

# 特殊相対性理論

*H E N L O U*

2012年7月16日

HPの掲示板でのやり取りが契機となって特殊相対性理論のレポートをまとめてみる気になりました。振りかえってみると特殊相対性理論を最初からキチンと勉強した記憶がなく、必要なときに必要なところだけを齧って、いわばつまみ食い済ませていたようです。まあそれでも特に支障はなかったのですが、この際、最初からキチンと(?)勉強し直してみようということで、高橋康著「初等相対性理論 - ジュニアからシニアまで」をメインテキストに、ランダウ・ジューコフ「相対性理論入門」、M. ボルン「アインシュタインの相対性原理」、恒岡美和「明快相対性理論入門」、中野薫夫「物理入門コース・相対性理論」、砂川重信「理論電磁気学」等を参考にしながら勉強を進めました。

本レポートはこのような勉強結果をまとめたもので、これから特殊相対性理論でも勉強しようかという初心の方の少しでも参考になればという思いで公開することにしました。計算はくどいほど詳細にフォローしていますが、誤解に基づくおかしい議論や見当はずれなことを言っている箇所があるかもしれません。もし、そのような箇所を発見された方は、お手数でもご一報いただければありがたい。

それではゆっくりとご賞味ください。

# 目次

|       |                   |    |
|-------|-------------------|----|
| 第1章   | ニュートン力学とガリレイの相対性  | 4  |
| 1.1   | ニュートン力学の3つの基本法則   | 4  |
| 1.2   | 慣性系と非慣性系          | 4  |
| 1.2.1 | 慣性系               | 4  |
| 1.2.2 | 非慣性系              | 5  |
|       | 等加速度座標系           | 5  |
|       | 回転座標系             | 6  |
| 1.3   | ガリレイの相対性原理とガリレイ変換 | 8  |
| 1.3.1 | ガリレイの相対性原理        | 8  |
| 1.3.2 | ガリレイ変換            | 8  |
| 1.3.3 | ガリレイ変換群           | 9  |
| 1.3.4 | ガリレイ変換の幾何学的表示     | 9  |
| 1.3.5 | 波の伝播とガリレイ変換       | 11 |
|       | ドップラー効果           | 11 |
| 1.4   | 波動方程式とガリレイ変換      | 13 |
| 1.4.1 | マイケルソン・モーレーの実験    | 14 |
| 1.4.2 | 波動方程式を不変にする変換     | 15 |
|       | ガリレイ変換との関係        | 17 |
| 第2章   | 特殊相対論における空間と時間    | 19 |
| 2.1   | アインシュタインの考え       | 19 |
| 2.2   | ローレンツ変換           | 19 |
| 2.2.1 | ローレンツ変換群          | 22 |
| 2.3   | 同時性について           | 23 |
| 2.3.1 | 時刻合わせ             | 23 |
| 2.3.2 | 事件の空間的・時間的構造      | 24 |
| 2.3.3 | 走っている棒は短くなる       | 25 |
| 2.3.4 | 走っている時計はゆっくり進む    | 26 |
| 2.3.5 | 因果律について           | 26 |
| 2.4   | 光のドップラー効果         | 27 |
|       | 横ドップラー効果          | 29 |
| 2.5   | 速度・加速度のローレンツ変換    | 30 |
| 2.5.1 | 速度のローレンツ変換        | 30 |
|       | フレネルの随伴係数         | 32 |
|       | 相対速度              | 33 |
| 2.5.2 | 加速度のローレンツ変換       | 33 |
| 2.6   | 固有時               | 36 |
| 2.7   | ローレンツ変換の幾何学的表示    | 38 |
|       | 幾何学的表示上の注意点       | 38 |

|              |                                      |           |
|--------------|--------------------------------------|-----------|
|              | 同時刻の相対性 . . . . .                    | 39        |
|              | ローレンツ収縮 . . . . .                    | 39        |
|              | 走っている時計の遅れ . . . . .                 | 39        |
|              | 速度の合成則 . . . . .                     | 40        |
|              | 相対速度 . . . . .                       | 40        |
|              | ドップラー効果 . . . . .                    | 41        |
| <b>第 3 章</b> | <b>相対論的力学</b>                        | <b>43</b> |
| 3.1          | 数学的準備 . . . . .                      | 43        |
| 3.1.1        | 2次元時空 . . . . .                      | 43        |
|              | スカラー, ベクトル . . . . .                 | 44        |
| 3.1.2        | 4次元時空 (ミンコフスキー空間) . . . . .          | 47        |
|              | スカラー, ベクトル, テンソル . . . . .           | 47        |
| 3.1.3        | 一般のローレンツ変換 . . . . .                 | 52        |
|              | 一般の速度合成則 . . . . .                   | 53        |
| 3.2          | 相対論的力学 . . . . .                     | 53        |
| 3.2.1        | 固有時 . . . . .                        | 53        |
| 3.2.2        | 4元 - 速度・加速度・運動量 . . . . .            | 55        |
|              | 4元速度ベクトル . . . . .                   | 55        |
|              | 4元加速度 . . . . .                      | 56        |
|              | 4元運動量 . . . . .                      | 56        |
| 3.2.3        | 相対論的運動方程式 . . . . .                  | 58        |
|              | 加速度と力の方向は一致しない . . . . .             | 59        |
| 3.2.4        | 解析力学からのアプローチ . . . . .               | 60        |
|              | 自由粒子 . . . . .                       | 60        |
|              | ポテンシャル力 . . . . .                    | 62        |
| <b>第 4 章</b> | <b>相対論的電磁気学</b>                      | <b>63</b> |
| 4.1          | マクスウェル方程式のローレンツ変換 . . . . .          | 63        |
| 4.1.1        | 電場と磁場のローレンツ変換 . . . . .              | 63        |
| 4.1.2        | 電荷密度, 電流密度のローレンツ変換と 4元電流密度 . . . . . | 65        |
| 4.1.3        | 4元ベクトルポテンシャル . . . . .               | 66        |
| 4.1.4        | 電磁場テンソル . . . . .                    | 67        |
| 4.1.5        | マクスウェルの方程式を電磁場テンソルで書き換える . . . . .   | 69        |
| 4.1.6        | ゲージ変換 . . . . .                      | 72        |
|              | ローレンツゲージとゲージ固定 . . . . .             | 72        |
| 4.2          | 相対論的荷電粒子の運動 . . . . .                | 73        |
| 4.2.1        | ローレンツ力 . . . . .                     | 73        |
| 4.2.2        | 荷電粒子のラグランジアン . . . . .               | 75        |
| 4.3          | 電磁場のエネルギーと運動量 . . . . .              | 76        |
| 4.3.1        | 電磁場のエネルギー保存則 . . . . .               | 76        |
| 4.3.2        | 電磁場のエネルギー運動量テンソル . . . . .           | 77        |

# 第1章 ニュートン力学とガリレイの相対性

## 1.1 ニュートン力学の3つの基本法則

- 第1法則：「すべての物体は、外部から力を加えられない限り、静止している物体は静止状態を続け、運動している物体は等速直線運動を続ける」

第1法則は慣性の法則ともいわれます。慣性の法則が成立するような座標系を慣性系といいます。慣性の法則が成立しない座標系を非慣性系といいます。非慣性系については後でもう少し詳しく議論します。

- 第2法則：「物体が力を受けると、その力の働く方向に加速度が生じる。加速度は力の大きさに比例し、慣性質量に反比例する。」

第2法則はニュートンの法則とか運動の法則ともいわれます。

- 第3法則：「2つの物体が互いに作用を及ぼすとき、一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しい。」

第3法則は作用・反作用の法則ともいわれます。

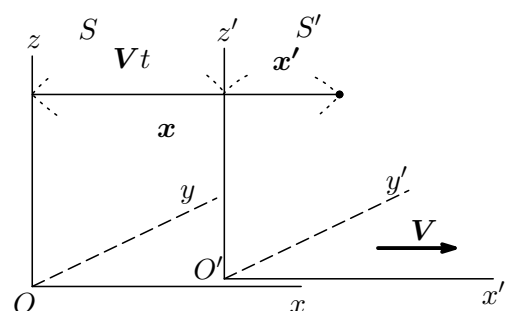
## 1.2 慣性系と非慣性系

### 1.2.1 慣性系

慣性系は運動の第1法則（慣性の法則）が成立する座標系であるといってしまうまでもありますが、これら法則にでてくる“速度”とか“加速度”という言葉は、あらかじめ決められた基準となるある座標系からみた場合にはじめて意味を持ちます。外力の影響が無視できる空間にある座標系を設定し、この座標系に関して物体は等速運動するとしたのが第1法則で、この座標系のことを慣性系と呼んでいます。

一方、自由落下しているエレベータに乗った人が手に持っていたリングから手を離すと、リングには地球の重力（外力）が働いているにもかかわらず、エレベータの人から見ればリングは宙に浮いたまま静止して見えます。この人にとっては第1法則は成り立ちません。エレベータに固定した座標系を非慣性系といいます。第1法則が成り立つのはある特別な座標系の一群に限られるということになります。

第1法則が成立する慣性系  $S$  が1つ見つかり、それに対して一定の速さで動いている別の座標系を  $S'$  とします<sup>1</sup>。  $S$  系において静止または等速運動している物体は  $S'$  系から見ると、その速さは異なるにしろ、やはり同じ状態を続けています。従って、 $S'$  もまた慣性系ということになります。このように慣性系は無数に存



<sup>1</sup> ただし、回転は除きます。回転系は加速度を含みます。

在します。

ところで、慣性系と第2法則の関係はどうなっているのか？ 第2法則は第1法則の特別な場合とはならず、慣性系を基準座標にとれば第2法則がでてくるといことになります<sup>2</sup>。このあたりのことを、以下に、数式を使って説明します。

慣性系  $S$  におけるある物体の位置をベクトル  $x$  で示し、その座標系  $S$  に対して速度  $V$  で動いている座標系  $S'$  におけるその物体の座標を  $x'$  とすると、 $x'$  と  $x$  との間には次の関係式が成り立ちます。

$$x'(t) = x(t) - Vt \quad (1.2.1)$$

これを  $t$  で微分すると

$$\frac{dx'(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - V \quad (1.2.2)$$

が得られます。左辺は  $S'$  系における物体の速度で、右辺第1項は  $S$  系における同一物体の速度、 $V$  は  $S'$  系の  $S$  系に対する速度。これから  $S$  系における物体の速度が一定であれば、 $S'$  系での同一物体の速度は、大きさは異なるが一定で、第1法則が成り立ちます。

(1.2.2) をさらに  $t$  で微分して加速度の関係を求めると

$$\frac{d^2x'(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (1.2.3)$$

となり、 $S$ 、 $S'$  の両座標系において、それらの相対速度  $V$  によらず、加速度は同じとなります。 $S$  系から見たニュートンの運動方程式を

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f \quad (1.2.4)$$

としましょう。 $f$  は  $S$  系から見た力です。 $S'$  系から見た場合の力を  $f'$  とし、力は速度に無関係で  $f = f'$  とすると、(1.2.3) より

$$m \frac{d^2x'(t)}{dt^2} = f' \quad (1.2.5)$$

となり、 $S'$  系から見た物体の運動は (1.2.4) とまったく同じ形の法則が成立しています。つまり、基準にとる慣性系を  $S$  から  $S'$  に変えても第2法則は不変ということになります。いい替える、物体の加速度はどの慣性系に対しても不変ということですね。

## 1.2.2 非慣性系

### 等加速度座標系

慣性系のことをよく理解するために非慣性系における運動方程式を取り扱ってみましょう。慣性系  $S$  に対して等加速度直線運動している座標系  $S'$  を考えます。 $S'$  は回転座標でないとします。(1.2.2) の  $V$  が一定でないケースです。(1.2.2) を  $t$  で微分すると

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dV}{dt} \longrightarrow a' = a - A \quad (1.2.6)$$

と加速度の関係式が得られます。左辺は  $S'$  系における物体の加速度、右辺第1項は  $S$  系における同一物体の加速度、右辺第2項は  $S'$  系の  $S$  に対する加速度です。この両辺に質量  $m$  を掛けると  $ma' = ma - mA$  で、これから非慣性系  $S'$  系における物体の運動方程式として

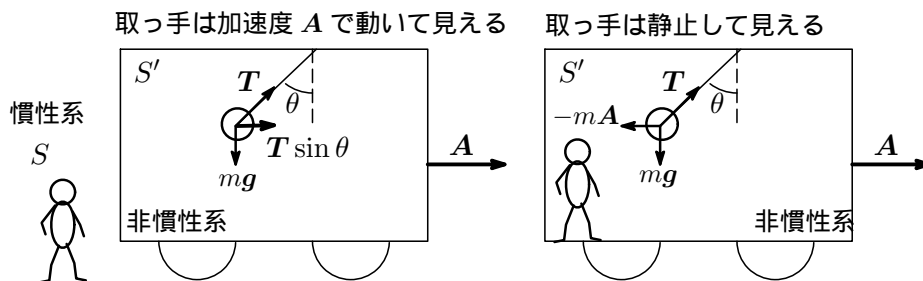
$$ma' = f - mA \quad (1.2.7)$$

<sup>2</sup> 第3法則の重要性については後に触れることにします。

が得られます。慣性系の間では物体の加速度は不変、つまり、物体に働く外力は等しく  $f' = f$  でしたが、非慣性系の間ではこの等式が成立せず、 $S'$  系においては真の力  $f$  に  $-mA$  の見かけの力が加わることとなります。この力を慣性力といいます。

くどいようですが、慣性力をもう少し理解するために、慣性系  $S$  で物体は静止していたとします。 $S$  系では力が物体に働かないので  $f = 0$ 。これを (1.2.7) に入れると  $ma' = -mA$  となり、 $S$  に対して加速度  $A$  で動いている非慣性系  $S'$  においては、物体は  $f' = -mA$  の力を受けると言い表すことができます。真の力はもともと物体に働いていないのですが、非慣性系に移ったときには  $f'$  という力が働いているように見える。この見かけの力を「慣性力」と呼んでいるわけです<sup>3</sup>。

水平方向 ( $x$  方向) に加速度  $A$  で加速する、電車の取っ手に働く力を考えてみましょう。取っ手は鉛直方向に対して角度  $\theta$  傾い



ています。地上<sup>4</sup>に止まっている観測者  $S$  からすれば、取っ手は加速度  $A$  で動いており、取っ手に働く外力は吊り革の張力  $T$  の  $x$  成分なので、運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mA = T \sin \theta \quad (1.2.8)$$

一方、電車に乗っている観測者からすれば、取っ手は静止して見えます。つまり、取っ手は加速度運動していないので、外力は 0 でなければなりません。したがって運動方程式は

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0 = T \sin \theta - mA \quad (1.2.9)$$

となります。右辺第 2 項にでてきた力  $-mA$  は見かけの力、つまり慣性力ですね。

### 回転座標系

次に、慣性系  $S$  に対して原点が共通で、 $z$  角軸の周りに角速度  $\omega$  で反時計方向に回転している座標系を考えます。 $t = 0$  で  $S, S'$  の座標軸が一致していたとします。運動している質点  $P$  の時刻  $t$  における  $S, S'$  系での位置ベクトルをそれぞれ  $x, x'$  とすると、

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{cases} \quad (1.2.10)$$

いま、慣性系  $S$  で質点  $P$  に力  $f$  が働くとすると、質点  $P$  の  $S$  系における運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_x \\ m\ddot{y} = f_y \end{cases} \quad (1.2.11)$$

で表わされます<sup>5</sup>。また、(1.2.10) より

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - x'\omega^2) \cos \omega t - (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - y'\omega^2) \sin \omega t \\ \ddot{y} = (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - x'\omega^2) \sin \omega t + (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - y'\omega^2) \cos \omega t \end{cases} \quad (1.2.12)$$

<sup>3</sup> 慣性系には真の力のみ存在し、見かけの力は存在しない。

<sup>4</sup> 地上に固定した座標系を慣性系としておく。

<sup>5</sup> 質点は静止していないことに注意！外力  $f$  が働いて加速度運動している質点を慣性系  $S$  から見た場合と回転座標系 (非慣性系)  $S'$  から見た場合の議論を行っている。

が得られ, (1.2.11), (1.2.12) より

$$\begin{cases} f_x = A \cos \omega t - B \sin \omega t \\ f_y = A \sin \omega t + B \cos \omega t \end{cases} \quad \text{ただし, } \begin{cases} A = m(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - x'\omega^2) \\ B = m(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - y'\omega^2) \end{cases} \quad (1.2.13)$$

これから

$$\begin{aligned} A &= f_x \cos \omega t + f_y \sin \omega t \\ B &= -f_x \sin \omega t + f_y \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

が得られます。また, 力  $f$  の  $x', y'$  成分は

$$\begin{cases} f'_x = f_x \cos \omega t + f_y \sin \omega t \\ f'_y = -f_x \sin \omega t + f_y \cos \omega t \end{cases} \quad (1.2.15)$$

となるので, (1.2.14), (1.2.15) より, 非慣性系  $S'$  における質点  $P$  の運動方程式として

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = f'_x + m\omega^2 x' + 2m\omega\dot{y}' \\ m\ddot{y}' = f'_y + m\omega^2 y' - 2m\omega\dot{x}' \end{cases} \quad (1.2.16)$$

を得ます。

質点  $P$  の  $S$  系における運動方程式 (1.2.11) と  $S'$  系における運動方程式 (1.2.16) を比較すると,  $S'$  系では実際に質点に働いている外力  $f'_x, f'_y$  に加え, 慣性力として遠心力 ( $m\omega^2 x', m\omega^2 y'$ ) と ( $2m\omega\dot{y}', -2m\omega\dot{x}'$ ) の力が働いていることがわかります。2つ目の見かけの力をコリオリ力と呼んでいます。遠心力やコリオリ力はどの方向に働いているのかを調べるために, 大きさ  $\omega$ ,  $z$  軸の正の向きをもつ回転ベクトル  $\omega$  を

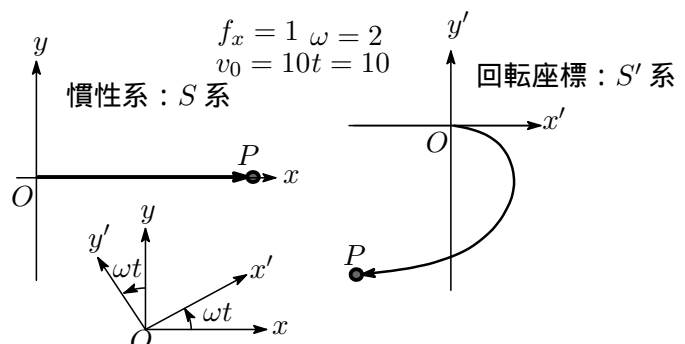
$$\omega = (0, 0, \omega) \quad (1.2.17)$$

で定義します。  $x' = (x', y'), v' = (\dot{x}', \dot{y}')$ , 遠心力を  $f'_c$ , コリオリ力を  $f'_o$  とすると

$$\begin{aligned} f'_c &= m\omega^2 x' \\ f'_o &= 2m v' \times \omega \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

と表わせます<sup>6</sup>。これから, 遠心力は回転中心から外に向かって働く力で, コリオリ力は質点の速度ベクトル  $v'$  に垂直で, 質点の進行方向に向かって右向きに働く力であることがわかります。

簡単な例として慣性系  $S$  で  $m=1$  の質点  $P$  が  $x$  軸方向に  $f=1$  の外力を受けて運動しているケースを取り上げます。質点  $P$  の動きを非慣性系の回転座標  $S'$  で見ると, その軌跡はどうみえるでしょうか。この軌跡は (1.2.16) の微分方程式を解いて求められます。解くべき微分方



<sup>6</sup>  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$



方程式は (1.2.16) で  $f_x = 0, f_y = 0$  とおいて

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = \cos \omega t + \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \\ m\ddot{y}' = -\sin \omega t + \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' \end{cases}$$

Mathematica を使って  $\omega = 2, v_0 = 10$  として  $t = 10$  までの質点  $P$  の軌跡を描くと上図のようになります。  $S'$  系では遠心力とコリオリの力が働いて質点  $P$  はあるカーブを描いて動いていく様子が分かります。

## 1.3 ガリレイの相対性原理とガリレイ変換

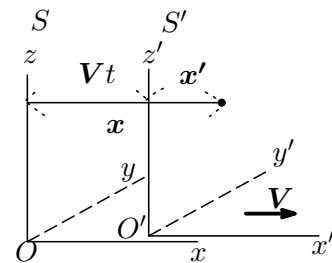
### 1.3.1 ガリレイの相対性原理

上で見てきたように、外力が物体の速度に無関係ならば、どの慣性系を採用してもニュートン力学の法則はまったく同じ形に書き表せるということが分かりました。これをガリレイの相対性原理といいます<sup>7</sup>。

### 1.3.2 ガリレイ変換

$x$  から  $x'$  への変換 (1.2.1) をガリレイ変換<sup>8</sup>といいます。この変換をよく見ると、物体の  $S, S'$  系における位置ベクトルはそれぞれ  $x, x'$  で区別されていますが、時間  $t$  にはそのような区別がなされていません。これは、 $S$  系にいる観測者も  $S'$  系にいる観測者も同じ時刻を持っているということが暗黙の了解事項となっているからです（普通そのように考えますね）。つまり、それぞれの座標系での時刻を  $t, t'$  とすると

$$t = t' \tag{1.3.1}$$



が仮定されています。そこで、改めてガリレイ変換を書くと

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \tag{1.3.2}$$

となります。ガリレイの相対性原理はガリレイ変換によって変換するあらゆる慣性系においてニュートンの法則が不変であると表現できます<sup>9</sup>。

さて、 $S$  系において速度  $v$  で走っている物体をその座標系に対して  $V$  で動いている座標系からながめると、速度は (1.2.2) より

$$v' = v - V \tag{1.3.3}$$

と速度の合成則が成立します。ところで、速度の合成則を利用すれば、ニュートン力学では物質の速度をいくらでも早くすることができ、光速以上の速度も実現できることとなります。一方、アインシュタインの相対性理論によれば、光速より早いものはありえないので、この点においてガリレイ変換は修正を迫られ、また、ガリレイ変換に対して不変にできているニュートンの法則も変更せざるを得なくなります。

<sup>7</sup> 物体の座標と速度は慣性系によって異なるが、物体の加速度はすべての慣性系に対して不変といことからきています。

<sup>8</sup> 1つの慣性系から他の慣性系に移す変換。

<sup>9</sup> 「ニュートン力学はガリレイ変換に関して共変な理論である」ともいわれる。



あとでローレンツ変換の式と比較するときのために、ガリレイ変換の式 (1.3.3) を次のように書き換えておきます。  $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$  とおくと、

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V_1 & 1 & 0 & 0 \\ -V_2 & 0 & 1 & 0 \\ -V_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow x'_\mu = \sum_{\nu=0}^4 G_{\mu\nu} x_\nu \quad (1.3.4)$$

ここで、 $G_{\mu\nu}$  は 2 つの慣性系の相対速度  $V$  だけで決まります。

### 1.3.3 ガリレイ変換群

ガリレイ変換全体は群をなすことを以下に示しておきます。群の定義は

1.  $G$  の任意の要素  $AB$  に対して積  $C$  が定義され、積  $C$  も  $G$  の要素となる。これを  $C = AB$  と書く。
2.  $G$  の任意の要素  $A$  に対して、 $AE = EA = A$  が成り立つような要素  $E$  が  $G$  の中に存在する。 $E$  を単位元と呼ぶ。
3.  $G$  の任意の要素  $A$  に対して、 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$  となるような逆元  $A^{-1}$  が  $G$  に存在する。
4. 3乗積  $ABC$  が一意的に決まる。すなわち  $A(BC) = (AB)C = ABC$ 。結合則。

さて、(1.3.2) のガリレイ変換を  $G(\mathbf{V})$  と書くと

$$\begin{aligned} G(\mathbf{V}) : x' &= x - \mathbf{V}t, & t' &= t \\ G(\mathbf{V}') : x'' &= x' - \mathbf{V}'t', & t'' &= t' \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

ここで、 $x \rightarrow x' \rightarrow x'', t \rightarrow t' \rightarrow t''$  と連続した変換は  $G(\mathbf{V}')G(\mathbf{V})$  という積で表わされます。これを具体的に計算すると

$$x'' = (x - \mathbf{V}t) - \mathbf{V}'t' = x - (\mathbf{V}' + \mathbf{V})t, \quad t'' = t \quad (1.3.6)$$

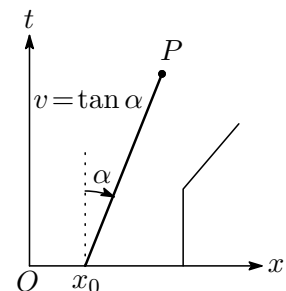
となり、右辺は  $G(\mathbf{V}' + \mathbf{V})$  なので

$$G(\mathbf{V}')G(\mathbf{V}) = G(\mathbf{V}' + \mathbf{V}) \quad (1.3.7)$$

となつて、1 番目の定義を満足します。結合則の成立は明らかですね<sup>10</sup>。単位元<sup>11</sup>は  $G(\mathbf{0})$  で、 $G(\mathbf{V})$  の逆元は  $G(-\mathbf{V})$  です<sup>12</sup>。

### 1.3.4 ガリレイ変換の幾何学的表示

縦軸に  $t$ 、横軸に  $x$  をとった時空間を考えます。 $x$  軸上を一定の速度  $v$  で走る質点の経路をこの時空間に描くと、 $x = vt + x_0$  の関係から右図のような直線となります。時空間に描かれた質点の経路を世界線と呼んでいます。世界線は直線とは限らず、例えば等加速度運動をする質点の世界線は放物線となるし<sup>13</sup>、静止していた物体がある瞬間にある速度で運動し続けるときには、世界



<sup>10</sup>  $G(\mathbf{V})(G(\mathbf{V}')G(\mathbf{V}'')) = G(\mathbf{V})G(\mathbf{V}' + \mathbf{V}'') = G(\mathbf{V} + \mathbf{V}' + \mathbf{V}'')$ , etc

<sup>11</sup> 何もしない。

<sup>12</sup>  $G(\mathbf{V})G(-\mathbf{V}) = G(-\mathbf{V})G(\mathbf{V}) = G(\mathbf{0})$

<sup>13</sup> 自由落下する質点は  $x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$

線の一部は垂直で、ある点で折れた直線となります。

さて、ガリレイ変換によって時空間がどのように描かれるか、またその幾何学を使って速度の合成則を導きます。ガリレイ変換は次式で表わされました。

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt \\t' &= t\end{aligned}\tag{1.3.8}$$

変換後の時空間の図は、原点では  $(x', t) = (0, 0)$  となるので両座標系の原点は一致します。  $x'$  軸は  $t' = 0$  なので、(1.3.8) より  $x' = x$  で  $x$  軸と一致します。

同様に、 $t'$  軸は  $x' = 0$  なので、これは  $t = (1/V)x$  の関係を満たし、 $(t, x)$  座標系で傾き  $1/V$  の直線が  $t'$  軸となります。したがって、 $t$  軸と  $t'$  軸のなす角を  $\phi$  とすると、

$$V = \tan \phi\tag{1.3.9}$$

の関係となり、相対速度が大きければ  $t'$  軸は大きく傾きます ( $V \rightarrow \infty : \phi \rightarrow \pi/2$ )。図より

$$\tan \phi = (x_p - x'_p)/t_p, \quad \therefore x'_p = x_p - t_p \tan \phi = x_p - Vt_p\tag{1.3.10}$$

となって、第1式の変換則がでてきます。

次に、 $t_p = t'_p \cos \phi$  より

$$t'_p = \frac{t_p}{\cos \phi} = t_p \sqrt{1 + \tan^2 \phi} = \sqrt{1 + V^2} t_p\tag{1.3.11}$$

これは、(1.3.8) の第2式と較べると  $\sqrt{1 + V^2}$  だけ余計な係数が掛かっています。幸いにもこの係数は  $t$  や  $x$  に依存しないので、 $t'_p$  軸の目盛りを  $\sqrt{1 + V^2}$  だけスケール変換してやっても何の影響もありませんね。そうすると

$$\cos \phi = \frac{OA}{OB} = \frac{t_p}{t'_p \sqrt{1 + V^2}} = \frac{t_p}{t'_p} \cos \phi, \quad \therefore t'_p = t_p\tag{1.3.12}$$

となって、めでたく第2式の変換則がでてきました。

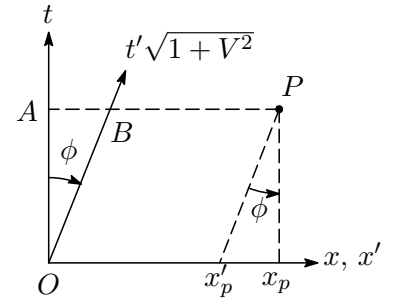
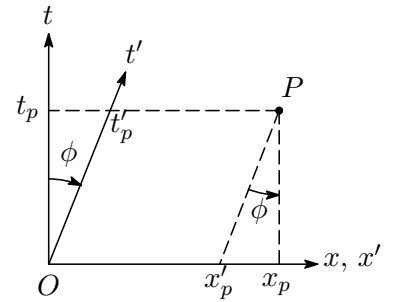
注：図を使って定量的な議論する場合には、 $t'$  軸は  $t$  軸の時間単位と同じものを使わなければなりません。 $t'$  軸の単位時間として  $t$  軸の単位時間の  $\sqrt{1 + V^2}$  倍となります。

それでは、図を使って速度の合成則を導いてみましょう。質点  $P$  は  $S$  系で速度  $v$  で運動しているとすると、その世界線は図(1)の  $OP$  で表わされます。 $S$  系に対して速度  $V$  で走っている座標系  $S'$  からこの質点  $P$  の運動を眺めると、図(2)のようになります。そうすると

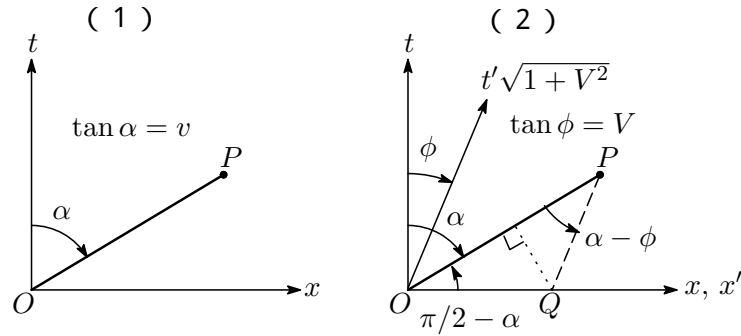
$$\begin{aligned}PQ \sin(\alpha - \phi) &= OQ \sin(\pi/2 - \alpha) \\&= OQ \cos \alpha \\ \therefore \frac{OQ}{PQ} &= \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos \alpha} \\&= \tan \alpha \cos \phi - \sin \phi = \cos \phi (\tan \alpha - \tan \phi) = \frac{v - V}{\sqrt{1 + V^2}}\end{aligned}$$

一方、 $OQ = x'_p$ 、 $PQ = \sqrt{1 + V^2} t'_p$  なので、

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}} \frac{x'_p}{t'_p} = \frac{v'}{\sqrt{1 + V^2}}, \quad \therefore v' = v - V$$



となって、速度の合成則が導かれました。



### 1.3.5 波の伝播とガリレイ変換

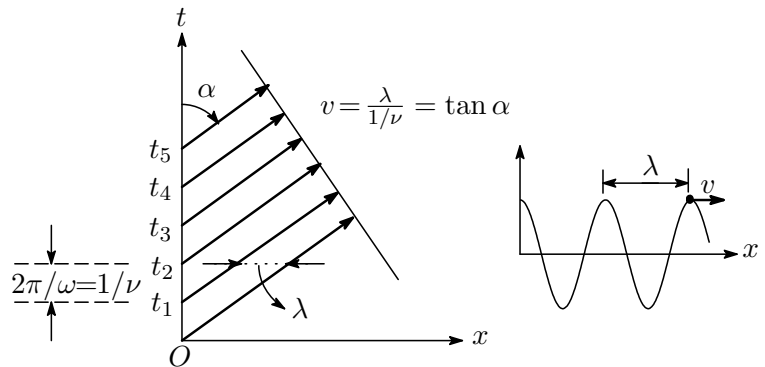
#### ドップラー効果

空間の中を進んでいく波を時空間の中に描くことを考えます。ここでは簡単化のために1次元空間を伝わる波を考えます。波の1つの山が一定速度  $v$  (位相速度) で  $x$  軸方向に走っている波は次式で表わされます。

$$\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t), \quad (k = 2\pi/\lambda, \omega = 2\pi\nu, T = 2\pi/\omega) \quad (1.3.13)$$

ここで  $k$ : 波数,  $\omega$ : 角振動数,  $\nu$ : 振動数,  $T$ : 周期で、波の山の速度は波長  $\lambda$  と振動数の積  $v = \lambda\nu$  で表されます。

$t = 0$  に  $x = 0$  を出発した先頭の波は  $x$  軸方向にどんどん進み、 $t_1 = 2\pi/\omega$  後には次の波の山が原点を通過します。この状況を時空間に描くと右図のようになります。



さて、波源が  $x = 0$  に静止しており、観測者が  $x$  軸の方向に速さ  $V$  で遠ざかっていく場合を考えます。但し、 $V < v$  とします。時空間におけるガリレイ変換の図を下に示します。

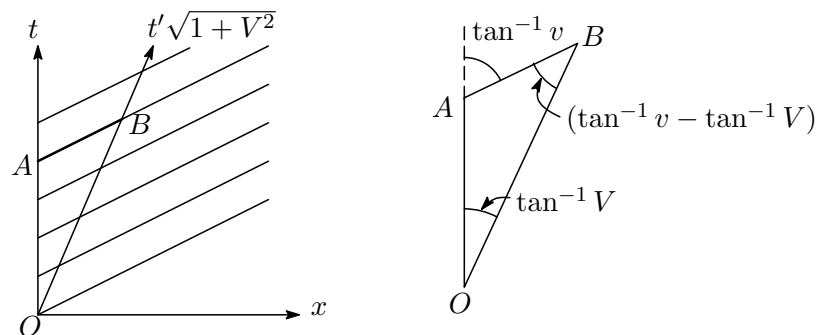
$O$  から  $A$  までの時間に  $n$  個の波の山が放出されたとするとき、

$$OA = n \times \frac{1}{\nu} = \frac{n}{\nu} \quad (1.3.14)$$

同じ数の波の山を観測者が受けとるまでには時間  $OB$  だけかかります。

観測者が観測する波の振動数を  $\nu'$  とすると、 $t'$  軸のスケール変換を考慮して

$$OB = \frac{n}{\nu'} \sqrt{1 + V^2} \quad (1.3.15)$$



となります。正弦定理を使うと

$$\begin{aligned}
 \frac{OB}{\sin \angle OAB} &= \frac{OA}{\sin \angle OBA} \\
 \therefore \frac{OA}{OB} &= \frac{\sin \angle OBA}{\sin \angle OAB} \\
 &= \frac{\sin(\tan^{-1} v) \cos(\tan^{-1} V) - \cos(\tan^{-1} v) \sin(\tan^{-1} V)}{\sin(\tan^{-1} v)} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} \\
 &= \frac{v - V}{v} \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}}
 \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

ただし,

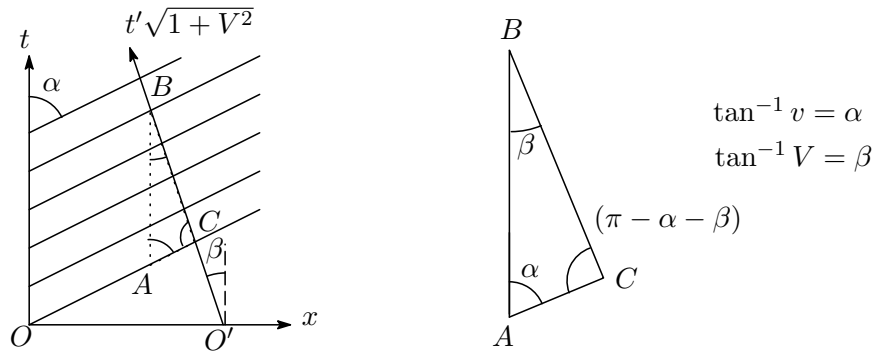
$$\begin{cases} \tan^{-1} v = \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}, & \sin \alpha = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}} \\ \tan^{-1} V = \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}}, & \sin \beta = \frac{V}{\sqrt{1 + V^2}} \end{cases}$$

ところで(1.3.16)の右辺は(1.3.14), (1.3.15)より  $OA/OB = \frac{v'}{v} \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}}$  となるので, (1.3.16)は

$$\frac{v'}{v} = \frac{v - V}{v} = 1 - \frac{V}{v} < 1 \tag{1.3.17}$$

となり, 波の源から遠ざかる観測者に対しては, 波の振動数は小さくなります。

次に, 波の源に観測者が  $V$  の速さで近づく場合を考えます。この場合には  $t'$  軸の傾きが  $-1/V$  となります。



観測者の観測する波の振動数を  $\nu'$  とすると

$$BC = \frac{n}{\nu'} \sqrt{1 + V^2} \tag{1.3.18}$$

正弦定理を使って

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{v + V}{v} \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}} \tag{1.3.19}$$

一方,  $AB = n/\nu$  なので  $AB/BC = (n/\nu')\sqrt{1 + V^2}$ 。したがって, (1.3.19)より

$$\frac{v'}{v} = \frac{v + V}{v} = 1 + \frac{V}{v} > 1 \tag{1.3.20}$$

波の源に近づく観測者に対しては, 波の振動数は大きくなります。

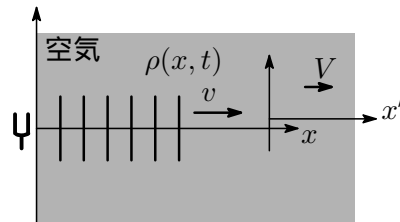
## 1.4 波動方程式とガリレイ変換

空気中を速度  $v$  で伝わる密度波（音波）の方程式は、 $\rho(x, t)$  を空気の密度とすると次式で与えられます。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \rho(x, t) = 0 \quad (1.4.1)$$

波動方程式の中にある  $v$  は、音が伝わる媒質としての 空気が静止している座標系 に対する音波の速度  $v$  です。

この方程式を空気に対して速さ  $V$  ( $\neq v$ ) で  $x$  軸方向に遠ざかっている座標系  $S'$  で記述するとどうなるか？ それは (1.4.1) をガリレイ変換をすればよいわけで、簡単のために 1 次元の場合を取り上げます。  $x' = x - Vt$ ,  $t' = t$  として



$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \end{cases} \quad (1.4.2)$$

を 1 次元波動方程式に入れて整理すると<sup>14</sup>

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2V}{v^2 - V^2} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{v^2 - V^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \rho(x', t') = 0 \quad (1.4.3)$$

が得られます。この式は (1.4.1) と異なり、波動方程式はガリレイ変換に対して不変でないことがわかります。つまり、空気に対して静止している観測者に対して波動方程式が成り立っていても、空気に対して  $V$  の速度で動いている観測者に対しては同じ方程式が成り立たないということです。

さて、光（電磁波）の場合を考えます。光の波動方程式は次のマクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (1.4.4)$$

から導かれ、電場を  $\mathbf{E}$ 、磁場を  $\mathbf{B}$  とすると、電磁波の波動方程式は

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

で与えられます。音波は空気という媒質の振動（粗密振動）が伝播していくものですが、光（電磁波）を伝える媒質は何でしょうか？ とりあえずここでは、それをエーテルとし、宇宙に充満しているエーテルの揺れ動きが電場や磁場の振動として伝わっていくとしておきます<sup>15</sup>。波動方程式にでてくる光速  $c$  は静止しているエーテルに対する速度ということになります。

ニュートン力学はすべての慣性系で成立しましたが、光の理論（マクスウェルの理論）はガリレイ変換に対して不変でないため、エーテルに対して静止している座標系でのみ成立する理論

<sup>14</sup> このセクションの詳しい話は「相対論」のコーナーの「波動方程式とガリレイ変換」のレポートを参照されたし。

<sup>15</sup> このあたりの歴史的なお話はよくご存知のことと思います。

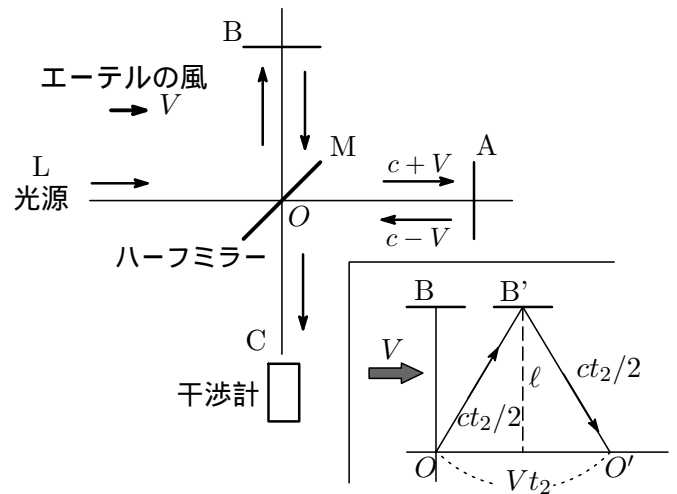
ということになります。エーテルに対して速度  $V$  で動いている座標系では波動方程式 (1.4.3) で  $v = c$  としたものを解くことにはなりますが、問題は  $V$  の値ですね。これをどのようにして測るか。。。

音速の場合、風が  $x$  軸方向に  $V$  の速度で吹いていれば、地上に静止している観測者には見かけ上  $v + V$  の音速が観測されるし、逆に  $-x$  軸方向に風が吹いていれば  $v - V$  と観測されます<sup>16</sup>。光の場合、空気の風に相当するのはエーテル風で、 $x$  軸方向に吹くエーテルの風向きによって光速は見かけ上  $c + V$  あるいは  $c - V$  と観測されるはずですが、地球は自転や公転<sup>17</sup>をしているので宇宙に静止しているエーテルに対して動いており、地上の観測者からすれば速度  $V$  のエーテルの風が吹いていることになります。

### 1.4.1 マイケルソン・モーレーの実験

マイケルソン・モーレーは 1887 年の有名な実験でエーテルの速度  $V$  の測定を試みました。

エーテルの風が図に示した方向に速度  $V$  で吹いているとします。光源  $L$  から出た光は、 $O$  にあるハーフミラー  $M$  でその一部は反射されて  $OB$  の方向に向かい、鏡  $B$  で反射されて再び  $M$  に戻り、 $M$  を透過して干渉計  $C$  に入ります。また、 $L$  からきた光の残りは  $M$  を透過して  $OA$  の方向へ向かい、鏡  $A$  で反射されて再び  $M$  に戻り、その一部は反射されて干渉計  $C$  に入ります。OA,  $OB$  の距離をそれぞれ  $l$  とすると、光が光路  $OA$  を往復する時間を  $t_1$  とすれば、往路の光の速度は  $c + V$ 、帰路は  $c - V$  となるので



$$t_1 = \frac{l}{c+V} + \frac{l}{c-V} = \frac{2l/c}{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{V}{c} \quad (1.4.6)$$

一方、光路  $OB$  を通る光はエーテルの風の影響を受けて  $OB'$  方向へ流されるので、 $OB'O'$  という光路をたどることになり、その所要時間を  $t_2$  とすると、ピタゴラスの定理より

$$\left(\frac{1}{2}ct_2\right)^2 = l^2 + \left(\frac{1}{2}Vt_2\right)^2, \quad \therefore t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.4.7)$$

光が光源  $L$  からでて干渉計に入るまでの 2 つの光の光路差  $\Delta$  は  $\beta \ll 1$  として<sup>18</sup>

$$\Delta = c(t_2 - t_1) = 2l \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{1-\beta^2} \right) \approx -l\beta^2 \quad (1.4.8)$$

これは非常に小さい量ですが観測精度範囲内で、高精度な干渉計には干渉縞が観測されるはずですが、しかし、何度も精密な実験を行っても干渉縞は観測されずに終わりました。

この実験結果を説明するために、ローレンツとフィッツジェラルドはそれぞれ独立して次のような仮説（収縮仮説）を立てました。

「エーテルに対して速度  $V$  をもつすべての物体は、その運動方向に沿って長さが  $\sqrt{1-\beta^2}$  の割合で収縮する」

<sup>16</sup> 媒質の空気がそれぞれ  $V, -V$  で動いているとする。

<sup>17</sup> 地球の自転速度は赤道付近で約 0.5km/s。公転速度は約 30km/s と猛烈な速さ。

<sup>18</sup>  $c \sim 3 \times 10^{10}$  cm/sec,  $V$  として地球の公転速度をとると  $V \sim 3 \times 10^6$  cm/sec で圧倒的に光速の方が早い。

この仮説に従えば，光路 OA の長さは  $\ell/\sqrt{1-\beta^2}$  と縮まり， $t_1 = 2(\ell/c)/\sqrt{1-\beta^2}$  となって， $t_1 = t_2$  となり，その差を観測できないというマイケルソン・モーレーの実験結果を説明できます<sup>19</sup>。この問題の真の解決はご存知のようにアインシュタインの特殊相対性理論によってなされましたが，その話は後のお楽しみ。

#### M.E.M.O - 1: マクスウェル方程式のガリレイ変換

マクスウェルの方程式 (1.4.4) はエーテルに対して静止している座標系 ( $S$  系) で成立しました。いま，エーテルが速度  $V$  で任意の方向に吹いているとします。エーテルに固定した座標系 ( $S'$  系) でマクスウェルの方程式が成立しているとします。そうすると  $S$  系ではどのような方程式が成立するのでしょうか？ 結果は， $S$  系では次の方程式が成立します。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} - \frac{1}{c^2} \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t'} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho\end{aligned}\tag{1.4.9}$$

この式をヘルツの式と呼んでいます。

#### 1.4.2 波動方程式を不変にする変換

さて，波動方程式を不変にするような変換はあるのでしょうか。ここではその問題を考えます。簡単のために 1 次元の波動方程式を考えます<sup>20</sup>

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0 \longleftrightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \phi(u, w) = 0\tag{1.4.10}$$

( $x, t$ ) と新たな変数 ( $u, w$ ) の間に  $u = Ax$  なる線形関係を仮定します<sup>21</sup>。

$$\begin{cases} u = Ax + Bt \\ w = Cx + Dt \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\tag{1.4.11}$$

また，逆変換  $x = A^{-1}u$ , ( $A^{-1} \neq 0$ ) も存在すると仮定すると

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0 \\ \therefore \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.4.12}$$

となります。ここで微分演算子の関係を求めておくと， $x = x(u, w)$ ,  $t = t(u, w)$  なので

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} = A \frac{\partial}{\partial u} + C \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w} = B \frac{\partial}{\partial u} + D \frac{\partial}{\partial w} \end{cases}\tag{1.4.13}$$

<sup>19</sup> 地上にあるすべての物差しも同じ仕方で収縮するので，「光路 OA の収縮」を観測しようとしても，地上では決して確認することができない。

<sup>20</sup> 3 次元への拡張は自動的にできます。

<sup>21</sup> このあたりの話は「ガリレイ変換と波動方程式」も参照ください。



したがって, (1.4.10) の左の項は

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) \\ &= \left( A^2 - \frac{B^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - (D^2 - c^2 C^2) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \left( AC - \frac{BD}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

となります。そこで,

$$\begin{cases} A^2 - B^2/c^2 = 1 \\ D^2 - c^2 C^2 = 1 \\ AC - BD/c^2 = 0 \end{cases} \quad (1.4.15)$$

となるように  $A, B, C, D$  を決めてやることができれば, (1.4.14) は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \quad (1.4.16)$$

となり, 新たな変数  $(u, w)$  で記述した波動方程式は元の形と同じになります。問題は, そのような  $A, B, C, D$  が見つかるかということですが, (1.4.15) は 4 個の未知数に方程式が 3 個なので未知数の 1 個は決まりません。解は 1 個の未知数をパラメータとして表わされるはずで,  $A$  をパラメータとして  $B, C, D$  を形式的に解き, その 1 つの解として

$$B = -c\sqrt{A^2 - 1}, \quad C = -\frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}, \quad D = A \quad (1.4.17)$$

を得ます。 $\chi$  を実数として,  $A = \cosh \chi$  とおくと<sup>22</sup>

$$B = -c \sinh \chi, \quad C = -\frac{1}{c} \sinh \chi, \quad D = \cosh \chi \quad (1.4.18)$$

となり,  $B, C, D$  が得られます。したがって, 求める変換式は, (1.4.11) より

$$\begin{cases} u = x \cosh \chi - ct \sinh \chi \\ w = t \cosh \chi - \frac{x}{c} \sinh \chi \end{cases} \quad (\chi: \text{実数}) \quad (1.4.19)$$

となります。双曲線関数と三角関数との間に成り立つ関係式<sup>23</sup>

$$\begin{aligned} \cosh \chi &= \cos(i\chi) = \frac{e^\chi + e^{-\chi}}{2} \\ \sinh \chi &= -i \sin(i\chi) \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

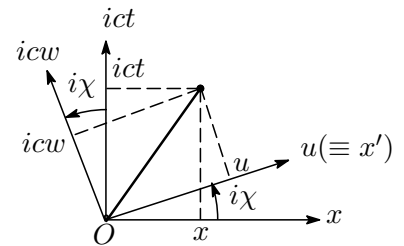
を使うと (1.4.19) は

$$\begin{cases} u = x \cos(i\chi) + ict \sin(i\chi) \\ icw = -x \sin(i\chi) + ict \cos(i\chi) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u \\ icw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} \quad (1.4.21)$$

と表せます。ただし,  $\theta = i\chi$ 。

これは縦軸に  $ict$  軸をとり, 横軸に  $x$  軸をとった座標系での虚数角  $i\chi$  の回転で, 形式的には 2 次元平面の座標回転を表わします。(1.4.21) より

$$\begin{aligned} u + (icw)^2 &= (x \cos \theta + ict \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + ict \cos \theta)^2 \\ &= x^2 + (ict)^2 \end{aligned} \quad (1.4.22)$$



<sup>22</sup>  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

<sup>23</sup>  $\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2, \sinh \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2, \cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2, \sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$

で、 $x^2 + (ict)^2$  はこの変換の不変量。以上、要約すると「波動方程式を不変にする変換とは、 $x$  軸と  $ict$  軸によって張られる空間での虚数角  $i\chi$  の回転で、原点からの距離の 2 乗に相当する  $x^2 + (ict)^2$  はこの変換の不変量」というです。

3次元波動方程式の場合も全く同様で、波動方程式を不変にする変換は、 $x, y, z, ict$  で張られる4次元空間において、 $x$  軸と  $ict$  軸のなす平面内における角  $i\chi$  だけの回転ということになります。

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + x_0 \sin \theta \\ y' = y \\ z' = z' \\ ict' = -x \sin \theta + ict \cos \theta \end{cases} \quad (1.4.23)$$

行列形式で書くと、

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \theta = i\chi \quad (1.4.24)$$

変換の不変量は

$$(ict')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ict)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.4.25)$$

となります。

#### ガリレイ変換との関係

波動方程式を不変にする変換は、虚数角  $i\chi$  の回転であることが判りました。その物理的意味はよく分からないものの、回転角が小さい場合を考えると

$$\begin{aligned} \cosh \chi &\simeq 1 \\ \sinh \chi &\simeq \chi \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

と近似できるので、(1.4.19) は

$$\begin{cases} u = x - ct\chi \\ w = t - \frac{x}{c}\chi \end{cases} \quad (1.4.27)$$

となります。そこで  $\chi = V/c$  とおくと、(1.4.28) は

$$\begin{cases} u = x - Vt \\ w = t - \frac{xV}{c^2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \quad (1.4.28)$$

となるので、 $u$  を  $x'$ 、 $w$  を  $t'$  とみなし、 $c \rightarrow \infty$  とおけば、(1.4.28) の矢印で示す式に見るようにガリレイ変換になります。ということで、波動方程式を不変にする4次元の回転とニュートン力学を不変にするガリレイ変換とはまったく別物ではなく、光速度に比較して非常に遅い運動を問題にするかぎり、 $u$  を  $x'$ 、 $w$  を  $t'$  とみなせば、両変換は一致することになります。

次章に進む前に、いままでの話をざっと整理しておく次のようになるでしょう。

1. ニュートン力学はガリレイ変換  $x(t)' = x(t) - Vt$ 、 $t' = t$  に対して不変である。
2. ガリレイ変換から帰結される速度の合成則は  $v' = v - V$  で、速度の上限というものは規定されない。速度が無限大ということもあり得ることになる。

3. 波動方程式はガリレイ変換に対して不変でない。電磁波の媒質としてエーテルを仮定する。マクスウェル理論による電磁波の波動方程式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.4.29)$$

は静止しているエーテルに固定した座標系に対して成立するが、エーテルに対して速度  $V$  で動いている座標系では (1.4.29) は成り立たず、1次元の場合を表記すれば

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2V}{c^2 - V^2} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2 - V^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \phi(x', t') = 0 \quad (1.4.30)$$

となる。 $c$  はエーテルに対する速度。

4. 地上は自転、公転に伴い見かけ上エーテルの風が吹いており、エーテルの速度  $V$  を知る必要がある。これは光の速度を観測することによって求めることが可能はずである。
5. しかし、マイケルソン・モーレーの精密な実験からは光の速度に及ぼすエーテルの影響は観測されなかった。この実験結果を説明するために、ローレンツらは「エーテルに対して速度  $V$  をもつすべての物体は、その運動方向に沿って長さが  $\sqrt{1 - \beta^2}$  の割合で収縮する」という収縮仮説を提案。
6. 光の波動方程式 (1.4.29) を不変にする変換が見つかった。この変換は「 $x$  軸と  $ict$  軸によって張られる空間での虚数角  $i\chi$  の回転」である。この変換ではニュートンの運動方程式は不変とならないが、光速に対して非常に小さい速度を問題にする場合には、ガリレイ変換と完全に一致する。
7. 力学現象と電磁現象を統一的に記述できる理論体系はないのだろうか？