: 波の位相のローレンツ変換不変について

速度 v の平面波 $\psi(t, x) = A \sin(\omega t - kx) = \omega(t - x/v)$ を位相といいました。ここでは 2π を省いた $\nu(t - x/v)$ を位相とし, その物理的意味を考えてみましょう。

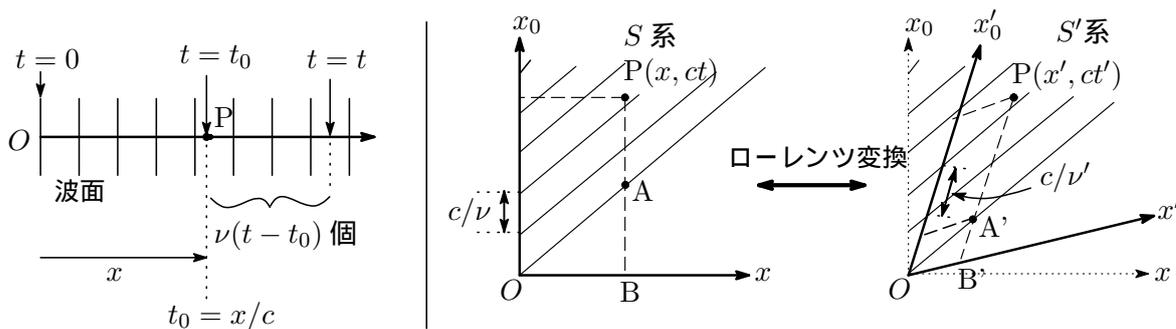
振動数 ν の静止した光源から発射された光の波の山が $t = 0$ 原点 O を通過したとします。この波の山が P 点に到達するまでの時間を t_0 とします。そうすると, 時間 $t(> t_0)$ までに P 点を通過した波の数は, したがって $\nu(t - t_0) = \nu(t - x/c)$ となり, これは波の位相と同じです。つまり, 時刻 t までに P 点を通過する波の数が位相に等しいということです。

²⁴ X'_0 軸のスケール変換を忘れないように!

さて、時空図で考えます。P 点はローレンツ変換で結ばれる同一点です。S 系での時空図では波の位相は PA の間の波の数になります。BA=ct₀ = c(x/c) = x, PA= ct-BA= ct - x なので、この間に含まれる波の数は PA/(c/ν) = ν(t - x/c) です。一方、S' 系では BA→B'A', PA→PA' に移り、PA' = ct', B'A' = c(x'/c) = x' となり、波の位相は PA' の間の波の数で、PA'/(c/ν') = ν'(t' - x'/c) となります。この波の数は図から分かるように、S 系と同じですね。したがって、位相はローレンツ変換で不変ということになります。念のため、いまの場合、位相のローレンツ不変を式で確認しておきましょう。(2.7.6) と (2.7.17) を使います。

$$\begin{aligned} \nu'(ct' - x') &= \nu'(x'_0 - x') = \nu'\gamma(1 + \beta)(x_0 - x), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \\ &= \nu\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(1 + \beta)(x_0 - x) = \nu(ct - x) \end{aligned} \quad (2.7.18)$$

∴ ν'(t' - x'/c) = ν(t - x/c)



第3章 相対論的力学

第2章では特殊相対論における空間・時間の性質について調べてきました。この章では、このような時空間の中で物体の運動方程式はどのように記述されるのか、さらにはマクスウェルの電磁理論は相対論的にどのような形で定式化されるのかというところを調べていくことにします。少し数学的な準備をしておく必要があるのですが、まずはその辺りから進めていきましょう。

3.1 数学的準備

3.1.1 2次元時空

当面、1次元空間と時間軸からなる2次元時空間を考え、その数学的な構造を調べます。空間座標を x の代わりに x_1 、時間軸として虚数座標 $x_4 \equiv ix_0 = ict$ を使うと、ローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x'_1 &= (x_1 + i\beta x_4)/\sqrt{1-\beta^2} \\ x'_4 &= (x_4 - i\beta x_1)/\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & i\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ -i\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

と書けます。行列で表わされた変換係数を

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/\sqrt{1-\beta^2}, & a_{14} &= i\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ a_{41} &= -i\beta/\sqrt{1-\beta^2}, & a_{44} &= 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

と書くと、(3.1.1) は次のように簡単に書けます。

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{14}x_4 \\ x'_4 &= a_{41}x_1 + a_{44}x_4 \end{aligned} \longleftrightarrow x'_\mu = \sum_{\nu=1,4} a_{\mu\nu}x_\nu \longleftrightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \quad (3.1.3)$$

右側は同じ添字に対しては和をとるというアインシュタインの規約にもとづくもので、とくに支障がなければこの表記を使っていくことにします。変換係数の行列式は (3.1.2) の定義より

$$\det(a_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = 1 \quad (3.1.4)$$

また、

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1,4} a_{\mu 1}a_{\mu 1} &= a_{\mu 1}a_{\mu 1} = a_{11}a_{11} + a_{41}a_{41} = 1 \\ \sum_{\mu=1,4} a_{\mu 4}a_{\mu 4} &= a_{\mu 4}a_{\mu 4} = a_{14}a_{14} + a_{44}a_{44} = 1 \\ \sum_{\mu=1,4} a_{\mu 1}a_{\mu 4} &= a_{\mu 1}a_{\mu 4} = a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44} = 0 \\ \sum_{\mu=1,4} a_{\mu 4}a_{\mu 1} &= a_{\mu 4}a_{\mu 1} = a_{14}a_{11} + a_{44}a_{41} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

なので、(3.1.5) をまとめて書くと

$$\sum_{\mu=1,4} a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = a_{1\nu}a_{1\lambda} + a_{4\nu}a_{4\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \begin{cases} \nu = \lambda : 1 \\ \nu \neq \lambda : 0 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

となります。これは直交変換の条件ですね。全く同様にして

$$\sum_{\mu=1,4} a_{\nu\mu}a_{\lambda\mu} = a_{\nu\mu}a_{\lambda\mu} = a_{\nu 1}a_{\lambda 1} + a_{\nu 4}a_{\lambda 4} = \delta_{\nu\lambda} \begin{cases} \nu = \lambda : 1 \\ \nu \neq \lambda : 0 \end{cases} \quad (3.1.7)$$

この関係式を使うと, (3.1.3) より,

$$\begin{aligned} x'_\mu x'_\mu &= x'_1 x'_1 + x'_4 x'_4 \\ &= (a_{11}x_1 + a_{14}x_4)(a_{11}x_1 + a_{14}x_4) + (a_{41}x_1 + a_{44}x_4)(a_{41}x_1 + a_{44}x_4) \\ &= (a_{11}a_{11} + a_{41}a_{41})x_1x_1 + (a_{14}a_{14} + a_{44}a_{44})x_4x_4 + 2(a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44})x_1x_4 \\ &= x_1x_1 + x_4x_4 \\ &= x_\mu x_\mu \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

となります。アインシュタインの規約を使うと次のようにスッキリ書けます¹。

$$\begin{aligned} x'_\mu x'_\mu &= a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda}x_\nu x_\lambda \\ &= \delta_{\nu\lambda}x_\nu x_\lambda = x_\nu x_\nu \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

この式はよく知られているように 2 次元座標回転において距離の 2 乗は不変ということに相当します。いまの場合, ローレンツ変換で $x_1^2 + x_4^2$ は不変, つまり, 原点から世界点への距離, 世界距離の 2 乗はローレンツ不変ということを意味します。注意すべきは, 距離の 2 乗といっても x_4 は虚数 ($= ix_0$) なので, $x_1^2 + x_4^2 = x_1^2 - x_0^2$ で必ずしも正の値をとるわけではなく, 負の値になる場合もあることに留意してください。

スカラー, ベクトル

2 次元時空におけるスカラーやベクトルを定義します²。

(1) スカラー: ある量 ϕ が座標変換 (3.1.3) で ϕ' に変換したとき, $\phi = \phi'$ ならば, ϕ をスカラーといいます。先ほどの $x_\mu x_\mu$ という量は (3.1.9) によりスカラーですね。スカラーは座標系によらない量です。

(2) ベクトル: 成分 A_1, A_4 をもつ量 A を考えます。 A_4 は虚数なので

$$A_4 = iA_0 \quad (3.1.10)$$

によって実の量 A_0 を定義します。成分 A_1, A_4 が座標変換によって, (3.1.3) 同じ変換

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu \quad (3.1.11)$$

をする場合, A_μ をベクトルといいます。

(3) ベクトルの和: ベクトルの成分同士の足し算をベクトルの和と定義します。

$$D_\mu = A_\mu + B_\mu \quad (3.1.12)$$

(4) スカラー積: 2つのベクトルの同じ成分同士を掛け合わせ, それらを足したものと定義します。

$$A_\mu B_\mu = A_1 B_1 + A_4 B_4 = A_1 B_1 - A_0 B_0 \quad (3.1.13)$$

¹ ギリシャ字の添字 μ, ν, λ, ρ などは 1 から 4 をとるものとします。

² $A_\mu = (A_1, iA_0), B_\mu = (B_1, iB_0)$

スカラー積は座標変換で

$$A'_\mu B'_\mu = a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} A_\nu B_\lambda = \delta_{\nu\lambda} A_\nu B_\lambda = A_\nu B_\nu \quad (3.1.14)$$

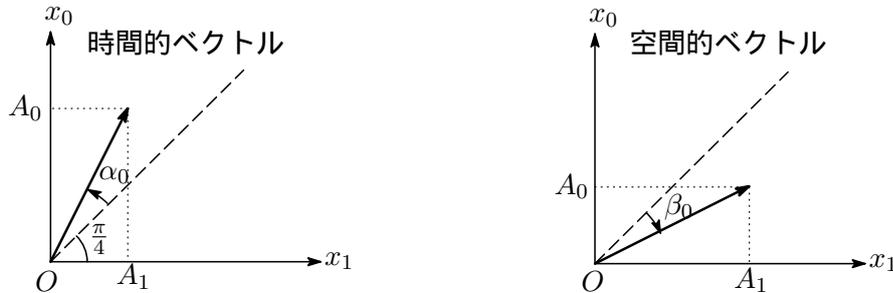
となり、変換不変量です。ベクトル A_μ と B_μ のスカラー積が 0 になる場合、ベクトル A_μ と B_μ は直交しているといえます³。

$$A_\mu B_\mu = A_1 B_1 - A_0 B_0 = 0 \quad (3.1.15)$$

ある慣性系でベクトルが直交していれば、どの慣性系においてもその関係は保持されます。添字 4 が虚数単位を持っているので、あるベクトルの自分自身とスカラー積は正、負、0 の場合が考えられ、それぞれのケースを次のように分類しています。

1. $A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 > 0$ のとき、 A_μ を空間的ベクトル
2. $A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 < 0$ のとき、 A_μ を時間的ベクトル
3. $A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 = 0$ のとき、 A_μ を光的ベクトル⁴

時間的ベクトルの中で、 x_0 軸方向に向いたベクトルを未来を向いた時間的ベクトルといい、それと逆向きのベクトルを過去を向いた時間的ベクトルといいます。なお、空間的、時間的、光的の意味については次の 4 次元時空の項で触れることにします。時間的、空間的ベクトルを実の成分を使って時空間図形として描くと下図になります。注意すべきは虚数成分を持つので、図形上のベクトルの長さ $\sqrt{A_1^2 + A_0^2}$ とベクトル A_μ のスカラー積は異なることに注意してください。



A_μ が時間的ベクトルの場合：ベクトル A_μ の長さ a を

$$a^2 = -A_\mu A_\mu = A_0^2 - A_1^2 \quad (3.1.16)$$

と定義します⁵。もちろん、この長さは図の矢印の長さとは一致しません。時間的ベクトルの矢印の長さはピタゴラスの定理より

$$\sqrt{A_1^2 + A_0^2} = \sqrt{A_0^2 - A_1^2} \sqrt{\frac{A_0^2 + A_1^2}{A_0^2 - A_1^2}} = a \sqrt{\frac{A_0^2 + A_1^2}{A_0^2 - A_1^2}} \quad (3.1.17)$$

となり、図の矢印の長さとベクトルの長さはの関係式が得られます。さらに、

$$\begin{aligned} A_0^2 - A_1^2 &= (A_1^2 + A_0^2) \sin^2(\alpha_0 + \pi/4) - A_1^2 = \frac{1}{2} \{A_0^2 - A_1^2 + (A_0^2 + A_1^2) \sin 2\alpha_0\} \\ \therefore A_0^2 - A_1^2 &= (A_0^2 + A_1^2) \sin 2\alpha_0 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

³ ベクトル A, B が必ずしも 90° の角をなしてなくてもよい。定義 (3.1.15) を満たせばよい。

⁴ null ベクトルともいう。

⁵ 時間的ベクトルなのでスカラー積は負となりますが、長さは正の物理量なので負号が付いています。

となるので，矢印の長さとはベクトルの長さの関係式 (3.1.16) は

$$\sqrt{A_1^2 + A_0^2} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\alpha_0}} \quad (3.1.19)$$

となります。時間的ベクトルの A_1, A_0 はそれぞれ

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\alpha_0}} \cos(\pi/4 + \alpha_0), \quad A_0 = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\alpha_0}} \sin(\pi/4 + \alpha_0) \quad (3.1.20)$$

となります。

2つの時間的ベクトル A_μ, B_μ のスカラー積：

$$\begin{aligned} A_\mu B_\mu &= A_1 B_1 - A_0 B_0 \\ &= \frac{ab}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_1}} \{ \cos(\pi/4 + \alpha_0) \cos(\pi/4 + \alpha_1) - \sin(\pi/4 + \alpha_0) \sin(\pi/4 + \alpha_1) \} \\ &= -ab \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_1}} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

A_μ が空間的ベクトルの場合： A_μ が空間的ベクトルの場合，図の矢印の長さとは空間的ベクトルの長さの関係は

$$a^2 = A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 \quad (3.1.22)$$

として

$$\sqrt{A_1^2 + A_0^2} = a \sqrt{\frac{A_0^2 + A_1^2}{A_1^2 - A_0^2}} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\beta_0}} \quad (3.1.23)$$

となります。空間的ベクトルの A_1, A_0 はそれぞれ

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\beta_0}} \cos(\pi/4 - \beta_0), \quad A_0 = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\beta_0}} \sin(\pi/4 - \beta_0) \quad (3.1.24)$$

となります。

時間的ベクトル A_μ と空間的ベクトル B_μ のスカラー積：

$$\begin{aligned} A_\mu B_\mu &= A_1 B_1 - A_0 B_0 \\ &= \frac{ab}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\beta_0}} \{ \cos(\pi/4 + \alpha_0) \cos(\pi/4 - \beta_0) - \sin(\pi/4 + \alpha_0) \sin(\pi/4 - \beta_0) \} \\ &= ab \frac{\sin(\beta_0 - \alpha_0)}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\beta_0}} \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

$\alpha_0 = \beta_0$ のとき，時間的ベクトル A_μ と空間的ベクトル B_μ は直交します。

未来を向いた時間的ベクトルの和は未来を向いた時間的ベクトルになる： 時間的ベクトル A_μ, B_μ のそれぞれ長さを a, b とします。ベクトル A_μ と B_μ の和である合成ベクトル D_μ も時間的ベクトルで，その長さを d とすると

$$d \geq a + b \quad (3.1.26)$$

を満たします。この関係は，通常の関係 $|A + B| \leq |A| + |B|$ と不等号が逆になっていますね！ (3.1.26) の証明を以下にしておきます。

【証明】 A_μ, B_μ は未来を向いた時間的ベクトルなので，そのスカラー積は。

$$A_\mu A_\mu = -a^2, \quad B_\mu B_\mu = -b^2 \quad (a, b > 0) \quad (3.1.27)$$

合成ベクトル D_μ も未来を向いた時間的ベクトルで，その長さを $d^2 = -D_\mu D_\mu$ で定義すると，

$$d^2 = -D_\mu D_\mu = -(A_\mu + B_\mu)(A_\mu + B_\mu) = a^2 + b^2 - 2A_\mu B_\mu \quad (3.1.28)$$

ところで (3.1.21) より

$$-A_\mu B_\mu = ab \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_1}} \geq ab \quad (3.1.29)$$

なので，

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2A_\mu B_\mu \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \quad (3.1.30)$$

となります。（証明終わり）

3.1.2 4次元時空 (ミンコフスキー空間)

空間座標を x_1, x_2, x_3 ，虚数の時間座標を $x_4 = ix_0 = ict$ と，これら 4 個の空間・時間座標を一緒にして x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) と書きます。この 4 次元の時空間をミンコフスキー空間と呼びます。ローレンツ変換は

$$x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 \quad (3.1.31)$$

を不変にする線形変換で，

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \begin{cases} \nu = \lambda : 1 \\ \nu \neq \lambda : 0 \end{cases} \quad (3.1.32)$$

で表わされます。(3.1.32) を行列形式で書くと

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (3.1.33)$$

となります⁶。(3.1.32) の係数同士の関係式は ν と λ がそれぞれ 1 から 4 までとるので見かけ上 16 個の条件式ですが， ν と λ について対称ということ を考慮すると，独立な条件式としては 10 個になります⁷。したがって，自由に決められる $a_{\mu\nu}$ の数は $16 - 10 = 6$ 個で，これは x_1, x_2, x_3 軸周りの回転角を指定する 3 個のパラメータと慣性系同士の相対速度成分 (V_1, V_2, V_3) 3 個の合計 6 個からなります。

スカラー，ベクトル，テンソル

4 次元時空におけるスカラーやベクトルも 2 次元時空の場合と同じように定義できます。ベクトルの場合，虚数の第 4 成分を含むので，通常の 3 次元ベクトルとは異なるという意味で，特に 4 元ベクトルと呼ばれます。また，ここではテンソルも登場します。

・スカラー：ある量 ϕ が (3.1.32) のローレンツ変換で

$$\phi' = \phi \quad (3.1.34)$$

のとき， ϕ をスカラーといいます。

⁶ a_{ij} の係数行列はいわゆる直交行列に相当します。

⁷ 転置対称なので，独立な条件の数は対角成分と非対角成分の半分の和となります。一般に n 次元では，条件の数は n 個の対角成分と $n^2 - n$ 個の非対角成分の半分の和となります。したがって自由に取れるパラメータの数は $(n^2 - n) - (n^2 - n)/2 = n(n - 1)/2$ 個。 $n = 4$ では 6 個となります。

・ベクトル：ローレンツ変換 (3.1.32) で

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu \quad (3.1.35)$$

と変換される量としてベクトルを定義します。この逆変換は

$$A_\mu = a_{\nu\mu} A'_\nu \quad (3.1.36)$$

となります⁸。これは、右辺に (3.1.35) を入れると

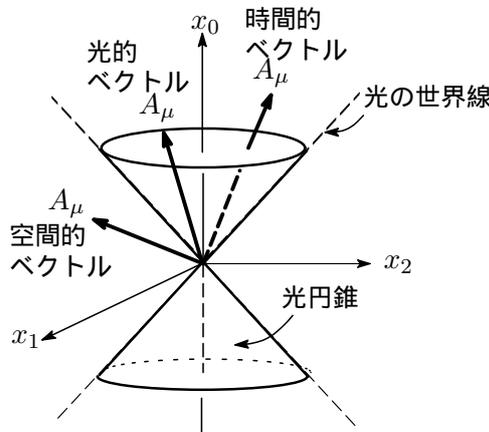
$$A_\mu = a_{\nu\mu} a_{\nu\lambda} A'_\lambda = \delta_{\mu\lambda} A'_\lambda = A'_\mu \quad (3.1.37)$$

となって (3.1.36) が成立します。スカラー積は

$$A_\mu B_\mu = a_{\nu\mu} A'_\nu a_{\lambda\mu} B'_\lambda = \delta_{\nu\lambda} A'_\nu B'_\lambda = A'_\nu B'_\nu \quad (3.1.38)$$

となってローレンツ変換不変量です。ベクトル A_μ の自分自身とのスカラー積は、2次元時空の場合と同様、次のように空間的ベクトル、時間的ベクトル、光的ベクトルと分類されます。

1. $A_\mu A_\mu = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_0^2 > 0$ のとき、 A_μ を空間的ベクトル
2. $A_\mu A_\mu = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_0^2 < 0$ のとき、 A_μ を時間的ベクトル
3. $A_\mu A_\mu = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_0^2 = 0$ のとき、 A_μ を光的ベクトルあるいはヌルベクトル



ここで、空間的、時間的、光的という言葉の意味を簡単に述べておくことにします。準備として、慣性系 S で発生した2つの任意の事象 P, Q の位置ベクトルを $x_P = (x_1, y_1, z_1, ict_1)$, $x_Q = (x_2, y_2, z_2, ict_2)$ とし、別の慣性系 S' における(ローレンツ変換された)位置ベクトルを $x'_P = (x'_1, y'_1, z'_1, ict'_1)$, $x'_Q = (x'_2, y'_2, z'_2, ict'_2)$ とします。次の2つのベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P \longrightarrow A_\mu = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ic(t_2 - t_1)) \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{x}'_Q - \mathbf{x}'_P \longrightarrow A'_\mu = (x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, z'_2 - z'_1, ic(t'_2 - t'_1)) \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

を定義し、 S, S' 系の事象の間隔を s_{12}, s'_{12} とすると

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= A_\mu A_\mu = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= -c^2 t_{12}^2 + \ell_{12}^2 \\ s'_{12}{}^2 &= A'_\mu A'_\mu = -c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= -c^2 t'_{12}{}^2 + \ell'_{12}{}^2 \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

⁸ 線形直交変換では $a_{\mu\nu}$ の逆行列は転置行列 $a_{\nu\mu}$ に等しい。

事象間隔はローレンツ不変なので

$$-c^2 t_{12}^2 + \ell_{12}^2 = -c^2 t'_{12}{}^2 + \ell'_{12}{}^2 \quad (3.1.41)$$

が成り立ちます。

1. 空間的：任意の2つの事象 P, Q が同一の時刻に生じるような慣性系 S' を見いだすことができるかを調べます。 S' で $t'_{12} = 0$ という条件を (3.1.41) に入れると

$$s_{12}^2 = -c^2 t_{12}^2 + \ell_{12}^2 = \ell_{12}^2 > 0 \quad (3.1.42)$$

したがって $A_\mu A_\mu > 0$ であれば S' が存在することになります。このとき、 S 系での2つの事象間の距離は

$$\ell_{12} > ct_{12} \quad (3.1.43)$$

となり、2つの事象間の距離 ℓ_{12} は時間 t_{12} の間に光が走る距離を超えたところにあります。すなわち、2つの事象 P, Q の間には因果関係が全くなく、空間的に離れた事象となります。このようなベクトル A_μ を空間的ベクトルと呼んでいます。

2. 時間的：P, Q 2つの事象が同一の場所に生じるような慣性系 S' を見いだすことができるかを調べます。 S' で $\ell'_{12} = 0$ という条件を (3.1.41) に入れる

$$s_{12}^2 = A_\mu A_\mu = -c^2 t_{12}^2 + \ell_{12}^2 = -c^2 t_{12}^2 < 0 \quad (3.1.44)$$

このとき、 S 系での2つの事象間の距離は

$$\ell_{12} < ct_{12} \quad (3.1.45)$$

となり、任意の2つの事象 P, Q の間に因果関係をとるもつことができます。このようなベクトル A_μ を時間的ベクトルと呼んでいます。

3. 光的：任意の2つの事象 P, Q は光の信号の世界線上の2点を表わします。

以上のことを図示すると全ページの図になり、時間的ベクトル、空間的ベクトルは光の世界線からなる光円錐を境界に区分けされます。(以上)

さて、話を元に戻して。。。微分演算子 $\partial/\partial x_\nu$ もベクトルとして振舞うことを次に示します。

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\nu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu}$$

ここで両辺に $a_{\rho\nu}$ を掛けて、 ν について和をとると

$$a_{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = a_{\rho\nu} a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \delta_{\rho\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x'_\rho}$$

ここで添字の ρ を μ に書き換えると

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (3.1.46)$$

これはベクトルの定義 (3.1.35) を満たしますね。

ベクトル $\partial/\partial x_\mu$ の自身とのスカラー積は

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square \quad (3.1.47)$$

となります。□ ≡ ∇² - $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ はダランベリアンと呼ばれ，ローレンツ変換不変量です。当然ですが，ベクトル $\partial/\partial x_\mu$ とベクトル A_μ のスカラー積は

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} (a_{\nu\mu} A'_\nu) = a_{\mu\nu} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\rho} \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\mu} = a_{\mu\nu} a_{\rho\mu} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\rho} \\ &= \delta_{\nu\rho} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\rho} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

でローレンツ不変量です。ベクトル A_μ と B_μ の直交条件はスカラー積が 0，つまり

$$A_\mu B_\mu = 0 \quad (3.1.49)$$

で定義します。

・テンソル：16 個の成分を持つある量 $T_{\mu\nu}$ がローレンツ変換 (3.1.32) で

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} T_{\lambda\rho} \quad (3.1.50)$$

と変換するなら， $T_{\lambda\rho}$ を 2 階テンソルといいます⁹。この逆変換は

$$T_{\mu\nu} = a_{\lambda\mu} a_{\rho\nu} T'_{\lambda\rho} \quad (3.1.51)$$

テンソルの成分が

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (3.1.52)$$

のとき対称テンソルといい，

$$T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu} \quad (3.1.53)$$

のとき反対称テンソルといいます¹⁰。2 階テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \quad (3.1.54)$$

と書けるので，前半を $S_{\mu\nu}$ ，後半を $A_{\mu\nu}$ とすると

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}), \quad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \quad (3.1.55)$$

となり，2 階テンソルは対称テンソル $S_{\mu\nu}$ と反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ の和に分解することができます。 $S_{\mu\nu}$ ， $A_{\mu\nu}$ とそれぞれ 16 個の成分を持ちますが，独立な成分の数は 印をつけたように 10 個と 6 個になります。

$$S_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \circ S_{11} & \circ S_{12} & \circ S_{13} & \circ S_{14} \\ S_{12} & \circ S_{22} & \circ S_{23} & \circ S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & \circ S_{33} & \circ A_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & \circ S_{44} \end{pmatrix}, \quad A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \circ A_{12} & \circ A_{13} & \circ A_{14} \\ -A_{12} & 0 & \circ A_{23} & \circ A_{24} \\ -A_{31} & -A_{32} & 0 & \circ A_{34} \\ -A_{14} & -A_{24} & -A_{34} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.56)$$

2 つのベクトルの各成分の積 $A_\mu B_\nu$ は

$$\begin{aligned} A'_\mu &= a_{\mu\lambda} A_\lambda, \quad B'_\nu = a_{\nu\rho} B_\rho, \quad A'_\mu B'_\nu = a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} A_\lambda B_\rho \\ \therefore T'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} T_{\lambda\rho}, \quad \text{ただし } T'_{\mu\nu} = A'_\mu B'_\nu, \quad T_{\lambda\rho} = A_\lambda B_\rho \end{aligned}$$

⁹ μ, ν 2 個の添字を持つから 2 階テンソルと呼ばれ，成分数は $4^2 = 16$ 個。 n 個の添字をもつテンソルは n 階テンソルといわれ，成分数は 4^n 個になります。ちなみにベクトルは添字が 1 個なので 1 階テンソルとも呼ばれ，スカラーは添字が 0 個なので 0 階テンソルともいえます。

¹⁰ 反対称の意味は添字を入れ替えると符号が反転することから。

となって，テンソルになります。テンソル $T_{\mu\nu}$ とベクトル A_μ の積 $T_{\mu\nu}A_\mu$ を

$$B_\nu = T_{\mu\nu}A_\mu \quad (3.1.57)$$

とにおいて，ローレンツ変換すると

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}T_{\lambda\rho}, & A'_\mu &= a_{\mu\xi}A_\xi \\ B'_\nu &= T'_{\mu\nu}A'_\mu = a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}T_{\lambda\rho}a_{\mu\xi}A_\xi = a_{\nu\rho}\delta_{\lambda\xi}T_{\lambda\rho}A_\xi = a_{\nu\rho}(T_{\lambda\rho}A_\lambda) \\ &= a_{\nu\rho}B_\rho \end{aligned}$$

したがって，テンソルとベクトルの積はベクトルとなります。

次に，テンソルの微分を

$$A_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \quad (3.1.58)$$

とにおいてローレンツ変換すると

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x'_\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x'_\nu} = a_{\mu\nu}a_{\nu\rho} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\tau} a_{\tau\nu} \\ &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}a_{\tau\nu} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\tau} = a_{\mu\lambda}\delta_{\tau\rho} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\tau} = a_{\mu\lambda} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\rho} \\ &= a_{\mu\lambda}A_\lambda \end{aligned} \quad (3.1.59)$$

したがって，テンソルの微分はベクトルになります。

テンソルの縮約

テンソルの縮約とは，テンソルの成分の2つの添字 μ と ν を等しいとにおいて，それらについて1から4まで加える操作のことです。縮約によってテンソルの階数は2階低くなります。

・2階テンソル $T_{\mu\nu}$ の縮約： スカラーとなります。

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{34} \\ T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} \end{pmatrix} \quad (3.1.60)$$

$$\longrightarrow (\text{縮約}) : T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44} = \text{tr } \mathbf{T}$$

テンソル $T_{\mu\nu}$ の縮約は行列 $T_{\mu\nu}$ の対角和で，これをトレースといいます。

・ベクトルの各成分の積 $A_\mu B_\nu$ の縮約： スカラーとなります。

2つのベクトルの別々の成分の積 $A_\mu B_\nu$ はテンソルになりました。これを縮約すると

$$A_\mu B_\nu = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 & A_1 B_4 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 & A_2 B_4 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 & A_3 B_4 \\ A_4 B_1 & A_4 B_2 & A_4 B_3 & A_4 B_4 \end{pmatrix} \quad (3.1.61)$$

$$\longrightarrow (\text{縮約}) : A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 = A_\mu B_\mu$$

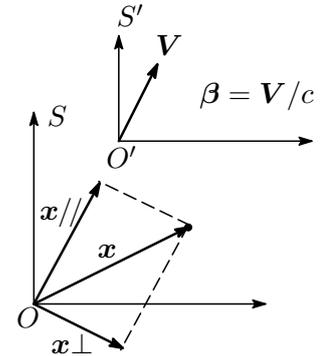
となり，スカラーになります。

3.1.3 一般のローレンツ変換

いままで S 系に対して x 軸方向に等速 V で移動する S' 系へのローレンツ変換を考えてきましたが、これをもっと一般化して、勝手な方向へ速度 $V = (V_1, V_2, V_3)$ へ走る S' 系へのローレンツ変換を考えます。これを V 方向へのローレンツブーストと呼んでいます。

位置ベクトル x を速度 V と平行な部分 x_{\parallel} とそれに垂直な部分 x_{\perp} に分解して次のように書きます。

$$\begin{aligned} x_{\parallel} &= \left(\frac{x \cdot \beta}{|\beta|} \right) \frac{\beta}{|\beta|} = \frac{x \cdot \beta}{\beta^2} \beta \\ x_{\perp} &= x - x_{\parallel} \end{aligned} \quad (3.1.62)$$



ローレンツ変換を受けるのは x_{\parallel} だけなので

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'_{\parallel} = \frac{x_{\parallel} - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_{\perp} = x_{\perp} \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta \cdot x_{\parallel}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (3.1.63)$$

と表わせます¹¹。 $x' = x'_{\parallel} + x'_{\perp}$ なので、(3.1.62) を代入して

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x_{\parallel} - \beta x_0) + x_{\perp} = \gamma \left(\frac{x \cdot \beta}{\beta^2} \beta + \frac{x}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \frac{x \cdot \beta}{\beta^2} \beta \right) - \gamma \beta x_0 \\ &= x + \frac{1}{\beta^2} (\gamma - 1) (x \cdot \beta) \beta - \gamma \beta x_0 \end{aligned} \quad (3.1.64)$$

が得られます。 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ なので

$$\begin{aligned} (x \cdot \beta) \beta &= (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \therefore \{(x \cdot \beta) \beta\}_1 &= (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) \beta_1 = (x_j \beta_j) \beta_1 \\ \{(x \cdot \beta) \beta\}_2 &= (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) \beta_2 = (x_j \beta_j) \beta_2 \\ \{(x \cdot \beta) \beta\}_3 &= (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) \beta_3 = (x_j \beta_j) \beta_3 \end{aligned} \quad (3.1.65)$$

と表わせます。したがって、(3.1.64) の x' を成分ごとに書くと

$$x'_i = \left[\delta_{ij} + \frac{1}{\beta^2} (\gamma - 1) \beta_i \beta_j \right] x_j - \gamma \beta_i x_0 \quad (3.1.66)$$

となり、また

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta \cdot x) = \gamma(x_0 - \beta_i x_i) \quad (3.1.67)$$

となります。これが任意の方向へのローレンツ変換となります。この逆変換は

$$\begin{aligned} x_i &= \left[\delta_{ij} + \frac{1}{\beta^2} (\gamma - 1) \beta_i \beta_j \right] x'_j + \gamma \beta_i x'_0 \\ x_0 &= \gamma(x'_0 + \beta_i x'_i) \end{aligned} \quad (3.1.68)$$

(3.1.66) と (3.1.67) をまとめて行列表示で書くと

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta_1 & -\gamma \beta_2 & -\gamma \beta_3 \\ -\gamma \beta_1 & 1 + (\gamma - 1) \beta_1^2 / \beta^2 & (\gamma - 1) \beta_1 \beta_2 / \beta^2 & (\gamma - 1) \beta_1 \beta_3 / \beta^2 \\ -\gamma \beta_2 & (\gamma - 1) \beta_1 \beta_2 / \beta^2 & 1 + (\gamma - 1) \beta_2^2 / \beta^2 & (\gamma - 1) \beta_2 \beta_3 / \beta^2 \\ -\gamma \beta_3 & (\gamma - 1) \beta_1 \beta_3 / \beta^2 & (\gamma - 1) \beta_2 \beta_3 / \beta^2 & 1 + (\gamma - 1) \beta_3^2 / \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.1.69)$$

$\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$ とおけば、いままでのローレンツ変換となります。

¹¹ 矢印の左は従来のローレンツ変換 (参考まで)。

一般の速度合成則

一般のローレンツ変換による速度の合成則は次のようになります。速度 v を V と平行な方向 v_{\parallel} と垂直な方向 v_{\perp} に分解します。

$$v_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}, \quad v_{\perp} = \mathbf{v} - v_{\parallel} \quad (3.1.70)$$

そして、

$$\begin{aligned} v'_{\parallel} &= \frac{v_{\parallel} - V}{1 - v_{\parallel} \cdot V/c^2} = \frac{v_{\parallel} - V}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2} \\ v'_{\perp} &= \frac{v_{\perp}}{\gamma(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)} \end{aligned} \quad (3.1.71)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\gamma(\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{V}) + \mathbf{v} - v_{\parallel}}{\gamma(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)} \\ &= \frac{(\gamma - 1)\mathbf{V}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})/V^2 - \gamma\mathbf{V} + \mathbf{v}}{\gamma(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)} \end{aligned} \quad (3.1.72)$$

となります。速度の大きさは

$$\begin{aligned} v'^2 &= v'^2_{\parallel} + v'^2_{\perp} = \mathbf{v}'_{\parallel} \cdot \mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{(\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{V})^2 + v_{\perp}^2(1 - V^2/c^2)}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)^2} \\ &= \frac{v^2 - 2v_{\parallel}V + V^2 - v_{\perp}^2V^2/c^2}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)^2} \\ &= \frac{v^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + V^2 - [v^2V^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})^2]/c^2}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)^2} \\ &= \frac{v^2 + V^2 - v^2V^2/c^2 - c^2 + c^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})^2/c^2}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)^2} \\ &= \frac{-(c^2 - v^2)(1 - V^2/c^2) + c^2(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)^2}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)^2} \\ &= c^2 - \frac{(c^2 - v^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2)^2} \end{aligned} \quad (3.1.73)$$

$v < c, V < c$ なので右辺第2項は常に正となり、 $v' < c$ となります。

以上で数学的な準備が終わったので、いよいよ相対論的力学に進んでいくことにします。

3.2 相対論的力学

3.2.1 固有時

ニュートンの運動方程式から導かれる運動粒子の軌跡は、絶対時間 t (スカラー量) をパラメータとして $x = x(t)$ で表わすことができました。相対論の世界においては時間 t はローレンツ不変なスカラー量ではないので、これをパラメータにとるわけにはいきません。しかし、 t の代わりに固有時 τ をパラメータにとれば

$$x_1 = x_1(\tau), \quad x_2 = x_2(\tau), \quad x_3 = x_3(\tau), \quad x_4 = x_4(\tau), \quad (3.2.1)$$

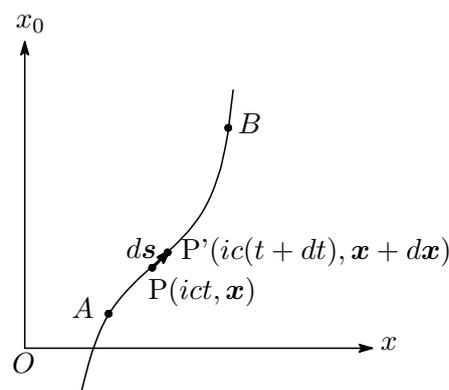
と表わすことができます。粒子の運動は4次元時空の世界線で表わされ、世界線上の近接する2点 P, P' に注目します。

PP' を結ぶベクトルを ds とすると、 ds は曲線 (世界線) の線素ですね。ベクトル ds は時間的ベクトルになるので

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= -dx_\mu dx_\mu = c^2(dt)^2 - dx_i dx_i \\ &= c^2(dt)^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

とおけます。慣性系 S での粒子の速度は $v_i = dx_i/dt$ なので、これを上式に入れて整理すると

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2.3)$$



が得られます¹²。いま、粒子と一緒に動く慣性系 S' を考えると、この系では $v = 0$ で ds はローレンツ不変なので

$$ds = c dt' \quad (3.2.4)$$

ところで dt' は粒子の固有時となるので、これを $d\tau$ と書き換えると

$$ds = c d\tau \longrightarrow d\tau = \frac{ds}{c} \quad (3.2.5)$$

を得ます。一般に曲線は線素をパラメータとして記述できるので、固有時 τ をパラメータとして (3.2.1) の記述が可能となります。(3.2.5) を (3.2.3) に入れると

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma_p \quad (3.2.6)$$

を得ます。

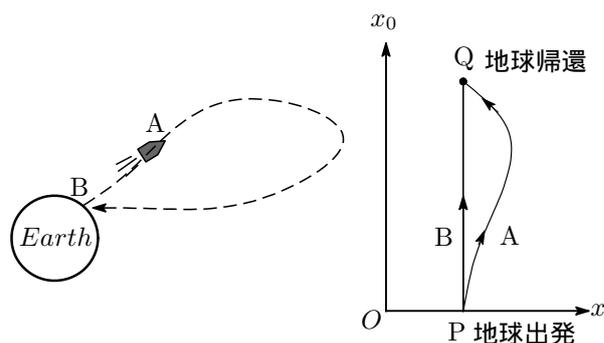
【補注】 ミューオンの寿命：宇宙線として地表に降り注ぐミューオンは $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ 秒で崩壊するといわれています。そうすると、仮にミューオンが光速で走っていたとしても、寿命が尽きるまでに高々 600m 程度しか走ることができず、とても大気圏を突破して地表にまで降ってこれないはずですが。。。？実は、ミューオンの寿命はミューオンに固定した時計が示す寿命で、地表の観測者から見ると寿命は

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (3.2.7)$$

で与えられ、その結果、光速の 99.99% で走る場合には寿命が 100 倍のびるので、10,000 メートルの大気圏を突き抜けて地表まで到達することになります。

双子のパラドックス

双子の兄弟 A, B (同じ年) がいて、弟 (B) は地球に残り、兄 (A) は光速に近いロケットで宇宙旅行して地球に戻ってきて、弟と再会しました。この時、弟は、「兄は常に動いていたのでその時計は遅れ、地球に帰還したときは、私より年は若くなっている」と主張しました。一方、兄は「弟の方こそ常に動いていたのだからその時計は遅れ、弟の方が私より年は若い」と主張。この一見相矛盾する 2 つの主張



¹² $v = c$ とおくと右辺は 0 となるので、光子には以下の議論は適用できません。

はどうなるのでしょうか？

地球上にいる弟 B から見た 2 人の世界線は右図のようになります。B は地球に止まっていたので世界線は x_0 軸に平行な直線，一方，A はロケットで加速度運動していたので，世界線は曲線で表わされます。兄が地球を出発して再び地球に戻ってくるまでの時間を求めましょう。ここで留意すべきは，兄の加速度運動は，B のいる地球の慣性系から観測した記述になります。兄のロケットと共に動く座標系は加速度運動をしているので，慣性系ではありません。したがって，B からみた場合は特殊相対性理論では取り扱えません。つまり，A と B は非対称な関係ですね。

さて，時計が示す固有時の経過は (3.2.5) の積分で与えられます。B の場合，(3.2.5) で $v = 0$ として，

$$\Delta\tau_B = \int_P^Q d\tau_B = \int_P^Q dt = t_Q - t_P \quad (3.2.8)$$

一方，A の場合，

$$\Delta\tau_A = \int_P^Q dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} v(t)^2} < \int_P^Q dt = \Delta\tau_B \quad (3.2.9)$$

したがって，兄が地球に帰還したとき，弟は兄より年を喰っているということになります。つまり，弟の持っている時計を基準にしたとき，兄の持っている時計は弟の時計よりゆっくり進んでいたということです。

3.2.2 4 元 - 速度・加速度・運動量

4 元速度ベクトル

粒子の運動は固有時 τ をパラメータとして $x_1(\tau)$, $x_2 = x_2(\tau)$, $x_3 = x_3(\tau)$, $x_4 = x_4(\tau)$, として表わせることが分かりました。各成分を (2.2.15) のローレンツ変換すると

$$\left. \begin{aligned} x'_1(\tau) &= \gamma\{x_1(\tau) + i\beta x_4(\tau)\} \\ x'_2(\tau) &= x_2(\tau) \\ x'_3(\tau) &= x_3(\tau) \\ x'_4(\tau) &= \gamma\{x_4(\tau) - i\beta x_1(\tau)\} \end{aligned} \right\} \longrightarrow x'_\mu(\tau) = a_{\mu\nu} x_\nu(\tau) \quad (3.2.10)$$

τ で微分すると

$$\frac{dx'_\mu(\tau)}{d\tau} = a_{\mu\nu} \frac{dx_\nu(\tau)}{d\tau} \quad (3.2.11)$$

$d\tau$ はスカラーで dx_ν は 4 元ベクトルなので， $dx_\nu(\tau)/d\tau$ は 4 元ベクトルとして振舞います。そこでこれを 4 元速度ベクトル u_μ として定義します。

$$u_\mu(\tau) = \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} \quad (3.2.12)$$

$\mu = 1, 2, 3$ を空間成分， $\mu = 4$ を時間成分といいます。4 元速度ベクトル $u_\mu(u_1, u_2, u_3, u_4)$ と 3 次元速度ベクトル $v_i(v_1, v_2, v_3)$ の関係は¹³

$$\begin{aligned} \text{空間成分：} \quad u_i(\tau) &= \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma_p v_i \\ \text{時間成分：} \quad u_4 &= \frac{dx_4(\tau)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = i\gamma_p c \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\therefore u_\mu = (\gamma_p \mathbf{v}, i\gamma_p c)$$

¹³ 添字の 4 は虚数単位を持つことに留意してください。 $x_4 = ix_0, u_4 = iu_0$

となり, $v \ll c$ の場合, 4元速度ベクトルの空間成分はニュートン力学の速度 v_i と一致します。
4元速度ベクトルのスカラー積は

$$u_\mu u_\mu = u_i u_i - u_0 u_0 = -c^2 < 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.14)$$

となるので, 4元速度ベクトルは時間的でかつ時間成分 $u_4 (\equiv iu_0)$ は空間成分 u_i はと独立ではありません。4元速度 u の大きさは常に

$$|u| = \sqrt{u_\mu u_\mu} = c \quad (3.2.15)$$

で光速に等しく, また, 粒子が粒子が静止している場合の4元速度は

$$u_\mu = (0, 0, 0, i\gamma_p c) \quad (3.2.16)$$

となります。 u_μ のローレンツ変換は (3.2.10) より

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_1 = \frac{dx'_1}{d\tau} = \gamma(u_1 + i\beta u_4) \\ u'_2 = \frac{dx'_2}{d\tau} = \frac{dx_2}{d\tau} = u_2 \\ u'_3 = \frac{dx'_3}{d\tau} = \frac{dx_3}{d\tau} = u_3 \\ u'_4 = \frac{dx'_4}{d\tau} = \gamma(u_4 - i\beta u_1) \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \gamma(u'_1 - i\beta u_4) \\ u_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{dx'_2}{d\tau} = u'_2 \\ u_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{dx'_3}{d\tau} = u'_3 \\ u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \gamma(u'_4 + i\beta u_1) \end{array} \right. \quad (3.2.17)$$

行列形式で書くと

$$u'_\mu = a_{\mu\nu} u_\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

4元加速度

4元加速度は4元速度を固有時で微分した量として定義されます。

$$a_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} \quad (3.2.19)$$

(3.2.14) を τ で微分すると

$$u_\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = 0 \quad (3.2.20)$$

となるので, 4元速度と4元加速度は常に直交します。

4元運動量

4元運動量を

$$p_\mu \equiv m_0 u_\mu \quad (3.2.21)$$

で定義します。 m_0 は固有質量とか静止質量と呼ばれます。空間成分と時間成分は (3.2.13) より

$$\begin{aligned} \text{空間成分} : p_i &= \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma_p m_0 v_i \\ \text{時間成分} : p_4 &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = i\gamma_p m_0 c \\ \therefore p_\mu &= (\gamma_p m_0 \mathbf{v}, i\gamma_p m_0 c) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$v \ll c$ の場合, 4元運動量の空間成分は $p_i = m_0 v_i$ となってニュートン力学での運動量に一致します。時間成分は何を意味しているのでしょうか。(3.2.20)の両辺に m_0 を掛けると

$$0 = u_\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dp_i}{d\tau} - \frac{dx_0}{d\tau} \frac{dp_0}{d\tau} = \gamma_p^2 \left(v_i \frac{dp_i}{dt} - c \frac{dp_0}{dt} \right) \quad (3.2.23)$$

を得ます。右辺の $v_i \cdot dp_i/dt$ はニュートン力学では仕事(エネルギー)の時間変化を表わしている¹⁴ので, 粒子のエネルギー E とし

$$v_i \frac{dp_i}{dt} = \frac{dE}{dt} \quad (3.2.24)$$

とにおいて(3.2.23)を整理すると

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{dp_0}{dt} \quad (3.2.25)$$

これを t で積分して

$$E = cp_0 = \gamma_p m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \therefore p_0 = \frac{E}{c} \quad (3.2.26)$$

を得ます(積分定数は E に取り込みそれを改めて E とすればよい)。4元運動量の時間成分は粒子のエネルギーを c で割ったものであることが分かります。したがって, $\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3)$ を4元運動量の空間成分とすると, (3.2.22)は次のようにも書けます。

$$p_\mu = (\mathbf{p}, iE/c) \quad (3.2.27)$$

いま,

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma_p m_0 \quad (3.2.28)$$

とおくと, (3.2.22),(3.2.26)は

$$p_i = \gamma_p m_0 v_i = m(v) v_i \quad (3.2.29)$$

$$p_0 = \gamma_p m_0 c = m(v) c \quad (3.2.30)$$

$$E = \gamma_p m_0 c^2 = m(v) c^2 \quad (3.2.31)$$

と書けます。(3.2.31)はエネルギーと質量の等価性を示す有名な関係式ですね。 $m(v)$ は相対論的質量と呼ばれます¹⁵。 p_μ のスカラー積は(3.2.14)より

$$p_\mu p_\mu = m_0^2 u_\mu u_\mu = \mathbf{p}^2 - p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{1}{c^2} E^2 = -m_0^2 c^2 \quad (3.2.32)$$

これからよくお目にかかる式の

$$E = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} \quad (3.2.33)$$

を得ます。 $\mathbf{p}^2 \ll m_0^2 c^2$ の場合

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_0^2 c^2} \right)^{1/2} \doteq m_0 c^2 + \frac{1}{2m_0} \mathbf{p}^2 \quad (3.2.34)$$

と近似でき, 右辺第2項にニュートン力学の運動エネルギーがでてきます。特に, 光子のエネルギーは(3.2.33)で $m_0 = 0$ とにおいて

$$E = c |\mathbf{p}| \quad (3.2.35)$$

¹⁴ 仕事率: $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$

¹⁵ “相対論的質量は誤解をまねきやすい概念なので使わない方が望ましく、(一般相対性理論も含めて)相対論では、物体の質量は座標系によらない不変量と考えればよい(Wiki)”とされています。。。

速度，運動量とエネルギーの関係式は，(3.2.29) と (3.2.31) より

$$v_i = c^2 \frac{p_i}{E} \quad (3.2.36)$$

を得ます。また，(3.2.33) を p_i について微分すると

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = \frac{cp_i}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}} = c^2 \frac{p_i}{E^2} \quad (3.2.37)$$

となるので，(3.2.36) は

$$v_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} \quad (3.2.38)$$

とも書けます。4元運動量のローレンツ変換は

$$\begin{cases} p'_1 = \gamma(p_1 + i\beta p_4) \\ p'_2 = p_2 \\ p'_3 = p_3 \\ p'_4 = \gamma(p_4 - i\beta p_1) \end{cases} \quad (3.2.39)$$

$$p'_\mu = a_{\mu\nu} p_\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \quad (3.2.40)$$

3.2.3 相対論的運動方程式

ニュートンの運動方程式は運動量を p ，力を F とするとき

$$\text{ニュートンの運動方程式：} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.2.41)$$

で表わされました。4元運動量の空間成分 p_i が (3.2.41) の形で運動方程式として成立すると仮定すれば， $f(f_1, f_2, f_3)$ をニュートン力学的な力として

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i \quad \longrightarrow \quad \frac{dp_i}{d\tau} = \gamma_p f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.42)$$

とおけます。時間成分の方は (3.2.24), (3.2.25) より

$$v_i \frac{dp_i}{d\tau} = v_i \frac{dp_i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c \frac{dp_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c \frac{dp_0}{d\tau} = \gamma_p v_i f_i \quad (3.2.43)$$

となるので

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{\gamma_p}{c} v_i f_i \quad \longrightarrow \quad \frac{dp_4}{d\tau} = \frac{i}{c} \gamma_p v_i f_i \quad (3.2.44)$$

が得られます。したがって4元力 F_μ を

$$F_\mu = \left(\gamma_p \mathbf{f}, \frac{i}{c} \gamma_p \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \right) \quad (3.2.45)$$

と定義すると相対論的運動方程式として

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu \quad (3.2.46)$$

を得ます。ちなみ 4 元力のローレンツ変換は

$$\begin{aligned}
 F'_\mu &= \frac{dp'_\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_1/d\tau \\ dp_2/d\tau \\ dp_3/d\tau \\ dp_4/d\tau \end{pmatrix} \\
 \therefore F'_\mu &= a_{\mu\nu} F_\nu
 \end{aligned} \tag{3.2.47}$$

【補注】: くだいようですが, (3.2.46) がローレンツ変換で不変であることを確かめておきましょう。ローレンツ変換

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \tag{3.2.48}$$

を固有時 τ で微分すると

$$\frac{dx'_\mu}{d\tau} = a_{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} \longrightarrow u'_\mu = a_{\mu\nu} u_\nu \tag{3.2.49}$$

両辺に m_0 を掛けてもう一度微分すると

$$\frac{dp'_\mu}{d\tau} = a_{\mu\nu} F_\nu \tag{3.2.50}$$

一方, 4 元力のローレンツ変換は

$$F'_\mu = a_{\mu\nu} F_\nu \tag{3.2.51}$$

なので, (3.2.50) は

$$\frac{dp'_\mu}{d\tau} = F'_\mu \tag{3.2.52}$$

となり, S 系での運動方程式と同じ形になります。ローレンツ変換に対して方程式の形が変わらないことをローレンツ共変性といいます。

f はニュートン力学の力に相当する量で, ローレンツ変換で次のように変換されます (ニュートン力学では力は慣性系同士の変換で変わらなかった。下式で $\beta \rightarrow 0$ とすれば分かる。)

$$f'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\gamma(dp_x - \beta p_0)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c} dx\right)} = \frac{\frac{dp_x}{dt} - \beta \frac{dE}{dt} \frac{1}{c}}{1 - \frac{1}{c} \beta \frac{dx}{dt}} = \frac{f_x - \frac{\beta}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{1 - \beta \frac{v_x}{c}} \tag{3.2.53}$$

分子の $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ は単位時間当たりの仕事を表わす仕事率で, 力に時間の要素が絡んできます。つまり, 相対性理論では空間と時間が絡み合っていると同様の状況が 4 元力 F_μ にもあるということです。ちなみに, f'_y, f'_z も同様にして導くことができます

$$f'_y = \frac{f_y}{\gamma\left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right)}, \quad f'_z = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right)} \tag{3.2.54}$$

加速度と力の方向は一致しない

ニュートンの運動方程式では加速度の方向と力の方向は一致しました。一方, 相対論的運動方程式からは加速度と力の方向が一致しないことが導かれます。相対論的運動方程式 (3.2.46) を空

間成分と時間成分に分けて書くと

$$\text{空間成分: } \frac{dp_i}{d\tau} = F_i \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (3.2.55)$$

$$\text{時間成分: } \frac{dp_4}{d\tau} = F_4 \quad \longrightarrow \quad c^2 \frac{dm}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \quad (\because p_4 = iE/c, E = mc^2) \quad (3.2.56)$$

(3.2.55) より

$$\frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \quad (3.2.57)$$

これに (3.2.56) をいれて整理すると

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}}{c^2} \mathbf{v} \quad (3.2.58)$$

となり、加速度と力の方向は一致しないことが分かります。 $v \ll c$ のときは $m \simeq m_0$ で、ニュートンの運動方程式が近似的に成立します。右辺第 2 項は \mathbf{v} と \mathbf{f} の内積を含んでいるので、次の特別な場合が考えられます。

1. $\mathbf{v} \perp \mathbf{f}$ の場合: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = 0$ となるので、形式的にニュートンの運動方程式が成立する。

$$\gamma_p m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \quad (3.2.59)$$

m_0 が相対論的質量 $\gamma_p m_0$ になっている点がニュートンの運動方程式と異なります。

2. $\mathbf{v} // \mathbf{f}$ の場合: $\mathbf{v} = v(\mathbf{f}/f)$ とおくと

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{v\mathbf{f}}{c^2} \frac{\mathbf{f}}{f} = \frac{\mathbf{f}}{\gamma_p^2}, \quad \therefore \gamma_p^3 m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \quad (3.2.60)$$

形式的にニュートンの運動方程式とが成立しますが、質量は m_0 ではなく $\gamma_p^3 m_0$ となります。

粒子の運動方向に対して同じ方向あるいは垂直方向に力を加えると粒子の質量はそれぞれ $\gamma_p m_0$, $\gamma_p^3 m_0$ と増加するように見えます。古い文献には $\gamma_p m_0$ を横質量, $\gamma_p^3 m_0$ を縦質量と名づけられていますが、この名称はいまではほとんど使われないようです。

3.2.4 解析力学からのアプローチ

解析力学からのアプローチは最小作用の原理(変分原理)¹⁶からの出発で、相対論の場合、ローレンツ変換に対して不変な作用積分を見つけ、その作用積分の極値を与える方程式を解いて粒子の運動を決定していきます。この方程式をオイラー・ラグランジュの方程式といいます。

自由粒子

簡単のために相互作用のない自由粒子を取り上げます。自由粒子に対する作用を、比例係数を α として

$$I = -\alpha \int_a^b ds = -\alpha c \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_0}^{t_1} L_0 dt \quad (3.2.61)$$

とおきます。 ds はローレンツ不変な世界線の線素です¹⁷。 L_0 は自由粒子のラグランジアンと呼ばれるもので

$$L_0 = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2.62)$$

¹⁶ 「物体の運動は、作用積分と呼ばれる量を最小にするような軌道にそって実現される。」というものです。

¹⁷ 作用積分の前にマイナスの符号が付けているのは作用積分が極小値をとることができるようにするためで、詳しいことはランダウ・リフシツ「場の古典論」等を参照ください。

次に比例係数 α を求めなければなりません。古典力学で自由粒子のラグランジアンは運動エネルギーに等しかった ($L = T = \frac{1}{2}mv^2$) ことを思い出しましょう。そこで、 $v \ll c$ として右辺を展開して2項までとると

$$L_0 \doteq -\alpha c + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2 \quad (3.2.63)$$

となりますが、右辺第1項は単なる定数で変分を取るときに消えてしまいます。そこで L_0 から省いておきます。第2項は運動エネルギーの項で、この項は $m_0 v^2/2$ という式でなければなりません。ということで比例係数は

$$\alpha = m_0 c \quad (3.2.64)$$

と求まり、自由粒子のラグランジアン L_0 は

$$L_0 = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2.65)$$

となります。さて、作用積分の変分をとり、それを0として I の最小値を与える方程式を求めていきます。

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_0}^{t_1} L_0 dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \{L_0(x_i + \delta x_i) - L_0(\delta x_i)\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \frac{d\delta x_i}{dt} dt \\ &= \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = 0 \end{aligned} \quad (3.2.66)$$

δx_i は $t = t_1, t_2$ で0とおきました。任意の無限少 δx_i に対して δI が0になるのは

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.67)$$

のときで、これが求める方程式となります。これをオイラー・ラグランジュの方程式といいます。自由粒子の場合は次式となります。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = 0 \quad (3.2.68)$$

運動量は $p_i = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i}$ で与えられるので

$$p_i = \frac{\partial L_0}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma_p m_0 v_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.69)$$

これは (3.2.22) と一致します。ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_0 &= p_i v_i - L_0 = \gamma_p m_0 v_i^2 + \frac{m_0 c^2}{\gamma_p} = \gamma_p m_0 c^2 = E \\ &= c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

で粒子のエネルギーに等しい。ついでに正準運動方程式は

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_i} = c^2 \frac{p_i}{E} = v_i \quad (3.2.71)$$

で、これは (3.2.37) に一致します。

ポテンシャル力

粒子に外力が作用し，力 f がポテンシャル V から導かれるケースを考えます。ラグランジアンは

$$L = L_0 - V = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(x_1, x_2, x_3) \quad (3.2.72)$$

で，オイラー・ラグランジュの方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.73)$$

いま x 成分に注目して

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{m_0v_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -f_1 \quad (3.2.74)$$

したがって運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0v_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = f_1 \longrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{f} \quad (3.2.75)$$

運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m_0v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma_p m_0v_i = mv_i \quad (3.2.76)$$

第4章 相対論的電磁気学

4.1 マクスウェル方程式のローレンツ変換

電場を E , 磁場を B とすると , マクスウェルの方程式は慣性系 S において

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (4.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (4.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (4.1.4)$$

ρ は電荷密度 , \mathbf{j} は電流密度です。 μ_0 は透磁率で真空の誘電率を ε_0 とすると $\mu_0 = (\varepsilon_0 c^2)^{-1}$ の関係にあります。 マクスウェル方程式はローレンツ変換で不変であるということを仮定して以下の議論を進めていくことにします。 慣性系 S' におけるマクスウェルの方程式は

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}', t') = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}', t') \quad (4.1.5)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}', t') = 0 \quad (4.1.6)$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{x}', t') = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \quad (4.1.7)$$

$$\nabla' \times \mathbf{B}(\mathbf{x}', t') = \mu_0 \mathbf{j}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \quad (4.1.8)$$

ローレンツ変換とその逆変換は

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right), & x' &= \gamma (x - Vt), & y' &= y, & z' &= z \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right), & x &= \gamma (x' + Vt'), & y &= y', & z &= z' \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

これから S と S' 系における微分演算子の関係式として次式が得られます。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right), & \frac{\partial}{\partial x'} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

4.1.1 電場と磁場のローレンツ変換

(4.1.3) の x 成分は

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = -\frac{\partial}{\partial t} B_x \quad (4.1.12)$$

微分演算子の関係式を使って書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial y'} E_z - \frac{\partial}{\partial z'} E_y = -\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right) B_x \quad (4.1.13)$$

(4.1.2) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right) B_x + \frac{\partial}{\partial y'} B_y + \frac{\partial}{\partial z'} B_z = 0 \\ \therefore \gamma \frac{\partial}{\partial x'} B_x &= \frac{\gamma \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} B_x - \frac{\partial}{\partial y'} B_y - \frac{\partial}{\partial z'} B_z \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

これを (4.1.13) に入れて整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y'} (E_z + V B_y) - \frac{\partial}{\partial z'} (E_y - V B_z) &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t'} B_x \\ \therefore \frac{\partial}{\partial y'} (\gamma (E_z + V B_y)) - \frac{\partial}{\partial z'} (\gamma (E_y - V B_z)) &= -\frac{\partial}{\partial t'} B_x \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

一方, (4.1.7) より

$$\frac{\partial}{\partial y'} E'_z - \frac{\partial}{\partial z'} E'_y = -\frac{\partial}{\partial t'} B'_x \quad (4.1.16)$$

(4.1.15) と (4.1.16) は同じ方程式であるので

$$E'_z = \gamma (E_z + V B_y), \quad E'_y = \gamma (E_y - V B_z), \quad B'_x = B_x \quad (4.1.17)$$

を得ます。y 成分については

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z + \frac{\partial}{\partial t} B_y = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) - \gamma \frac{\partial}{\partial x'} (E_z + V B_y) + \frac{\partial}{\partial z'} E_x = 0 \quad (4.1.18)$$

また, (4.1.17) より

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x'} (E_z + V B_y) = \frac{\partial}{\partial x'} E'_z \quad (4.1.19)$$

なので, (4.1.19) を (4.1.18) にいれて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial z'} E_x - \frac{\partial}{\partial x'} E'_z = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) \quad (4.1.20)$$

これは (4.1.7) と同じ形をしているので, これとの比較により

$$E_x = E'_x, \quad B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) \quad (4.1.21)$$

を得ます。同様にして z 成分について計算して

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right) \quad (4.1.22)$$

を得ます。以上, 電場と磁場のローレンツ変換を整理すると次のようになります。

$$\begin{cases} E'_x = E_x, & E'_y = \gamma (E_y - V B_z), & E'_z = \gamma (E_z + V B_y) \\ B'_x = B_x, & B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right), & B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right) \end{cases} \quad (4.1.23)$$

電場をローレンツ変換すると磁場が混ざるし, 磁場をローレンツ変換すると電場が混ざりますね。

4.1.2 電荷密度，電流密度のローレンツ変換と4元電流密度

(4.1.5) より

$$\begin{aligned}
 \nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}', t') &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x + \frac{\partial}{\partial y} \{ \gamma (E_y - V B_z) \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ \gamma (E_z + V B_y) \} \\
 &= \gamma \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\gamma \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_x - \gamma V (\nabla \times \mathbf{B})_x \\
 &= \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\gamma \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_x - \gamma V (\nabla \times \mathbf{B})_x
 \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

また，(4.1.4) より

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \mu_0 J_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \frac{\gamma \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_x - \gamma V (\nabla \times \mathbf{B})_x = -\gamma V \mu_0 J_x \tag{4.1.25}$$

これを上式に入れると

$$\begin{aligned}
 \nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}', t') &= \gamma \left(\frac{1}{\epsilon_0} \rho - \mu_0 V J_x \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \gamma \left(\rho - \frac{\beta}{c} j_x \right) \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \rho'
 \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

したがって，電荷密度のローレンツ変換は

$$c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_x) \tag{4.1.27}$$

最後に電流密度のローレンツ変換をもとめます。

$$\begin{aligned}
 (\nabla' \cdot \mathbf{B}')_{x'} &= \frac{\partial}{\partial y'} B'_z - \frac{\partial}{\partial z'} B'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) \right\} \\
 &= \gamma \left\{ (\nabla \times \mathbf{B})_x - \frac{\beta}{c} \left(\frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

また，

$$\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} \right)_x = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} E_x + V \frac{\partial}{\partial x} E_x \right) = \gamma \frac{\partial}{\partial t} E_x + \gamma c \beta \frac{\partial}{\partial x} E_x \tag{4.1.29}$$

これらを (4.1.27) に入れて

$$\begin{aligned}
 (\nabla' \cdot \mathbf{B}')_{x'} &= \gamma \left\{ (\nabla \times \mathbf{B})_x - \frac{\beta}{c} \left(\frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \right) \right\} \\
 &= \mu_0 j'_x + \frac{\gamma}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} E_x + c\beta \frac{\partial}{\partial x} E_x \right) \\
 \therefore \mu_0 j'_x &= \gamma \left\{ (\nabla \times \mathbf{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} E_x - \frac{\beta}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} \right\} \\
 &= \mu_0 \gamma (j_x - \beta c \rho)
 \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

全く同様にして

$$j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z \tag{4.1.31}$$

ここで $x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3$ と書き換えて

$$j_4 = i j_0 = i c \rho \tag{4.1.32}$$

を定義すると，電流密度のローレンツ変換は

$$j'_1 = \gamma(j_1 + i\beta j_4), \quad j'_2 = j_2, \quad j'_3 = j_3, \quad j'_4 = i c \rho' = \gamma(j_4 - i\beta j_1) \tag{4.1.33}$$

となります。したがって

$$j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} j'_1 \\ j'_2 \\ j'_3 \\ j'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} \quad (4.1.34)$$

j_μ はローレンツ変換に対してベクトルとして変換するので、4元ベクトルである j_μ を4元電流密度と呼んでいます。

$$\mathbf{j}_\mu = (j_1, j_2, j_3, j_4) = (\mathbf{j}, ic\rho) \quad (4.1.35)$$

4.1.3 4元ベクトルポテンシャル

電場と磁場を電磁ポテンシャル ϕ, \mathbf{A} を使って書き換えると¹

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1.36)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1.37)$$

となります。ローレンツ変換後も式の形は変わらないので

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}', t') = -\nabla'\phi(\mathbf{x}', t') - \frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{A}(\mathbf{x}', t') \quad (4.1.38)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}', t') = \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{x}', t') \quad (4.1.39)$$

とおけます。(4.1.36) の x 成分は $E_x = E'_x$ であることを使って

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_x = -\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \phi - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - c\beta \frac{\partial}{\partial x'} \right) A_x \\ &= -\frac{\partial}{\partial x'} \{ \gamma(\phi - c\beta A_x) \} - \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \gamma \left(A_x - \frac{\beta}{c} \phi \right) \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x'} \phi' - \frac{\partial}{\partial t'} A'_x = E'_x \\ \therefore \frac{\phi'}{c} &= \gamma \left(\frac{\phi}{c} - \beta A_x \right), \quad A'_x = \gamma \left(A_x - \frac{\beta}{c} \phi \right) \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

次に y 成分は $E'_y = \gamma(E_y - VB_z)$ であることを使って

$$\begin{aligned} E'_y &= -\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A_y = \gamma \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_y - V(\nabla \times \mathbf{A})_y \right\} \\ &= \gamma \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_y - V \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \right) \right\} \\ &= \gamma \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}(\phi - VA_x) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) A_y \right\} \\ &= -\gamma \frac{\partial}{\partial y'}(\phi - VA_x) - \frac{\partial}{\partial t'}A_y = -\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_y \\ \therefore \frac{\phi'}{c} &= \gamma \left(\frac{\phi}{c} - \beta A_x \right), \quad A'_y = A_y \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

z 成分も同様にして

$$A'_z = A_z \quad (4.1.42)$$

¹ ϕ をスカラーポテンシャル, \mathbf{A} をベクトルポテンシャルといいます。この辺りの話は HP の「電磁気学再入門を読む」が適当な電磁気学のテキストを参照ください。

となります。ここで

$$A_4 = iA_0 = i\phi/c \quad (4.1.43)$$

を定義して整理すると

$$\begin{cases} A'_1 = \gamma(A_1 + i\beta A_4) \\ A'_2 = A_2 \\ A'_3 = A_3 \\ A'_4 = \gamma(A_4 - i\beta A_1) \end{cases} \quad (4.1.44)$$

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \\ A'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \quad (4.1.45)$$

A_μ はローレンツ変換に対してベクトルとして変換するので、4元ベクトルである A_μ を4元ベクトルポテンシャルと呼んでいます。

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_1, A_2, A_3, i\phi/c) \quad (4.1.46)$$

4.1.4 電磁場テンソル

ここで偏微分記号を簡略化した次の記号を導入しておきます。

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad \text{ただし } \partial_4 = -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.1.47)$$

この記号を使うと

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu \partial_\mu \equiv \square \quad (4.1.48)$$

と表すことができ、見通しがよくなります。尚、 \square はダランベリアンと呼ばれており、相対論的波動方程式などにでてきます。また、電荷保存則は4元電流密度を使って

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu j_\mu = 0 \quad (4.1.49)$$

と簡潔に表わせます。

さて、4元ベクトルポテンシャルを

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, iA_0) \quad (A_0 = \phi/c) \quad (4.1.50)$$

とにおいて、反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ を

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}) \quad (4.1.51)$$

と定義します。独立成分は6個ですね。マクスウェルの方程式をを使って書くと

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\nabla\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= ic(\partial_1 A_4 - \partial_4 A_1, \partial_2 A_4 - \partial_4 A_2, \partial_3 A_4 - \partial_4 A_3) \\ \therefore -\frac{i\mathbf{E}}{c} &= (\partial_1 A_4 - \partial_4 A_1, \partial_2 A_4 - \partial_4 A_2, \partial_3 A_4 - \partial_4 A_3) \\ &= (F_{14}, F_{24}, F_{34}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ &= (F_{23}, F_{31}, F_{12}) \end{aligned} \quad (4.1.52)$$

となります。電場と磁場の成分を反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ の成分で表わすと

$$\mathbf{E} = \begin{cases} E_x = E_1 = icF_{14} \\ E_y = E_2 = icF_{24} \\ E_z = E_3 = icF_{34} \end{cases} \Leftrightarrow E_i = icF_{i4}, \quad \mathbf{B} = \begin{cases} B_x = B_1 = F_{23} \\ B_y = B_2 = F_{31} \\ B_z = B_3 = F_{12} \end{cases} \Leftrightarrow B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \quad (4.1.53)$$

また，反対称テンソル成分を電場，磁場成分で表わすと

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.54)$$

となります。この2階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ を電磁場テンソルと呼んでいます。これから

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k, \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1: & i, j, k \text{ が } 123 \text{ の偶置換のとき} \\ -1: & i, j, k \text{ が } 123 \text{ の奇置換のとき} \\ 0: & \text{その他, 添字に重複する場合} \end{cases} \quad (4.1.55)$$

の関係にあることが分かります。電磁場テンソルのスカラー積は

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{11}F_{11} + F_{12}F_{12} + F_{13}F_{13} + F_{14}F_{14} \\ &\quad + F_{21}F_{21} + F_{22}F_{22} + F_{23}F_{23} + F_{24}F_{24} \\ &\quad + F_{31}F_{31} + F_{32}F_{32} + F_{33}F_{33} + F_{34}F_{34} \\ &\quad + F_{41}F_{41} + F_{42}F_{42} + F_{43}F_{43} + F_{44}F_{44}) \\ &= \mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} \end{aligned} \quad (4.1.56)$$

となり， J は不変量となります。

電磁場テンソルがローレンツ変換に対して

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}F_{\lambda\rho} \quad (4.1.57)$$

と変換されると仮定し，この仮定が成立することを確認していきます。 $F_{\mu\nu}$ の独立な成分は $F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}$ の6個で， $a_{\mu\nu}$ は次の通りです。

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (4.1.58)$$

$F_{\mu\nu}$ 各成分の変換性を調べてみましょう。(4.1.58) を睨みながら

$$\begin{aligned} F'_{12} &= a_{1\lambda}a_{2\rho}F_{\lambda\rho} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})F_{12} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})F_{13} + (a_{13}a_{24} - a_{14}a_{21})F_{14} \\ &\quad + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})F_{23} + (a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22})F_{24} \\ &\quad + ((a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})F_{34} = a_{11}a_{22}F_{12} - a_{14}a_{22}F_{24} \\ &= \gamma(F_{12} - i\beta F_{24}) \end{aligned} \quad (4.1.59)$$

同様にして

$$\begin{aligned} F'_{13} &= \gamma(F_{13} - i\beta F_{34}), & F'_{14} &= F_{14}, & F'_{23} &= F_{23} \\ F'_{24} &= \gamma(F_{24} + i\beta F_{12}), & F'_{34} &= \gamma(F_{34} + i\beta F_{13}) \end{aligned}$$

となります。

$$F'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(F_{12} - i\beta F_{24}) & \gamma(F_{13} - i\beta F_{34}) & F_{14} \\ -\gamma(F_{12} - i\beta F_{24}) & 0 & F_{23} & \gamma(F_{24} + i\beta F_{12}) \\ -\gamma(F_{13} - i\beta F_{34}) & F_{23} & 0 & \gamma(F_{34} + i\beta F_{13}) \\ -F_{14} & -\gamma(F_{24} + i\beta F_{12}) & -\gamma(F_{34} + i\beta F_{13}) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.60)$$

(4.1.54) と (4.1.62) を見比べてみましょう。電場・磁場のローレンツ変換は (4.1.23) で与えられました。

$$B'_2 = \gamma \left(B_2 + \frac{\beta}{c} E_3 \right), \quad B'_3 = \gamma \left(B_3 - \frac{\beta}{c} E_2 \right), \quad E'_2 = \gamma(E_2 - V B_3), \quad E'_3 = \gamma(E_3 + V B_2)$$

$F'_{\mu\nu}$ の成分を調べると

$$\begin{aligned} F'_{12} &= \gamma(F_{12} - i\beta F_{24}) = \gamma\{(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) - i\beta(\partial_2 A_4 - \partial_4 A_2)\} \\ &= \gamma \left(B_3 - \frac{\beta}{c} E_2 \right) = B'_3 \\ F'_{13} &= \gamma(F_{13} - i\beta F_{34}) = \gamma\{(\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) - i\beta(\partial_3 A_4 - \partial_4 A_3)\} \\ &= -\gamma \left(B_2 + \frac{\beta}{c} E_3 \right) = -B'_2 \\ F'_{14} &= \partial_1 A_4 - \partial_4 A_1 = -i \frac{E_1}{c}, \quad F'_{23} = B_1, \quad F'_{24} = -i \frac{E_2}{c}, \quad F'_{34} = -i \frac{E_3}{c} \end{aligned} \quad (4.1.61)$$

となって, (4.1.54) をローレンツ変換した各成分と一致します。したがって, 最初の仮定が成立します。

4.1.5 マクスウェルの方程式を電磁場テンソルで書き換える

マクスウェルの方程式を電磁場テンソルで書き換えます。まず, (4.1.1) と (4.1.4) は次のテンソル方程式で表わされることを示します。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{cases} \longrightarrow \partial_\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 j_\nu \quad (4.1.62)$$

最初の式は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) &= \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ &= ic(\partial_1 F_{14} + \partial_2 F_{24} + \partial_3 F_{34} + \mu_0 j_4) = 0 \\ \therefore \partial_1 F_{14} + \partial_2 F_{24} + \partial_3 F_{34} + \mu_0 j_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.63)$$

次の式は, 各成分に分解すると

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B})_1 - \mu_0 j_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \mu_0 j_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} \\ &= \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} + \partial_4 F_{14} - \mu_0 j_1 = 0 \\ (\nabla \times \mathbf{B})_2 - \mu_0 j_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} &= \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 - \mu_0 j_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} \\ &= \partial_3 F_{23} - \partial_1 F_{12} + \partial_4 F_{24} - \mu_0 j_2 = 0 \\ (\nabla \times \mathbf{B})_3 - \mu_0 j_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_3}{\partial t} &= \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 - \mu_0 j_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_3}{\partial t} \\ &= \partial_1 F_{31} - \partial_2 F_{23} + \partial_4 F_{34} - \mu_0 j_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

したがって、与式が成立します。次に、残りの方程式ですが、これは次のテンソル方程式で表わされます。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{cases} \longrightarrow \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1.65)$$

まず、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \quad (4.1.66)$$

次に

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_1 + \partial_t B_1 &= \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + ic\partial_4 B_1 = ic(\partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} + \partial_4 F_{23}) = 0 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_2 + \partial_t B_2 &= \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + ic\partial_4 B_2 = ic(\partial_3 F_{14} - \partial_1 F_{34} + \partial_4 F_{31}) = 0 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_3 + \partial_t B_3 &= \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + ic\partial_4 B_3 = ic(\partial_1 F_{24} - \partial_2 F_{14} + \partial_4 F_{12}) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.67)$$

となるので、与式が成立します。

以上、見てきたようにマクスウェルの方程式は次の2つのテンソル方程式で表わされることが分かりました。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 j_\nu \\ \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (4.1.68)$$

さて、(4.1.51) で定義した反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ は (4.1.68) の2つ目の式を自動的に満たしますね。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

を代入すると

$$\begin{aligned} &\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) + \partial_\lambda(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.69)$$

ということで、4元ベクトルポテンシャル (4.1.50) を導入して、反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ を (4.1.51) によって表わすと、(4.1.68) の2つ目の式はもういらなくなり、マクスウェルの方程式は最終的に次の2式で表わされることとなります。

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 j_\nu \quad (4.1.70)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.1.71)$$

(4.1.71) を (4.1.70) に入れると

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} &= \partial_\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= \square A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = -\mu_0 j_\nu \end{aligned} \quad (4.1.72)$$

いま、4元電流 j_ν が与えられたとすると、この式を解いて A_μ を求め、それを (4.1.71) の右辺に代入すると \mathbf{E} や \mathbf{B} が j_ν に応じて決まります。

【補注】:デュアルテンソルを使った導出の仕方について触れておきます(上の結論からこの導出は特に不要となるのだが...参考までに)

$F_{\mu\nu}$ に対してデュアルテンソル $*F_{\mu\nu}$ を

$$*F_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \quad (4.1.73)$$

と定義します。 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ は先ほどもでてきましたが、レヴィ・チヴィタの完全反対称テンソルといわれ、 $\varepsilon_{1234} = 1$ としたものです。具体的に書くと

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} 1: & \mu, \nu, \lambda, \rho \text{ が } 1234 \text{ の偶置換のとき} \\ -1: & \mu, \nu, \lambda, \rho \text{ が } 1234 \text{ の奇置換のとき} \\ 0: & \text{その他, 添字に重複する数字を持つ場合} \end{cases} \quad (4.1.74)$$

$*F_{\mu\nu}$ の成分は、例えば

$$\begin{aligned} *F_{12} &= \frac{i}{2} \varepsilon_{1234} F_{34} + \frac{i}{2} \varepsilon_{1243} F_{43} = \frac{i}{2} \varepsilon_{1234} F_{34} + \frac{i}{2} \varepsilon_{1234} F_{34} \\ &= iF_{34} \end{aligned} \quad (4.1.75)$$

となるので、各成分を書くと次のようになります。

$$\begin{cases} *F_{12} = iF_{34} & *F_{13} = -iF_{24} & *F_{14} = iF_{23} \\ *F_{23} = iF_{14} & *F_{24} = -iF_{13} & *F_{34} = iF_{21} \end{cases} \quad (4.1.76)$$

特に、

$$*F_{i4} = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk} \quad (\text{添字 } i, j, k \text{ はそれぞれ } 1, 2, 3 \text{ をとります}) \quad (4.1.77)$$

と表わせることに注意してください。(4.1.53) より

$$*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_3/c & -E_2/c & iB_1 \\ -E_3/c & 0 & E_1/c & iB_2 \\ E_2/c & -E_1/c & 0 & iB_3 \\ -iB_1 & -iB_2 & -iB_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.78)$$

そうすると、(4.1.68) の2番目の式はデュアルテンソル $*F_{\mu\nu}$ を使うと

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{cases} \iff \partial_\mu *F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1.79)$$

と表すこともできます。それを以下に見ていきます。

$$\begin{cases} \nu = 1 & \partial_1^* F_{11} + \partial_2^* F_{21} + \partial_3^* F_{31} + \partial_4^* F_{41} = -(\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) - \partial_t B_1 = 0 \\ \nu = 2 & \partial_1^* F_{12} + \partial_2^* F_{22} + \partial_3^* F_{32} + \partial_4^* F_{42} = -(\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) - \partial_t B_2 = 0 \\ \nu = 3 & \partial_1^* F_{13} + \partial_2^* F_{23} + \partial_3^* F_{33} + \partial_4^* F_{43} = -(\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) - \partial_t B_3 = 0 \end{cases} \quad (4.1.80)$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.1.81)$$

$\nu = 4$ の場合は

$$\partial_1^* F_{14} + \partial_2^* F_{24} + \partial_3^* F_{34} + \partial_4^* F_{44} = -i(\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2) - \partial_3 B_3 = 0 \quad (4.1.82)$$

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.1.83)$$

なお, $*F_{\mu\nu}$ と $F_{\mu\nu}$ のスカラー積は

$$K = \frac{1}{4} *F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \quad (4.1.84)$$

となり, K は不変量となります。

4.1.6 ゲージ変換

A_μ を任意のスカラー関数 Λ で

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \equiv \tilde{A}_\mu \quad (4.1.85)$$

のような置き換えをしても電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は不変です。つまり, 電場 E や磁場 B を決めるのにどんな関数 Λ をとってきててもかまわないこととなります。変換 (4.1.85) をゲージ変換といい, この勝手な量 $\Lambda(t, x)$ を A_μ のゲージといいます。また, $F_{\mu\nu}$ は勝手なゲージをとっても変わらないので, ゲージ不変であるといいます。

ターゲットとする方程式は

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} &= \partial_\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= \square A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = -\mu_0 j_\nu \end{aligned} \quad (4.1.86)$$

$\Lambda(x)$ を 2 階微分可能な全く勝手スカラーな関数として, $A_\mu = \partial_\mu \Lambda(x)$ を (4.1.86) に入れると

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial_\mu \partial_\nu \Lambda(x) - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda(x)) = 0 \quad (4.1.87)$$

のように恒等的に 0 となるので, A_μ を解とするなら $A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$ も解になり, 解はユニークに決まりません。そこで, 次に述べるように, 方程式が簡単になるようなある特別の $\Lambda(x)$ をとって解を求めていくやり方を考えます。このようにしても解は特別の $\Lambda(x)$ にはよらないので問題ないわけですね²。

ローレンツゲージとゲージ固定

いま,

$$\square A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = -\mu_0 j_\nu \quad (4.1.88)$$

を解いて, 何か 1 つの解 A_ν^{old} が得られたとします。この解に ∂_μ を掛けたら一般には 0 とならず

$$\partial_\mu A_\mu^{old}(x) = s(x) \quad (4.1.89)$$

となったとします。このとき, 任意にとれる勝手な関数 $\Lambda(x)$ として次の方程式

$$\square \Lambda(x) = -s(x) \quad (4.1.90)$$

を満たすものを取り, この式を解いて $\Lambda(x)$ が 1 つ見つかったとき, それを使って

$$A_\mu^{new}(x) = A_\mu^{old} + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (4.1.91)$$

² A_μ の任意性を利用して, 目的に応じてクーロンゲージやローレンツゲージを採用して数式を簡単にできたわけですね。「電磁気学再入門を読む」を参照されたし。余談ですが, ローレンツゲージのローレンツはデンマークの数学者 *Ludvig Valentin Lorenz* (January 18, 1829 – June 9, 1891) です。

を定義すると

$$\partial_\mu A_\mu^{new} = \partial_\mu A_\mu^{old} + \square \Lambda(x) = s(x) - s(x) = 0 \quad (4.1.92)$$

となるので, A_μ^{new} は常に

$$\partial_\mu A_\mu^{new} = 0 \quad (4.1.93)$$

を満たしています³。したがって, (4.1.88) より A_ν^{new} は

$$\square A_\nu^{new} = -\mu_0 j_\nu \quad (4.1.94)$$

の解となります。以上のことから, 解くべき方程式 (連立方程式) は次のように簡単化されます。

$$\begin{cases} \square A_\nu = -\mu_0 j_\nu \\ \partial_\mu A_\mu = 0 \end{cases} \quad (4.1.95)$$

この A_ν を使って (4.1.71) より $F_{\mu\nu}$ を決めればよいこととなります。(4.1.93) を満たすようにゲージ $\Lambda(x)$ を制限することをローレンツゲージを採用するといひ, (4.1.95) のように, マクスウェルの方程式にゲージ条件を付加することをゲージを固定するといひます。

4.2 相対論的荷電粒子の運動

4.2.1 ローレンツ力

粒子の電荷を q , 速度を \mathbf{v} とすると, 電磁場中でこの荷電粒子が受ける力は次式で表わされます。

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.2.1)$$

この力をローレンツ力といひます。ローレンツ力を4元力ベクトルに書きなおすことにします。4元速度と4元力は (3.2.13) と (3.2.45) で与えられていますが, 再掲しておきます。

$$u_\mu = \gamma_p(\mathbf{v}, ic), \quad F_\mu = \gamma_p \left(\mathbf{f}, \frac{i}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \right) \quad (4.2.2)$$

4元力の空間成分は

$$\begin{aligned} F_1 &= \gamma_p f_1 = \gamma_p q \{ E_1 + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_1 \} = q(F_{12}u_2 + F_{13}u_3 + F_{14}u_4) \\ F_2 &= \gamma_p f_2 = \gamma_p q \{ E_2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_2 \} = q(F_{21}u_1 + F_{23}u_3 + F_{24}u_4) \\ F_3 &= \gamma_p f_3 = \gamma_p q \{ E_3 + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_3 \} = q(F_{31}u_1 + F_{32}u_2 + F_{34}u_4) \\ \therefore F_i &= qF_{ij}u_j \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

次に時間成分は

$$\begin{aligned} F_4 &= \gamma_p \frac{i}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = \gamma_p \frac{i}{c} q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = q(F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3) \\ \therefore F_4 &= qF_{4j}u_j \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

空間成分と時間成分をまとめると, ローレンツ力の4元力ベクトルは

$$F_\mu = qF_{\mu\nu}u_\nu \quad (4.2.5)$$

で表わされます。したがって, 荷電粒子の相対論的運動方程式は (3.2.46) より

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = qF_{\mu\nu}u_\nu \quad \text{or} \quad \frac{dp_i}{dt} = qF_{\mu\nu}u_\nu \frac{d\tau}{dt} = qF_{\mu\nu}v_i \quad (4.2.6)$$

³ これは電磁気学でお目にかかる Lorenz gauge : $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{A}_0 = 0$ ですね。

となります。

一様電場の場合の中における荷電粒子の運動を考えてみます。電場は $E = (E, 0, 0)$, 磁場は $B = 0$ とし, 粒子は $t = 0$ で静止していたとします。この場合, x 軸方向の運動のみが起こるので, (4.2.6) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mv) &= m_0 \frac{d}{dt}(\gamma_p v) = \frac{1}{\gamma_p} q F_{1\nu} u_\nu = \frac{1}{\gamma_p} q (-iE_1/c)(i\gamma_p c) = qE \\ \therefore \frac{d}{dt}(\gamma_p v) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{q}{m_0} E \longrightarrow \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q}{m_0} Et \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

v について整理して

$$v = \frac{dx}{dt} = c \frac{qEt/m_0c}{\sqrt{1+(qEt/m_0c)^2}}, \quad \therefore x = \frac{m_0c^2}{qE} (\sqrt{1+(qEt/m_0c)^2} + 1) \quad (4.2.8)$$

$qEt/m_0c^2 \ll 1$ の場合, ニュートン力学の結果と一致します。

次に一様な磁場の場合を考えます。 $E = 0$, $B = (0, 0, B)$ とします。この場合, $f = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ で4元力は

$$F_\mu = \gamma_p (q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), 0) \quad (4.2.9)$$

運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m_0 \frac{d}{dt}(\gamma_p \mathbf{v}) = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.2.10)$$

成分に分けて書くと

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m_0\gamma_p} v_y = \omega v_y, & \omega = \frac{1}{\gamma_p} \frac{qB}{m_0} \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m_0\gamma_p} v_x = -\omega v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (4.2.11)$$

いま, 簡単のため $v_z = 0$ とします。

$$\begin{aligned} v_x &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad v_y = B \cos \omega t - A \sin \omega t \\ \therefore x &= (A/\omega) \sin \omega t - (B/\omega) \cos \omega t + x_0, \quad y = (B/\omega) \sin \omega t + (A/\omega) \cos \omega t + y_0 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{A^2 + B^2}{\omega^2} = \frac{v^2}{\omega^2} \quad (4.2.13)$$

これから粒子は x_0, y_0 を中心として半径 $r = v/\omega = \gamma_p(m_0v/qB)$ の円を描きます。ニュートン力学からの結果は, 円運動の角振動数

$$\omega_c = \frac{qB}{m_0} \quad (4.2.14)$$

で, 粒子の速さには依存しませんでした, 相対論的效果を取り入れると

$$\omega = \frac{qB}{m_0} \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (4.2.15)$$

となって, 粒子の速さに関係してきます。

4.2.2 荷電粒子のラグランジアン

自由粒子の作用は (3.2.61) でみるように

$$I_0 = -m_0c \int ds = -m_0c^2 \int d\tau \quad (4.2.16)$$

で与えられました。電磁場と荷電粒子が相互作用している場合, I_0 に $e \int A_\mu u_\mu d\tau$ の項が加わり, この系の作用は次式で表わされます。

$$I = -m_0c^2 \int d\tau + e \int A_\mu u_\mu d\tau \quad (4.2.17)$$

相互作用の部分は

$$e \int A_\mu u_\mu d\tau = e \int \gamma_p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \phi) d\tau = \int (e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\phi) dt \quad (4.2.18)$$

と書けるので, 作用は

$$I = \int \left(-\frac{m_0c^2}{\gamma_p} - e\phi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) dt \quad (4.2.19)$$

と表わせます。したがって, 相対論的粒子のラグランジアンとして

$$L = -\frac{m_0c^2}{\gamma_p} - e\phi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad (4.2.20)$$

ととることができます。次に, オイラー・ラグランジュの方程式をたてて運動方程式を求めていくこととなります。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_i} &= m_0\gamma_p v_i + eA_i = mv_i + eA_i \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j A_j) = -e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + ev_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} &= m \frac{dv_i}{dt} + e \frac{dA_i}{dt} = m \frac{dv_i}{dt} + e \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= m \frac{dv_i}{dt} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - e \frac{\partial A_i}{\partial t} + ev_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \\ &= m \frac{dv_i}{dt} - eE_i - ev_j F_{ij} \\ &= m \frac{dv_i}{dt} - eE_i - e\varepsilon_{ijk} v_j B_k = 0 \quad (\because F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k) \end{aligned}$$

したがって, 求める運動方程式は

$$m \frac{dv_i}{dt} = eE_i + e\varepsilon_{ijk} v_j B_k \longrightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.2.23)$$

正準運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m_0\gamma_p v_i + eA_i = mv_i + eA_i \longrightarrow \mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad (4.2.24)$$

これから

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m_0\gamma_p} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = \frac{1}{m_0} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (4.2.25)$$

両辺を2乗して v^2 を求めると

$$v^2 = \frac{c^2(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{(m_0c)^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}, \quad \therefore \frac{1}{\gamma_p} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0c}{\sqrt{(m_0c)^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} \quad (4.2.26)$$

これを (4.2.25) に入れて

$$v_i = \frac{c(p_i - eA_i)}{\sqrt{(m_0c)^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} \quad (4.2.27)$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= p_i v_i - L = m_0 \gamma_p v^2 + \frac{1}{\gamma_p} m_0 c^2 + e\phi \\ &= c \sqrt{(m_0c)^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} + e\phi \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

ハミルトニアンを使ってハミルトンの運動方程式から (4.2.23) の導出は各自試みてください。

4.3 電磁場のエネルギーと運動量

4.3.1 電磁場のエネルギー保存則

電荷 e , 質量 m をもつ1個の荷電粒子と電磁場からなる系を考えます。粒子のエネルギー密度とその流れを

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(pe)} &= \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{j}_i^{(pe)} &= \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 \dot{\xi}_i \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

で定義します。エネルギーに対するバランス方程式は

$$\dot{\mathcal{E}} + \nabla \cdot \mathbf{j}^{(pe)} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (4.3.2)$$

となります。一方、電磁場のエネルギー密度は

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (4.3.3)$$

で与えられ、電磁場のエネルギーに対するバランス方程式は

$$\dot{\mathcal{E}} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (4.3.4)$$

となります。エネルギーの流れの密度を表わすポインティングベクトル⁴

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (4.3.5)$$

を導入すると、(4.3.6) は

$$\dot{\mathcal{E}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (4.3.6)$$

(4.3.2) , (4.3.6) はバランス方程式で、エネルギー保存則を表わしてはいません。そこで、荷電粒子と電磁場のエネルギーバランス方程式を加え合わせると次の連続の式が得られ

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E} + \mathcal{E}^{(pe)}) + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j}^{(pe)} \right\} = 0 \quad (4.3.7)$$

電磁場と荷電粒子の全体系でエネルギー保存則が成り立つことが分かります。

⁴ John Henry Poynting : 1852.9.9 - 1914.3.30 , イギリスの物理学者 , ポインティングベクトルを考案。

4.3.2 電磁場のエネルギー-運動量テンソル

電磁場のエネルギー-保存則 (4.3.7) を相対論的に書き換えたものを紹介します。天下りのですが、真空中での電磁場のエネルギー・運動量密度を表わすテンソルを

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}) \quad (4.3.8)$$

で定義します。このテンソルは対称テンソル($T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$) であることは明らかで、さらに

$$T_{\mu\mu} = 0 \quad (4.3.9)$$

で、対角成分の和は0に等しいという性質を持っています。(4.1.56) より

$$F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2/c^2) \quad (4.3.10)$$

また、

$$T_{44} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{4\lambda}F_{\lambda 4} + \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} \right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \quad (4.3.11)$$

で、電磁場のエネルギー-密度

$$\mathcal{E} = T_{44} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \quad (4.3.12)$$

を表わします。 T_{i4} は成分は

$$\begin{cases} T_{14} = \frac{1}{\mu_0}F_{1\lambda}F_{\lambda 4} = -\frac{i}{c}(E_2B_3 - E_3B_2) = -\frac{i}{c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_1 \\ T_{24} = \frac{1}{\mu_0}F_{2\lambda}F_{\lambda 4} = -\frac{i}{c}(E_3B_1 - E_1B_3) = -\frac{i}{c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_2 \\ T_{34} = \frac{1}{\mu_0}F_{3\lambda}F_{\lambda 4} = -\frac{i}{c}(E_1B_2 - E_2B_1) = -\frac{i}{c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_3 \end{cases} \quad (4.3.13)$$

となり、 T_{i4} は電磁場のエネルギー-密度の流れの i 成分、すなわちポインティングベクトルの i 成分を表わします。

$$T_{i4} = \frac{1}{\mu_0}F_{i4}F_{4j} = -\frac{i}{c}\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = -\frac{i}{c}\mathbf{S}_i \quad (4.3.14)$$

次に、 T_{ij} の各成分を計算すると

$$\begin{cases} T_{11} = \frac{1}{\mu_0}F_{1\lambda}F_{\lambda 1} + \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = \varepsilon_0E_1E_1 + \frac{1}{\mu_0}B_1B_1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \right) \\ T_{22} = \frac{1}{\mu_0}F_{2\lambda}F_{\lambda 2} + \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = \varepsilon_0E_2E_2 + \frac{1}{\mu_0}B_2B_2 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \right) \\ T_{33} = \frac{1}{\mu_0}F_{3\lambda}F_{\lambda 3} + \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = \varepsilon_0E_3E_3 + \frac{1}{\mu_0}B_3B_3 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \right) \\ T_{12} = \frac{1}{\mu_0}F_{1\lambda}F_{\lambda 2} = \varepsilon_0E_1E_2 + \frac{1}{\mu_0}B_1B_2 \\ T_{13} = \frac{1}{\mu_0}F_{1\lambda}F_{\lambda 3} = \varepsilon_0E_1E_3 + \frac{1}{\mu_0}B_1B_3 \end{cases} \quad (4.3.15)$$

これをまとめて書くと

$$T_{ij} = \varepsilon_0E_iE_j + \frac{1}{\mu_0}B_iB_j - \delta_{ij} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \right) \quad (4.3.16)$$

となり，電磁場の j 方向の運動量密度の流れの i 成分，マクスウェルの応力テンソルであることが分かります。したがって，テンソル $T_{\mu\nu}$ は次のような構成になっています。

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{ij} & T_{i4} \\ T_{4j} & T_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{ij} & -\frac{i}{c}\mathbf{S}_i \\ -\frac{i}{c}\mathbf{S}_i & \mathcal{E} \end{pmatrix} \quad (4.3.17)$$

(4.3.8) に ∂_ν を掛け⁵，(4.1.86) の $\partial_\nu F_{\lambda\nu} = \mu_0 j_\lambda$ を使うと

$$\begin{aligned} \partial_\nu T_{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + F_{\mu\lambda} \partial_\nu F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial_\nu F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(\partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \mu_0 F_{\mu\lambda} j_\lambda + \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

次に括弧内の右辺第 1 項と第 3 項との和は

$$\begin{aligned} \partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} &= \frac{1}{2} \partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

ここで単に添字を書き換えるだけで生まれる次の関係式を使います。

$$\partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} = \partial_\lambda F_{\nu\mu} F_{\lambda\nu} \quad (\nu \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \nu) \quad (4.3.20)$$

そうすると (4.3.18) の第 2 項と第 3 項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_\nu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} &= \frac{1}{2} \partial_\lambda F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} \\ \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} &= \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\lambda\nu} F_{\lambda\nu} \quad (\sigma \rightarrow \nu \text{ に書き換えただけ}) \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

となり，(4.3.19) は (4.1.65) を使えば

$$\frac{1}{2} (\partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\lambda\nu}) F_{\lambda\nu} = 0 \quad (4.3.22)$$

となるので，結局

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} j_\lambda \quad (4.3.23)$$

を得ます。ここではこれ以上の議論はやめておきますが， $\mu = 4$ と置いたものが系全体のエネルギー保存則を表わし， $\mu = 1, 2, 3$ と置いたものが系全体の運動量保存則を表わします。

//

以上で本レポートを終了します。最後は尻切れトンボのような終わり方となりましたが，少し疲れてきたのでご容赦願いたい。また機会があれば内容の充実を図っていきたいと思います。それでは皆様のご健闘を祈って筆を擱くことにします。

⁵ 4 次元的な発散