

第2章 特殊相対論における空間と時間

2.1 アインシュタインの考え

アインシュタインは、1905年の「運動物体の電気力学」という論文の中で

1. 力学の方程式が成り立つすべての慣性座標系に対しては、同一の電気力学と光学の法則が成り立つ。(アインシュタインの相対性原理)
2. すべての慣性系において、光の真空中における速度は、光を放出する物体の運動状態によらず、すべて相等しい値をもつ。(光速不変の原理)

という2つの仮定をおけば、エーテルの導入という余計なことを考えなくても、力学現象、電磁現象を記述できる統一的な理論が構築できることを示しました。これを特殊相対性理論と呼んでいます¹。ガリレイ変換では時刻 t はどの慣性座標系でも同じという絶対時間を仮定していましたが、特殊相対性理論では、時間 t は各座標系ごとに異なった値をとるというように、時間・空間の概念を根底から再構築しています。

2.2 ローレンツ変換

マクスウェルの理論がそのまま成り立つ慣性座標系を S とし、もう1つの慣性座標系を S' とします。ガリレイ変換では $S(x, t)$ から $S'(x', t')$ (あるいはその逆) への変換は線形変換で表わされました。そこで、ガリレイ変換を一般化した線形変換を考えます²。簡単化のために、座標系 S' は座標系 S の x 方向に向けて速度 V で動いていると仮定し、その間に次の線形関係が成り立つとします³。

$$\begin{aligned}x' &= A(V)x + B(V)x_0 \\y' &= K(V)y \\z' &= K(V)z \\x'_0 &= C(V)x + D(V)x_0\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

ただし、

$$x_0 = ct, \quad x'_0 = ct'\tag{2.2.2}$$

です。 S 系は S' 系から見れば $-V$ の速度で遠ざかっています。 S, S' の2つの座標系はまったく等価(空間・時間の一樣性)であるので、係数 A, B, C, D, K はどちらの場合も同じになると考えられ、 S' 系から見た S の関係は上式で V を $-V$ で入れ替えればよく

$$\begin{aligned}x &= A(-V)x' + B(-V)x'_0, \quad y = K(-V)y' \\z &= K(-V)z', \quad x_0 = C(-V)x' + D(-V)x'_0\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

¹ "特殊" という理由は、互いに加速しているような系間の関係は除外されていることから来ており、互いに加速しているような系間の関係は、一般相対性理論で取り扱われます

² 仮に非線形変換を採用すると、1つの慣性系での等速度運動はもう1つの慣性系において速度はその物体の位置にも関係してきて、空間の一樣性が成立しなくなります。アインシュタインの原論文では『我々が空間と時間に付与する一樣性のために、方程式が線形でなければならないのは明らかである』と述べられています。

³ 第1式の右辺に x_0 が、第4式の右辺に x が入っていることに注意！空間と時間が同列に扱われ、このことはそれぞれの慣性系にはそれぞれの時間を持つということを意味しています。

と表すことができます。次に，兩座標系で $x^2 - c^2t^2$ は不変⁴，すなわち

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2 \quad (2.2.4)$$

という条件をおきます。以上の関係式から係数 A, B, C, D, K を求めていきましょう。(2.2.1) を (2.2.3) に入れて

$$\begin{aligned} x &= \{A(-V)A(V) + B(-V)C(V)\}x + \{A(-V)B(V) + B(-V)D(V)\}x_0 \\ y &= K(-V)K(V)y \\ z &= K(-V)K(V)z \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$x_0 = \{C(-V)B(V) + (-V)D(V)\}x + \{C(-V)A(V) + D(-V)C(V)\}x_0$$

これが任意の x, y, z, x_0 で成り立つためには，両辺の各係数が等しくなければならないので

$$\begin{cases} A(-V)A(V) + B(-V)C(V) = 1 \\ A(-V)B(V) + B(-V)D(V) = 0 \\ K(-V)K(V) = 1 \\ C(-V)B(V) + (-V)D(V) = 0 \\ C(-V)A(V) + D(-V)C(V) = 1 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

次に，(2.2.3) を (2.2.5) の左辺に入れると

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - x_0'^2 &= \{A^2(V) - C^2(V)\}x^2 + K^2(V)(y^2 + z^2) \\ &\quad - \{D^2(V) - B^2(V)\}x_0^2 + 2\{A(V)B(V) - C(V)D(V)\}x_0x \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

が得られます。ここで右辺が $x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2$ という形にまとまるように係数 A, B, C, D, K の関係式を求めていくと

$$\begin{aligned} A^2(V) - C^2(V) &= D^2(V) - B^2(V) = K^2(V) = 1 \\ A(V)B(V) - C(V)D(V) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

が得られます。これから⁵

$$K(V) = 1 \quad (2.2.9)$$

次に，(2.2.8) の第 2 式より

$$\frac{C(V)}{A(V)} = \frac{B(V)}{D(V)} \equiv -\beta(V) \quad (2.2.10)$$

これと (2.2.8) の第 1 式より

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{C}{A}\right)^2 &= 1 - \beta^2 = \frac{1}{A(V)^2}, \quad \therefore A(V) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \\ 1 - \left(\frac{B}{D}\right)^2 &= 1 - \beta^2 = \frac{1}{D(V)^2}, \quad \therefore D(V) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

が得られます。次に (2.2.8) より $V \rightarrow 0$ で (x', x'_0) が (x, x_0) に戻る⁶ことを使うと，(2.2.1) より

$$A(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}}, \quad D(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \quad (2.2.12)$$

⁴ 4次元空間における距離に相当。

⁵ 臍を曲げて， $K^2(V) = 1$ を満たすのは $K(V) = 1$ 以外も考えられますが，それらは物理的に不合理な結果となることが分かっています。

⁶ $V = 0$ で $x' = x, x'_0 = x_0$

また, (2.2.8) の第 1 式より

$$C(V) = \frac{-\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}}, \quad B(V) = \frac{-\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \quad (2.2.13)$$

が得られます。(2.2.12), (2.2.13) を (2.2.6) の第 2 式に入れると

$$\begin{aligned} & A(-V)B(V) + B(-V)D(V) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta(-V)^2}} \frac{-\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} + \frac{-\beta(-V)}{\sqrt{1-\beta(-V)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} = 0 \\ &\therefore \beta(V) + \beta(-V) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

が得られ, A, B, C, D は 1 つの V の奇関数 $\beta(V)$ で表わされることとなります。これを使って (2.2.1) を書き換えると

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - \beta(V)x_0}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta(V)x}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + \beta(V)x'_0}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ x_0 = \frac{x'_0 + \beta(V)x'}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \end{array} \right. \quad (2.2.15)$$

となります。ついでに逆変換の式を右に書いておきました。

次に $\beta(V)$ ですが, これは次のようにして求められます。 S' 系での速度は

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial x_0} dx_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} dx - \frac{\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} dx_0 \\ dx'_0 &= \frac{\partial x'_0}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x'_0}{\partial x} dx = \frac{1}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} dx_0 - \frac{\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} dx \\ \therefore \frac{dx'}{dx'_0} &= \frac{dx - \beta(V)dx_0}{dx_0 - \beta(V)dx} = \frac{\frac{dx}{dx_0} - \beta(V)}{1 - \beta(V)\frac{dx}{dx_0}} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

となるので, いま S 系に静止している物体を考えた場合, この物体は S' 系から見れば $-V$ の速度で移動していることとなります。そこで, $dx/dx_0 = 0$, $dx'/dx'_0 = dx'/cdt' = -V/c$ とおけば, 上式より

$$\frac{V}{c} = \beta(V) \quad (2.2.17)$$

となって, $\beta(V)$ が求まります。(2.2.15) の分母から $\beta < 1$ でなければならず⁷, 光速以上の速さは存在しないこととなります。(2.2.15) と (2.2.17) を x 方向へのローレンツ変換 (これを x 方向へのローレンツブーストといいます。)と呼んでいます。(2.2.15) の第 1 式や第 4 式に見られるように, 時間は相手の座標系の位置にも依存するという点に注目してください。また, ガリレイ変換のときのように, すべての慣性系に共通した絶対的時間という概念はありません⁸。

ローレンツ変換で $V \ll c$ の場合, つまり $\beta \ll 1$ のとき, (2.2.15) を β で展開してその 1 次までとると

$$\begin{aligned} x' &= (x - \beta x_0)(1 - \beta^2)^{-1/2} \doteq (x - \beta x_0)(x + \beta^2/2) \doteq x - \beta x_0 = x - Vt \\ x'_0 &= (x_0 - \beta x)(1 - \beta^2)^{-1/2} \doteq (x_0 - \beta x)(x + \beta^2/2) \doteq x_0 - \beta x \doteq x_0, \quad \therefore t' = t \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

⁷ そうでないと分母は虚数になってしまう。

⁸ ただし, 絶対時間に相当するものとして固有時というのがありますが, これは相対論的力学のセクションで登場します。

となって、ガリレイ変換となります。ここで波動方程式を不変にする変換(4次元空間での回転)とローレンツ変換の関係を見てみましょう。双方の変換式を併記すると

$$\begin{cases} x' = x \cosh \chi - ct \sinh \chi \\ x'_0 = \frac{t}{c} \cosh \chi - x \sinh \chi \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{x - \beta(V)x_0}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta(V)x}{\sqrt{1 - \beta(V)^2}} \end{cases} \quad (2.2.19)$$

これから

$$\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \sinh \chi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \tanh \chi = \beta = \frac{V}{c} \quad (2.2.20)$$

という関係が得られます。虚数角 $\theta \equiv i\chi$ を使うと

$$\begin{aligned} \cosh \chi = \cos \theta = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \sinh \chi = -i \sin \theta = \beta/\sqrt{1 - \beta^2} \\ \begin{cases} x' = x \cos \theta + (ix_0) \sin \theta \\ ix'_0 = -x \sin \theta + (ix_0) \cos \theta \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ ix'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ix_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

ローレンツ変換は4次元空間での回転ということになります。

2.2.1 ローレンツ変換群

ある慣性系 S から別の慣性系 S' へのローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x) \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

でした。次に S' 系からもう1つ別の慣性系 S'' 系へのローレンツ変換で移ったとすると

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma'(x' - \beta' x'_0), \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - \beta'^2} \\ x''_0 &= \gamma'(x'_0 - \beta' x') \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

となります。さて、 S 系から S'' 系への変換もローレンツ変換となることを以下にみていきましょう。

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma'(x' - \beta' x'_0), \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - \beta'^2} \\ &= \gamma\gamma' \{ (1 + \beta\beta')x - (\beta + \beta')x_0 \} = \gamma\gamma'(1 + \beta\beta') \left(x - \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} x_0 \right) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

ここで

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \quad (2.2.25)$$

とおくと

$$\begin{aligned} 1 - \beta''^2 &= \frac{(1 + \beta\beta')^2 - (\beta + \beta')^2}{(1 + \beta\beta')^2} = \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta'^2)}{(1 + \beta\beta')^2} = \frac{1}{\{\gamma\gamma'(1 + \beta\beta')\}^2} \\ \therefore \gamma\gamma'(1 + \beta\beta') &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

これを上式に入れると

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} (x - \beta'' x_0) = \gamma'' (x - \beta'' x_0), \quad \gamma'' = 1/\sqrt{1 - \beta''^2} \quad (2.2.27)$$

全く同様にして

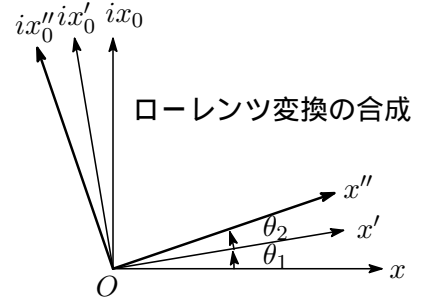
$$x_0'' = \gamma''(x_0 - \beta''x) \quad (2.2.28)$$

したがって, $S \rightarrow S''$ の変換はローレンツ変換になります。
回転行列を使った場合は以下の通りです⁹。

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \gamma_1, & \sin \theta_1 &= i\gamma_1\beta_1 \\ \cos \theta_2 &= \gamma_2, & \sin \theta_2 &= i\gamma_2\beta_2 \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

とにおいて, これから

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_1\gamma_2\beta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= i(\gamma_1\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_2) \end{aligned} \quad (2.2.30)$$



$S \rightarrow S' \rightarrow S''$ の変換は次の回転行列の積で表わされるので

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x'' \\ ix_0'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & i\gamma_1\beta_1 \\ -i\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & i\gamma_2\beta_2 \\ -i\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ix_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & i\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \\ -i\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ix_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ix_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

先ほどの式と比べると

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \\ \gamma''\beta'' &= \gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

これから

$$\beta'' = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \quad (2.2.33)$$

これは (2.2.25) に他なりません。また, (2.2.33) と (2.2.29) より

$$\begin{aligned} \gamma''^2(1 - \beta''^2) &= \gamma_1^2(1 - \beta_1^2)\gamma_2^2(1 - \beta_2^2) = 1 \\ \therefore \gamma'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

ローレンツ変換には逆変換も存在し, 単位変換 (なにも変換しない) もあるので, ローレンツ変換はガリレイ変換群のところで触れた群の定義を満たし, これをローレンツ変換群と呼んでいます。

2.3 同時性について

2.3.1 時刻合わせ

東京と大阪から同時に出発しようとか, “同時” という言葉を普段日常的に使いますが, 距離的に離れた場所 A, B での同時というのは, 双方で時計の針が同じ時刻を指していることですね。ところで 2 つの時計の時刻を合わせるのにどのようにすればよいでしょうか? それは, 2 つの時計 W_A, W_B を例えば場所 A で時刻合わせをして, それから時計 W_B を B の地点まで持って行けばいいのではないかと常識では考えますが, 相対論の世界では時計 W_B を動かすと W_B の

⁹ x_0 軸は虚数 i が掛かることに注意。

時を刻む速さ (テンポ) は W_A よりゆっくりとなり, B 点に到達したときには W_A の示す時刻とずれてしまっていることとなります。ということで, 時計を動かすのはまずいので, 2 点 A, B に時計 W_A, W_B を固定します。点 A から時刻 t_A に光を発射し, 点 B で光を受信したとき, W_B の示す時刻が t_B だったとします。光は点 B で即座に反射され点 A に戻ります。戻ってきた瞬間の時計 W_A の示す時刻を t'_A とします。もし, $t_B - t_A = t'_A - t_B$ となっていれば, つまり, $t_B = (t'_A + t_A)/2$ となっていれば, 時計 W_A と W_B は同時刻・同じ速さで時を刻んでいることとなります。しかし, そうでなかった場合, 光が B 点に到達したとき W_B の時計が t'_B を示したとすると, $(t_A + t'_A)/2 - t'_B$ だけ W_B の針を進めるように調整すればよいこととなります。すなわち, 調整後の B 点の時計の示す時刻を t_B とすると

$$t_B = t'_B + \text{調整分} = t'_B + \left\{ \frac{1}{2}(t_A + t'_A) - t'_B \right\} = \frac{1}{2}(t_A + t'_A) \quad (2.3.1)$$

このように同一慣性系の任意の位置に配置された時計の時間あわせ (同期化) をしておくことで, その位置における時刻を知ることができます。座標に配置された時計の示す時間を座標時間といいます。以後, 基準とする慣性系 S での時刻は その位置に配置された時計が示す時刻 ということのを忘れないように。

2.3.2 事件の空間的・時間的構造

1 つの慣性系 S である事件, 例えば花火が炸裂し, その場所を x , 起こった時刻 t に c を掛けたものを $x_0 (\equiv ct)$ とします。そして, 花火の炸裂事件を一定の速度 V で x の正の方向に走っている車から見たとき, 車に固定された慣性系 S' での場所と時刻をそれぞれ x', x'_0 とします。なお, S, S' 両座標系の原点が一致したときに双方の時計も一致していたとします。 (x, x_0) と (x', x'_0) はローレンツ変換 (2.2.15) で互いに結ばれています。

さて, 勝手に起こった互いに関連性のない (因果関係のない) 2 つの事件 A, B を, 次の 2 つのケースで考えてみます。

1. S 系で事件 A, B が同じ位置, かつ異なった時刻に発生した。
2. S 系で事件 A, B が同時刻で, かつ異なった場所で発生した。

事件 A, B に対して S と S' 系は次のローレンツ変換で結ばれています。 V は S に対して x 方向へ S' が動く速度です。

$$\begin{aligned} x_{A'} &= \gamma(x_A - Vt_A), & t'_A &= \gamma(t_A - Vx_A) & (\because x_0 = ct_A, x'_0 = ct'_A) \\ x_{B'} &= \gamma(x_B - Vt_B), & t'_B &= \gamma(t_B - Vx_B) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

1. のケースで $x_A = x_B, t_A \neq t_B$ とすると, (2.3.2) より

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A &= -\gamma V(t_B - t_A) \\ t'_B - t'_A &= \gamma(t_B - t_A) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

が得られます。この第 1 式を見ると, $x'_B - x'_A \neq 0$ で, S' 系では, 2 つの事件 A, B が同じ場所で発生していない! ということになります。また, 第 2 式より, $t'_B - t'_A > t_B - t_A$ となるので, 2 つの事件 A, B が発生した時間間隔 $t'_B - t'_A$ は, S' 系では S 系に較べて γ だけ長くなります! つまり, S 系から見た場合, S' 系ではゆっくり時を刻んでいることになりますね。

2. のケースで $t_B = t_A, x_B \neq x_A$ とすると

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A &= -\gamma(x_B - x_A) \\ t'_B - t'_A &= -\gamma V(x_B - x_A)/c^2 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

が得られます。これから、 S' 系でも事件A,Bは、異なった場所で発生していますが、 $t'_B - t'_A \neq 0$ で、事件A,Bは同時には起こっていません！仮に $x_A > x_B$ とすると、 $t'_B > t'_A$ となり、 S 系で事件A,Bが同時に起こったことが、 S' 系では事件Aが先に起こり、その後事件Bが起こっている。 $x_A < x_B$ であれば時間的に逆の事象が起こっていることとなります。このように、ある慣性系では同時であったことが、別の慣性系では同時ではないという、ニュートン力学の常識では考えられない事情が表れます。

- ある慣性系で空間的に同じ場所であっても、異なる慣性系では同じ場所とならない。
- ある慣性系で時間的に同時であっても、異なる慣性系では同時とならない。

2.3.3 走っている棒は短くなる

長さ ℓ_0 の棒が S 系に対して速さ V で x 軸方向に走っているとします。棒と共に動く座標系を S' とすると、 S' 系では棒は静止しているので、先端と後端の座標を x'_A, x'_B とすると

$$\ell_0 = x'_B - x'_A \quad (2.3.5)$$

この棒を S 系から眺めた場合の棒の長さを ℓ とすると、 ℓ は棒の先端座標 x_B と後端座標 x_A を同時に測定したときの座標の差であるので、 x'_A, x'_B をローレンツ変換

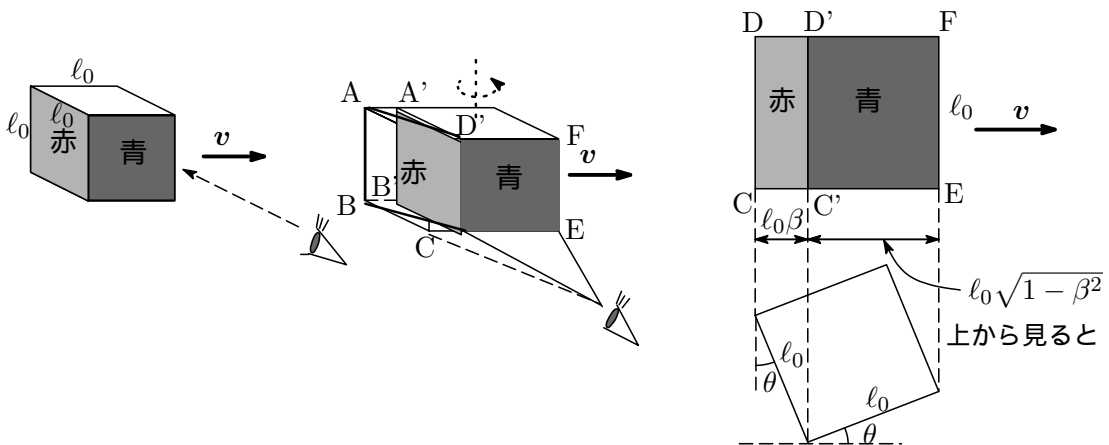
$$x_A = \gamma(x'_A + \beta ct_A), \quad x_B = \gamma(x'_B + \beta ct_B)$$

し、 $t_A = t_B$ とおいて $x_B - x_A$ を求めると

$$\ell = x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma \ell_0 \quad (2.3.6)$$

となり、 γ は常に 1 より小さいので $\ell < \ell_0$ 、つまり、走っている棒は運動方向に短くなります。これをローレンツ収縮と呼んでいます¹⁰。

それでは、速度 v で動いている立方体はどのように見えるでしょうか。立方体は観測者に近い面は青色、側面は赤色に塗り分けられているとします。



¹⁰ ℓ_0 はローレンツ変換で不変になるので固有長さとも呼ばれます。証明は各自試みられたし。

“見える”にわざわざルビを振っている点に注意ください。観測者に見える形というのは、観測者の目に同時に入る光で決まり、物体から同時にでた光で決まるものではありません。動く立方体の場合、ローレンツ収縮という相対論からの帰結に加えて、光の速さは有限であるということとを合わせて考慮しなければなりません。

さて、立方体の観測者から遠い辺 AB からでた光が観測者に近いほうの辺 CD に達するまでに時間は l_0/c 経過しており、その間に立方体は $vl_0/c = l_0\beta$ だけ前に進んでいます。そうすると観測者の目に同時に飛び込んでくる光は、図の真ん中の ABC'D' の側面部からでた光となり、その部分は赤く見えます。また、同時に長さ C'E はローレンツ収縮により $l_0\sqrt{1-\beta^2}$ と収縮しているので、結局観測者の目には図の右のようなものが見えることとなります。立方体の運動方向のローレンツ収縮を見ようとしても（あるいはカメラで撮影しようとしても）それを確認できず、面白いことに、 $\beta = \theta$ とおくと、図に示すように立方体が角 θ 回転したかのように見えるわけですね。光速に近い速度になると赤い面が広がってきて、その分青い部分はローレンツ短縮により狭くなり、光速に達すると赤い面だけが見えるようになります。

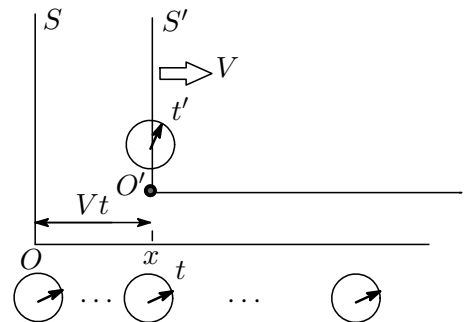
2.3.4 走っている時計はゆっくり進む

x の正の方向に速度 V で S' 系が動いており、質点は S' 系の原点にあるとします。 S 系では x 軸に沿って時刻合わせがなされた時計 W がびっしりと無数に配置され、質点が x 軸上のある位置 x を通過する瞬間の時刻 t は、その位置に配置された時計で計測されます（座標時間）。一方、 S' 系の時計 C は質点に固定されており、質点と一緒に動くようになっています。 S と S' 系の原点は $t = t' = 0$ で一致していたとします。

質点が位置 x に達する瞬間の時刻が t であったとし、質点に固定された時計の時刻は t' であったとします。このとき、 t' と t の関係はローレンツ変換 (2.2.15) より

$$t' = \frac{t - (\beta/c)Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t\{1 - (V/c)^2\}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.3.7)$$

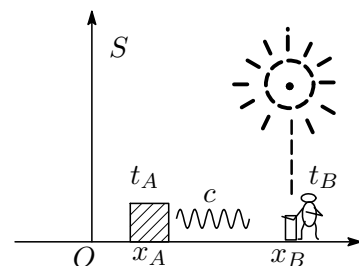
$$= t\sqrt{1-\beta^2} = \frac{t}{\gamma} < t \quad (\because \gamma > 1)$$



となります。この式は、質点に固定した時計の時刻 t' は座標時間 t よりゆっくり進むということを示しています。質点に固定した時計が示す時刻を固有時あるいは固有時間といいますが、固有時についてはセクション 2.6 でまた触れます。

2.3.5 因果律について

セクション 2.3 のケースで見たように、ある慣性系で 2 つの事件 A, B が同時に起こったことが、別の慣性系では A が B より先に起こったり、また別の慣性系では B が先に起こって A が起こったりします。このケースでは事件 A, B の間には因果関係がないとしているので、A が先に起ころうが、B が先に起ころうが特に問題はないのですが、A が原因で B が起こったというように両者の間に因果関係があった場合、慣性系によって“結果”である B が先に起こって、その“原因”となる A が後から起こるといふ、因果律が破られることがあり得るのでしょうか？



花火師がセンターから送信されてくる打上げ開始の光信号（原因）を受信した瞬間に花火を打ち上げた（結果）とします。センターの位置を x_A ，光信号を発射した時刻を t_A とし，花火師の位置を x_B ，花火を打ち上げた時刻を t_B とすると，

$$x_B - x_A = \pm c(t_B - t_A) \quad (2.3.8)$$

の関係が成り立ち，慣性系 S では信号を受信して花火を打ち上げたのだから $t_B - t_A > 0$ です。これを別の慣性系から眺めたとして，

$$\begin{aligned} t'_A &= \gamma(t_A - \beta x_A/c), & t'_B &= \gamma(t_B - \beta x_B/c) \\ \therefore t'_B - t'_A &= \gamma(t_B - t_A - \beta(x_B - x_A)/c) = \gamma(t_B - t_A)(1 \mp \beta) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

となります。 $\gamma(1 \mp \beta)$ は常に正なので， $t'_B - t'_A > 0$ となり，別の慣性系でも原因と結果が逆転することはありません。

2.4 光のドップラー効果

S 系で単位ベクトル \mathbf{n} 方向に進んでいる振幅 A ，振動数 ν ，波長 λ ，角振動数 ω ，波数ベクトルを \mathbf{k} とする次の平面波¹¹を考えます。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{k} = (\omega/v)\mathbf{n}, \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi(v/\lambda) \quad (2.4.1)$$

この波を S に対して速度 V で動いている別の慣性系 S' から見たとき，その振る舞いがどうなるか調べます。ただし， $t = t' = 0$ のとき S' の原点は S の原点に一致するようにとっておきます。

ある慣性系で見た波の山あるいは谷は，別の慣性系で見たときも山あるいは谷に見えなければならないので，波の位相 $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ はローレンツ変換に対して不変，つまり変換前後で値は変わらないと考えられます（本セクション最後の【補注】やMEMO-3も参照）。

さて，光源が慣性系 S の原点に固定されているとして， S' 系に静止している観測者が観測する波の角振動数，波数ベクトルをそれぞれ ω' ， \mathbf{k}' とすると

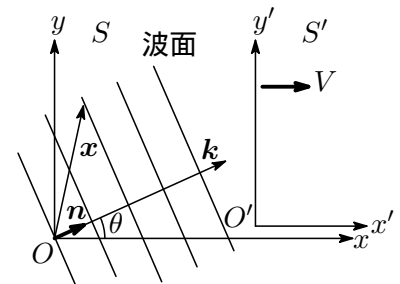
$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' \quad (2.4.2)$$

が成り立ちます。そこで，左辺をローレンツ変換(2.2.15)して右辺の \mathbf{k}' ω' の係数と比較すると

$$\begin{aligned} \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} &= \omega t - k_x x - k_y y - k_z z \\ &= \gamma\omega\{t' + (\beta/c)x'\} - \gamma k_x\{x' + (\beta/c)t'\} - k_y y' - k_z z' \\ &= \gamma t'\{\omega - (\beta/c)k_x\} - \gamma x'\{k_x - (\beta/c)\omega\} - k_y y' - k_z z' \\ &= \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z' \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$$\therefore \omega' = \gamma\{\omega - (\beta/c)k_x\}, \quad k'_x = \gamma\{k_x - (\beta/c)\omega\}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z$$

が得られます。ここで， k'_x ， ω' は S' 系での波数ベクトルと角振動数です。



¹¹ 単色平面波の波の山の動く速さを位相速度といいます。位相速度 v とすると $v = \omega/k$ で与えられます。光の位相速度は c です。

k と x 軸のなす角を θ , k' と x' 軸のなす角を θ' とすると

$$\begin{aligned} k_x &= |k| \cos \theta = (\omega/c) \cos \theta = 2\pi(\nu/c) \cos \theta \\ k'_x &= |k'| \cos \theta' = (\omega'/c) \cos \theta' = 2\pi(\nu'/c) \cos \theta' \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

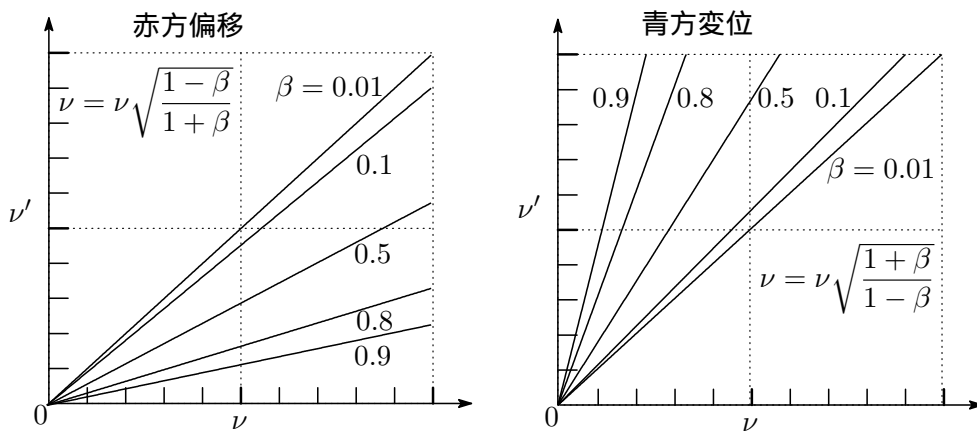
これと (2.4.3) より振動数 ν' , ν に対する関係式

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \beta \cos \theta), \quad \nu' \cos \theta' = \gamma\nu(\cos \theta - \beta) \quad \nu' \sin \theta' = \nu \sin \theta \quad (2.4.5)$$

を得ます。(2.4.5) の第 1 式は、相対論から導かれる光のドップラー効果の一般式です。ここで、 $\theta = 0^\circ$ とすると、光の進行方向と観測者の運動方向が同じで、観測者の観測する振動数 ν' は

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (2.4.6)$$

となります。この現象は縦ドップラー効果と呼ばれ、この場合、 ν' は減少し、可視光では波長が赤い方にずれるので「赤方偏移」と呼ばれます。



逆に、光源と観測者が近づいていく場合は、(2.4.5) の $\beta \rightarrow -\beta (= -V/c)$ に入れ替えればよいので、

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.4.7)$$

となり、観測される振動数は増加し、可視光では波長が青い方にずれるので「青方偏移」と呼ばれます。いずれにしても光源が運動しているのか、あるいは観測者が運動しているのかの区別はなく、両者の相対速度のみによってドップラー効果が決まります。

(2.4.5) より

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \tan \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta - \beta} \quad (2.4.8)$$

が得られます。光の進路方向を θ とすると観測者は θ' の方向に光を観測することになり、この式は光行差に対する相対論的公式と呼ばれます。

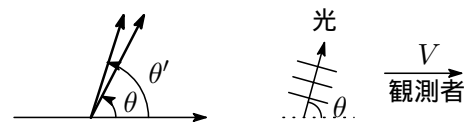
$\theta = \pi/2$ なら

$$\cos \theta' = -\beta \quad (2.4.9)$$

と簡単な形になります。 $V \ll c$ のときには、(2.4.8)

の第 1 式より

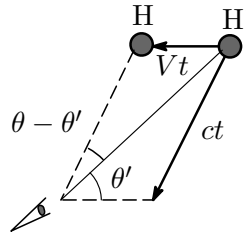
$$\cos \theta' = (\cos \theta - \beta)(1 - \beta \cos \theta)^{-1} \doteq (\cos \theta - \beta)(1 + \beta \cos \theta) \doteq \cos \theta - \beta \sin^2 \theta \quad (2.4.10)$$



$\Delta\theta = \theta' - \theta$ とおくと,
 $\Delta\theta \sim 0$ として $\cos\theta' \doteq \cos\theta - \Delta\theta \sin\theta$, $\cos\Delta\theta \sim 1$, $\sin\Delta\theta \sim \Delta\theta$
 となるので, (2.4.10) より

$$\Delta\theta = \beta \sin\theta = \frac{V}{c} \sin\theta \quad (2.4.11)$$

古典的光行差の公式が得られます。



参考：星の光行差
 星が静止していて，地球が公転速度 V で運動しているとすると，星の位
 位は本当の位置 H からずれて H' に
 見える。

横ドップラー効果 S 系で平面波が z 軸方向に進行していて，それを S' 系にいる観測者が観測
 した場合, (2.4.5) で $\theta = 90^\circ$ とおいて

$$\nu' = \nu \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.4.12)$$

が得られます。この現象を横ドップラー効果といい¹²，非相対論的な場合にはなかったことで，
 相対性理論の1つの特長となっています。(2.4.9) より

$$\cos\theta' = -\beta \quad (2.4.13)$$

仮に $\beta = 0.001$ とすれば $\theta' = 90.057^\circ$ となり， θ' は 90° よりわずかに傾くこととなります。

【補注】波の山や谷などを考えなくても，平面波のローレンツ変換でドップラー効果がでてくることを
 以下に示します。簡単のために S 系で x 方向に進行する次の平面波を考えます。

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad k = \omega/c \quad (2.4.14)$$

この平面波は S' 系では $(x', t') \rightarrow (x, t)$ のローレンツ変換，すなわち

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad t = \gamma(t' + (\beta/c)x')$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \psi(x', t') &= A \sin\left(\gamma\omega(1 - \beta)t' - \frac{\gamma\omega}{c}(1 - \beta)x'\right) \\ &= A \sin(\omega't' - k'x') \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

と表わせます。 ω' , k' は S' 系での角振動数と波数で，

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta), \quad k' = \frac{1}{c}\gamma\omega(1 - \beta) \quad (2.4.16)$$

これから

$$\nu' = \gamma(1 - \beta)\nu = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.4.17)$$

これは (2.4.5) で $\theta = 0^\circ$ とした式と一致します。

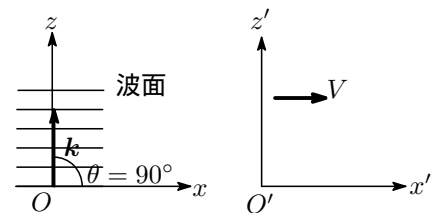
横ドップラー効果は， S 系で z 方向に進んでいる平面波を
 S' 系からみた場合に起こります。

$$\psi(t, z) = A \sin(\omega t - kz), \quad k = \omega/c \quad (2.4.18)$$

上式にローレンツ変換 $t = \gamma(t' + (\beta/c)x')$ を代入すると

$$\begin{aligned} \psi(t', x', z') &= A \sin(\omega't' - k'z') \\ &= A \sin(\gamma\omega t' - k(z' - \gamma\beta x')) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

これから $\omega' = \gamma\omega \rightarrow \nu' = \gamma\nu$ で，(2.4.12) と一致します。



¹² この効果は非相対論的ドップラー効果では表れません。例えば音源の斜めドップラー効果をみてみましょう。音
 源の振動数を ν とし，観測者と音源を結ぶ角度を α とすると，観測者が観測する振動数 ν' は $\nu' = \frac{1}{1 - (v/V)\cos\alpha} \nu$
 で与えられます (詳細は「社会人のための楽しい物理入門」を参照)。 $\alpha = 90^\circ$ の場合， $\nu' = \nu$ となりドッ
 プラー現象は観測されません。

2.5 速度・加速度のローレンツ変換

2.5.1 速度のローレンツ変換

運動している質点の速度 (等速度とは限らない) がローレンツ変換でどのように変換されるか調べます。\$S\$ 系である粒子が速度 \$v(v_x, v_y, v_z)\$ で走っており¹³, \$S\$ 系に対して速度 \$V\$ で \$x\$ の正の方向に動いている \$S'\$ 系から見た同じ粒子の速度を \$v'(v'_x, v'_y, v'_z)\$ とします。それぞれの慣性系で速度は

$$(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (v'_x, v'_y, v'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad (2.5.1)$$

で表わされ, \$S\$ 系と \$S'\$ 系はローレンツ変換 (2.2.15) で結ばれています。(2.2.16) より

$$\frac{dx'}{dx_0} = \frac{1}{c} v'_x = \frac{dx - \beta(V) dx_0}{dx_0 - \beta(V) dx} = \frac{\frac{dx}{dx_0} - \beta(V)}{1 - \beta(V) \frac{dx}{dx_0}} = \frac{\frac{v_x}{c} - \beta}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} \quad (2.5.2)$$

$$\therefore v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{1}{c^2} v_x V}$$

同様に \$v'_y\$ や \$v'_z\$ は

$$\frac{dy'}{dx'_0} = \frac{dy'}{(dx_0 - \beta dx) / \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{dy}{dx_0}}{1 - \frac{V}{c} \frac{dx}{dx_0}} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.5.3)$$

$$\therefore v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} v_x V \right)} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} v_x V \right)}$$

となります。整理すると, 速度のローレンツ変換は次のようになります。

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{1}{c^2} v_x V} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} v_x V \right)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} v_x V \right)} \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{1}{c^2} v'_x V} \\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v'_x V \right)} \\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v'_x V \right)} \end{array} \right. \quad (2.5.4)$$

(2.5.4) 右側の式は, 通常「速度の合成則」とか「速度の加法則」とも呼ばれており, \$S'\$ 系で速度 \$v'\$ で動いている質点の \$S\$ 系で見た場合の速度 \$v\$ を表わしています。周知のようにガリレイの速度合成則では

$$v = v' + V \longrightarrow v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \quad (2.5.5)$$

となり, \$x\$ 方向の速度成分だけが変化しそれに垂直な速度成分は変化しませんでした。特殊相対論では時間もローレンツ変換されるので, この結果垂直方向の速度成分も変換されることになります¹⁴。

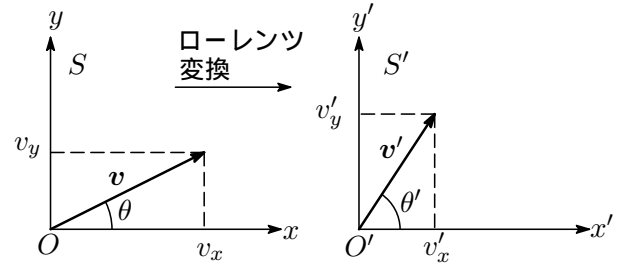
さて, \$S'\$ 系から見た速度ベクトル \$v'\$ の大きさと方向を求めてみましょう。簡単のために粒子の速度 \$v\$ が \$xy\$ 面内にあるように座標軸を設定します。

¹³ 等速度運動とは限定していないことに注意。

¹⁴ (2.5.4) で \$c \to \infty\$ の極限をとるとガリレイの式 (2.5.5) と一致する。

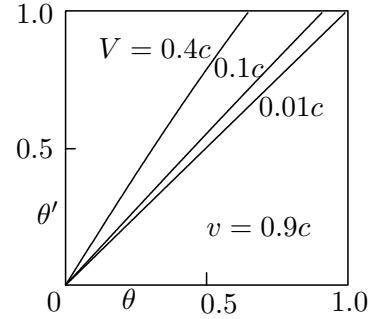
そうすると $v_z = 0$ となるので, (2.5.4) より $v'_z = 0$ で, v' は $x'y'$ 平面上にきます。 v と x 軸のなす角を θ , v' と x' 軸のなす角を θ' とすると

$$\begin{cases} v_x = v \cos \theta \\ v_y = v \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = v' \cos \theta' \\ v'_y = v' \sin \theta' \end{cases}$$



S' 系での「速度の方向」と「速度の大きさ」は, (2.5.4) より

$$\begin{aligned} v'_x &= v' \cos \theta' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{1}{c^2} v_x V} = \frac{v \cos \theta - V}{1 - V(v \cos \theta)/c^2} \\ v'_y &= v' \sin \theta' = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - \frac{1}{c^2} v_x V} = \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - V(v \cos \theta)/c^2} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$



これから

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - (V/c)^2}}{v \cos \theta - V} \quad (2.5.7)$$

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{\{v^2 - 2V(v \cos \theta) + V^2 \{1 - (v \sin \theta/c)^2\}\}^{1/2}}{1 - V(v \cos \theta)/c^2} \quad (2.5.8)$$

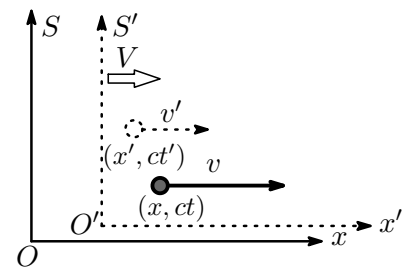
が得られます。 θ' と θ の関係を $v = 0.9c$ として V をパラメータにとってプロットした図を載せておきますので参考にしてください。簡単のために, 速度 v が x 軸に平行な場合を考えると, (2.5.8) で $\theta = 0$ とおいて

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2} \quad (2.5.9)$$

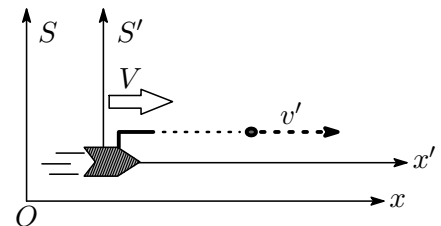
これを v について解くか, $V \rightarrow -V$, $v' \leftrightarrow v$ とすることで

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} \quad (2.5.10)$$

が得られます。この式は慣性系 S' での速度 v' が分かっている場合, 慣性系 S での速度 v を求めるのに利用できます。例えば慣性系 S に対して x 軸の正の方向に速さ V で走っているロケットがあり, ロケットと共に動く慣性系を S' とします。このロケットから速さ v' で走行方向に弾丸を発射したとき, S から観測した弾丸の速度は (2.5.10) で求められるわけです。



光速に近い速度で飛んでいるロケットから光速に近い速度の弾丸が発射されたら, S 系から見た弾丸の速度は光速を超えてしまう。。。? ロケットの速度を $V = k_2 c$, ロケットから見た弾丸の速度を $v' = k_1 c$, ($0 < k_1, k_2 \leq 1$) とすると, (2.5.10) より, 地上 S 系からみた弾丸の速度は



$$v = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2} c \quad (2.5.11)$$

となりますね。ところで,

$$k_1 + k_2 - (1 + k_1 k_2) = -(k_1 - 1)(k_2 - 1) \leq 0$$

となるので、分子は分母より常に小さい、つまり、常に $v \leq c$ で、光速以下の速度をいくら足し合わせても光速 c を超すことはできないということが導かれます。ロケットも弾丸も共に光速 ($k_1 = k_2 = 1$) としても $v = c$ で、このことは光を放出する物体の運動状態によらず光速は常に一定という光速不変の原理を表わしています。

M.E.M.C - 2 : ラピディティについて ..(蛇足)

(2.2.20) で $\tanh \chi = \beta = \frac{V}{c}$ という関係式を得ました。そこで

$$\beta = \frac{V}{c} = \tanh \chi, \quad \beta' = \frac{v'}{c} = \tanh \chi', \quad \beta'' = \frac{v}{c} = \tanh \chi'' \quad (2.5.12)$$

というものを定義すると、(2.5.10) は

$$\beta'' = \frac{\beta' + \beta}{1 + \beta'\beta} \rightarrow \tanh \chi'' = \frac{\tanh \chi' + \tanh \chi}{1 + \tanh \chi' \tanh \chi} = \tanh(\chi' + \chi) \quad (2.5.13)$$

$$\therefore \chi'' = \chi' + \chi$$

となって単純な加法則がでできます。 χ はラピディティとかブースト・パラメータと呼ばれます。

フレネルの随伴係数

少し歴史的な話から。。。 相対論が登場する以前は

- 光を伝播する媒質はエーテルである。
- エーテルは絶対静止系に対して静止している。エーテルに対する光の伝播速度が c である。
- エーテルは真空中に充満している。また、水やガラス等、あらゆる透明物質の中にも浸透している（だから透明物質の中も光は伝播する）。

と考えられていました。屈折率 n の透明物質中での光の速さ（位相速度）は c/n で与えられます。そこで、もし透明物質がエーテルの海の中を速さ V で走っている場合、同じ向きに透明物質の中を伝播する光の速さは絶対静止系からみていくらになるだろうか？ということになり、次の2つの仮説が提案されました。

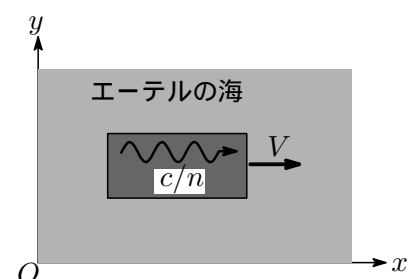
1. 透明物体の中に存在するエーテルは運動する物体に“完全”に引きずられて動くので、求める光の速さは $c/n + V$ となる。
2. 透明物体の中に存在するエーテルは運動する物体に“不完全”に引きずられて動き、エーテルの引きずられる割合を α とすると、求める光の速さは $c/n + \alpha V$ ($\alpha < 1$) となる。
 $\alpha = 1 - (1/n^2)$ で与えられ

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V \quad (2.5.14)$$

となる。

フレネルは2番目の仮説を提案、その後フィゾーの実験によりフレネルの (2.5.14) が正しいことが実証されました。 α はフレネルの随伴係数とか引きずり係数と呼ばれています。

歴史的な話は以上として、特殊相対論から (2.5.14) を導出してみましょう。透明物質として水を取り上げます。水の屈折率を n とすると、静止している水中を進む光の速度は c/n ですね。地面に固定した慣性系を S とし、地面に対して流れる水の流れを V 、水の流れと一緒に動く慣性系を S' とします。先ほどのロケットと弾丸の例を引き合いにして、水の流れる速度をロケットの速度、流れる水



の中を進む光の速度を弾丸の速度 (S' 系では水は静止している) の速度は c/n と置きかえて考えると, 求める速度 v は (2.5.10) より

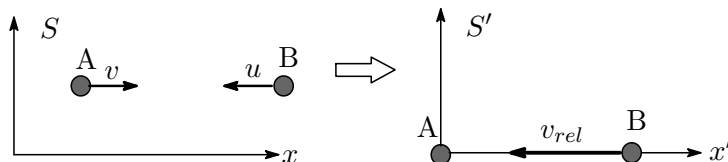
$$v = \frac{c/n + V}{1 + V/nc} = \left(\frac{c}{n} + V\right) \left(1 + \frac{V}{nc}\right)^{-1} \doteq \left(\frac{c}{n} + V\right) \left(1 - \frac{V}{nc}\right) \quad (2.5.15)$$

$$\doteq \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V$$

となり, あっさり (2.5.14) が導出されます。

相対速度

2つの粒子 A, B が互いに光速 c でぶつかり合う場合, その相対速度はどうなるでしょうか。相対速度というのは自分を基準にした相手の速度ということなので, お互いが c の速度で近づいていると相対速度は $2c$ となって光速を超える。。。!?



いま, 粒子 A が右の方向に速さ v で, 粒子 B は左の方向に速さ u で走っていると, その相対速度を求めていきます。 S 系では

$$\frac{dx_A}{dt_A} = v, \quad \frac{dx_B}{dt_B} = -u \quad (2.5.16)$$

ですね。次に相対速度を求めるために粒子 A が静止している慣性系 S' に移り, S' 系での粒子 B の速度, つまり相対速度 v_{rel} を求めます。 S' 系では粒子 A は静止, 粒子 B は v_{rel} で動いているので, (2.5.2) より¹⁵

$$\frac{dx_{A'}}{dt_{A'}} = 0, \quad \frac{dx_{B'}}{dt_{B'}} = -v_{rel} = \frac{\frac{dx_B}{dt_B} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx_B}{dt_B}} = -\frac{u + v}{1 + \frac{1}{c^2} uv} \quad (2.5.17)$$

$$\therefore v_{rel} = \frac{u + v}{1 + \frac{1}{c^2} uv}$$

いま, 粒子 A, B とともに速さが c とすると, 相対速度 v_{rel} は $u = v = c$ とおいて, 上式より

$$v_{rel} = c \quad (2.5.18)$$

となり, やはり光速となります (光速度不変の原理)。

2.5.2 加速度のローレンツ変換

加速度のローレンツ変換を調べます。簡単のために S 系である粒子が x 軸の正の方向に一定の加速度 a で運動 (等加速度運動) していると, この粒子を別の慣性系 S' から観測した場合の加速度を a' とします¹⁶。 (2.5.10) を t で微分すると

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} \right) = \frac{1 - (V/c)^2}{(1 + v'V/c^2)^2} \frac{dv'}{dt} = \frac{1 - (V/c)^2}{(1 + v'V/c^2)^2} \frac{dv'}{dt'} \frac{dt'}{dt} \quad (2.5.19)$$

¹⁵ (2.5.10) から直接求められます。

¹⁶ 特殊相対性理論で加速度運動は扱えないというのは間違いで, S と S' の間の速度 V が一定であれば, S 系での加速度運動は S' においても記述できます。

(2.2.16) より,

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \beta \frac{dx'}{dx'_0} \right) = \gamma (1 + v'V/c^2), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2} \quad (2.5.20)$$

なので, これを上式に入れて

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{1 - (V/c)^2}{(1 + v'V/c^2)^3} \frac{dv'}{dt'} = \frac{1}{\{\gamma(1 + v'V/c^2)\}^3} \frac{dv'}{dt'} = \frac{1}{\{\gamma(1 + v'V/c^2)\}^3} a' \quad (2.5.21)$$

が得られます。 S' 系における加速度 a' は, (2.5.21) をまともに解くか, $a \leftrightarrow a'$, $V \rightarrow -V$, $v' \leftrightarrow v$ の入れ替えをやればよいので

$$a' = \frac{a}{\{\gamma(1 - vV/c^2)\}^3} \quad (2.5.22)$$

となります。この式は, S' 系では S 系における加速度と異なる値をとる, つまり, 慣性系によって加速度は異なるという, ニュートン力学では出会わなかったことを示しています。 S に対して等速度で動いている座標系はすべて慣性系となるので, 慣性系は無限にあり, それに付随した加速度も無限にあることになって, どの慣性系を問題にしているのかというように取り扱いが面倒になります。

加速度運動を分解して考えると, ある瞬間 t の質点の速度を v とした場合, 次の瞬間 $t + \Delta t$ には $v + \Delta v$ となっていますね。瞬間 t に質点と同じ速度 v で動いている慣性座標系 S' を考えます。このように一瞬だけ質点と一緒に動く慣性系 S' を瞬間静止系と呼んでいます。そうすると時刻 t で質点は静止 ($v = 0$) しており, 次の瞬間 $\Delta t'$ 後には速度 $\Delta v'$ で動いています。ただし, 等加速度運動を考えているので Δt での速度の増分 $\Delta v'$ は一定。これを S' 系での質点の速度とみなすと, S 系から見た質点の速度は, (2.5.10) を使って

$$v + \Delta v = \frac{\Delta v' + v}{1 + \Delta v'v/c^2}, \quad \therefore \Delta v = \frac{1 - (v/c)^2}{1 + \Delta v'v/c^2} \Delta v' \quad (2.5.23)$$

と得られます。 Δt と $\Delta t'$ の関係は

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma_p \Delta t', \quad \text{ただし } \gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (2.5.24)$$

なので, (2.5.23) と (2.5.24) より

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\gamma_p^3}{1 + \Delta v'v/c^2} \frac{\Delta v'}{\Delta t'} \quad (2.5.25)$$

ここで $\Delta t' \rightarrow 0$, $\Delta v' \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\substack{\Delta t' \rightarrow 0 \\ \Delta v' \rightarrow 0}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv'}{dt'} \gamma_p^3 \quad (2.5.26)$$

が得られます。 $dv/dt = a$, $dv'/dt' = a'_0$ とおけば

$$a = a'_0 \gamma_p^3 \quad (2.5.27)$$

で, 慣性系 S での質点の加速度 a と S' での加速度 a'_0 との関係式が得られます。この関係式は (2.5.21) で $v' \rightarrow 0$, $V \rightarrow v$, $\gamma \rightarrow \gamma_p$, $a' \rightarrow a'_0$ としても得られます。

$a'_0 = \xi = \text{一定}$ とすると, (2.5.25) より

$$\xi = \frac{dv}{dt} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \quad (2.5.28)$$

変数分離形になっているので容易に積分できる。初期値は $t_0 = 0, v_0 = 0$ として

$$\int \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} dv = \int \xi dt, \quad \therefore \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \xi t \quad (2.5.29)$$

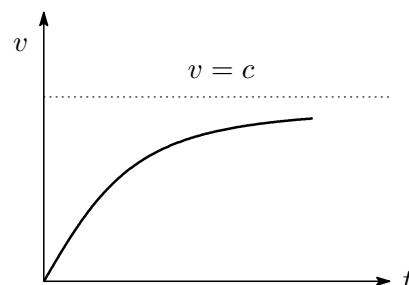
この式を v について解くと

$$v = \frac{\xi t}{\sqrt{1 + (\xi t/c)^2}} \quad (2.5.30)$$

を得ます。これは、初速度 0 の相対論的・等加速度運動の速度 v と時間 t の関係式です (下図)。

次に質点の飛翔距離を求めます。 $t = 0$ のとき $x = 0$ として

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{\xi t}{\sqrt{1 + (\xi t/c)^2}} dt \\ &= \frac{c^2}{\xi} \left(\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{c^2} t^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.5.31)$$



を得ます。これから質点の描く世界線を求めると

$$\frac{(x + c^2/\xi)^2}{c^4/\xi^2} - \frac{(ct)^2}{c^4/\xi^2} = 1 \quad (2.5.32)$$

となって、 $t \geq 0$ の領域で $ct = x + c^2/\xi$ を漸近線とする直角双曲線となることが分かります。特に、 $\xi t \ll c$ のときは

$$x \approx \frac{c^2}{\xi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{c^2} t^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} \xi t^2 \quad (2.5.33)$$

となって、ニュートン力学でのお馴染みの式がでてきますが、この世界線は $x = \frac{1}{2c^2} \xi (ct)^2$ で放物線ですね。

さて、質点に固定された時間と基準系 S の時間の関係は (2.5.24) より

$$dt' = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt \quad (2.5.34)$$

なので、これから

$$\begin{aligned} t' &= \int_0^t \sqrt{1 - (v/c)^2} dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{c^2} t^2}} dt = \frac{c}{\xi} \sinh^{-1} \left(\frac{\xi}{c} t \right) \\ \therefore \frac{\xi}{c} t &= \sinh \left(\frac{\xi}{c} t' \right) \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

となります。

【補注】加速度運動と瞬間静止系について少し補っておきます。これは次のロケット運動を考えると分かりやすいと思います¹⁷。ロケットのパイロットは噴射エンジンを連続的に動かすのではなく、ある一定の間隔で断続的に動かせ、エンジンを休止している間は慣性によってロケットを進めています。なお、エンジン噴射によるパイロットの受ける衝撃の大きさはいつも同じであるとします (加速度が一定)。

最初の衝撃までのロケットの速さを v_0 として、ロケットが最初は静止しているような慣性系を S とし、これを外部観測者がいる基準系とすると

$$v_0 = 0 \quad (2.5.36)$$

次に、最初の衝撃のあと、ロケットの速さはある値 α だけ増すので、

$$v_1 = \alpha \quad (2.5.37)$$

¹⁷ ランダウ・ジューコフ「相対性理論入門」(東京図書) 参照

次の衝撃までの間はロケットは慣性による等速直線運動をしており、この間に、ロケットが静止して見える新たな慣性系 S' (瞬間静止系) に移ります。第 2 衝撃のあと、ロケットは速さ α だけ増します。 S 系から見たロケットの速さは、速度の合成則 (2.5.10) により

$$v_2 = \frac{v_1 + \alpha}{1 + \frac{\alpha v_1}{c^2}} \quad (2.5.38)$$

次に、第 2 衝撃のあとロケットが静止して見える新たな慣性系 S'' に移って、第 3 衝撃後の S 系から見たロケットの速さを計算すると

$$v_3 = \frac{v_2 + \alpha}{1 + \frac{\alpha v_2}{c^2}} \quad (2.5.39)$$

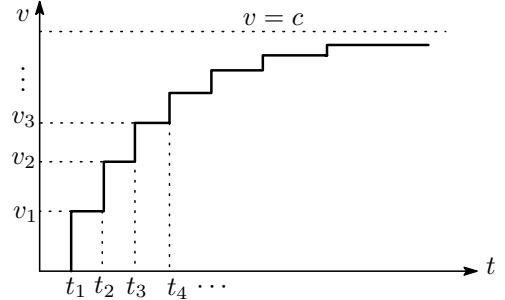
同様にして次々と新たな瞬間静止系に移って、第 n 衝撃後のロケットの S 系での速さは

$$v_{n+1} = \frac{v_n + \alpha}{1 + \frac{\alpha v_n}{c^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; v_0 = 0) \quad (2.5.40)$$

となります。これから、ロケットの速度は光速を超えることはなく、最終的に光速 c の漸近していくことがわかります。パイロットは一定の時間間隔でエンジンを噴射していました。この時間間隔を δ とすると、 S 系から見た n 回目と $n+1$ 回目の時間間隔は

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = \frac{\delta}{\sqrt{1 - v_n^2/c^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; t_0 = 0) \quad (2.5.41)$$

となり、ロケットの速度が光速に漸近するにつれて非常に長くなっていきます。以上の関係を、 S 系から見たロケットの速度と時間の関係グラフとして描くと上図のような階段状のグラフとなります。パイロットが大変短い時間間隔でエンジンを噴射していけば、階段状のグラフは連続的にエンジンを噴射場合の滑らかな曲線 (式 (2.5.30) で表わされる) に近づいていきます。



$$\begin{aligned} \Delta v_n = v_{n+1} - v_n &= \frac{v_n + \alpha}{1 + \frac{\alpha v_n}{c^2}} - v_n = \alpha \frac{1 - \frac{v_n^2}{c^2}}{1 + \frac{\alpha v_n}{c^2}} \\ \therefore \frac{\Delta v_n}{\Delta t_n} &= \frac{\alpha (1 - v_n^2/c^2)^{3/2}}{\delta (1 + \frac{\alpha v_n}{c^2})} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha (1 - v^2/c^2)^{3/2}}{\delta (1 + \frac{\alpha v}{c^2})} \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

ここで、 $\xi = \alpha/\delta$ を一定に保ちながら $\alpha, \delta \rightarrow 0$ の極限をとると

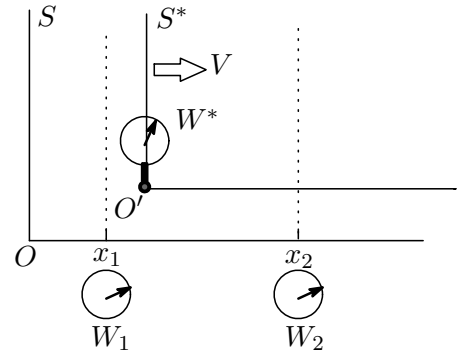
$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} \frac{\Delta v_n}{\Delta t_n} = \xi (1 - v^2/c^2)^{3/2} \quad (2.5.43)$$

$\xi = a'_0$ とすると、これは (2.5.27) と一致しますね。 … (補注終わり)

2.6 固有時

慣性系 S の x 軸上の一点 x_1, x_2 にそれぞれ時計 W_1, W_2 が置かれており、 W_1, W_2 は 2.3.1 の方法で時刻あわせがされており、 $t = t^* = 0$ で原点 O を出発した質点は x 軸方向に速度 V で等速運動しているとします。

質点と一緒に動く慣性系を S^* とし、質点には時計 W^* が固定されています。質点が S 系の位置 x_1 を通過する瞬間、 x_1 に設置された時計 W_1 は時刻 t_1 を示し、質点に固定された時計 W^* は τ_1 を示しました。次に質点が x_2 を通過する瞬間に x_2 に設置された時計 W_2 は時刻 t_2 を示し、 W^* は τ_2 を示したとします。 W_1, W_2 は座標位置に設置された時計なのでこれを座標時間といい、 W^* は質点に固定された時計で固有時ということは既に触れました。時間間隔 $t_2 - t_1$ は座標を指定してはじめて定められるのに対して、固有時間隔 $\tau_2 - \tau_1$ は基準となる慣性系 S の選び方に依存しない質点の固有の時間であることを以下に証明します。



S と S^* の間のローレンツ変換より

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1 - V^2/c^2} (t_2 - t_1) \quad (2.6.1)$$

$\tau_2 - \tau_1$ を $\Delta\tau$ と書くことにします。等速運動している質点の速度 V は

$$V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.6.2)$$

なので、(2.6.1) の両辺を 2 乗して (2.6.2) を代入すると

$$\begin{aligned} (\Delta\tau)^2 &= (1 - V^2/c^2)(t_2 - t_1)^2 = \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} \right\} (t_2 - t_1)^2 \\ &= (t_2 - t_1)^2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

また、 S 系から別の慣性系 S' へローレンツ変換¹⁸をおこなうと

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 &= \frac{\{(x'_2 - x'_1) + U(t'_2 - t'_1)\}^2}{1 - U^2/c^2} \\ (t_2 - t_1)^2 &= \frac{\{(t'_2 - t'_1) + \frac{U}{c^2}(x'_2 - x'_1)\}^2}{1 - U^2/c^2} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

を得ます。これを (2.6.3) に入れて整理すると

$$(\Delta\tau)^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2} = (t'_2 - t'_1)^2 - \frac{(x'_2 - x'_1)^2}{c^2} \quad (2.6.5)$$

となり、固有時間隔 $\Delta\tau$ は S から見ても S' 系から見ても同じ値となるので、ローレンツ変換不変量となることが分かります。(証明終わり)

さて、質点が等速運動をしていない場合はどうなるかということですが、この場合は瞬間静止系の固有時間隔を計算し、それらを加え合わせることで全体の固有時間隔が得られます。具体的には (2.6.6) で計算できます。(2.5.41) を参照されたい。

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_p} \quad (2.6.6)$$

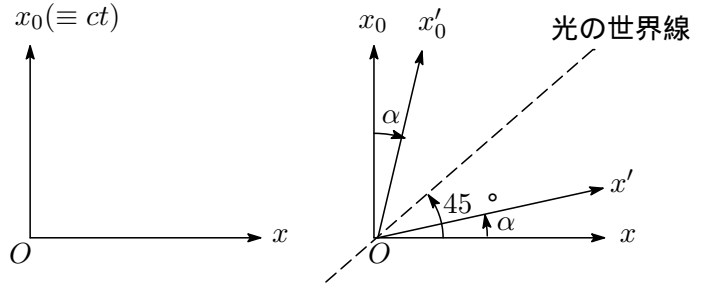
これがローレンツ不変となることはいうまでもないですね。なお、固有時については第 3 章「相対論的力学」のところで、物理的意味を中心に再び取り上げます。

¹⁸ S' 系は S 系に対して速度 U で動いている。

2.7 ローレンツ変換の幾何学的表示

ローレンツ変換の幾何学的表示を使ってローレンツ収縮や時計の遅れなどを調べていきましょう。
ローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & x_0 &= ct \\ x' &= \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1 + \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.7.1)$$



でした。 y, z を省略して、横軸に x 軸をとり、これに直交する縦軸として $x_0 \equiv ct$ をとります¹⁹。縦軸を t ではなく ct としたのは縦横両軸の次元を合わせるためです。 x'_0 軸は $x' = 0$ で表わされ、 x' 軸は $x'_0 = 0$ で表わされるので、それぞれの軸は (2.7.1) より

$$x'_0 \text{ 軸} : x = \beta x_0, \quad x' \text{ 軸} : x_0 = \beta x \quad (2.7.2)$$

という直線に相当し、 x'_0, x' 軸の x_0, x 軸に対する傾斜はそれぞれ同じ角で、 $\alpha = \tan^{-1} \beta$ となります²⁰。

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (2.7.3)$$

$\beta \rightarrow 1$ に近づくほど傾斜 α は大きくなり、 $\beta = 1$ で図に示した光の世界線になります。

さて、慣性系 S からみたもう一つの慣性系 S' は斜交座標となります（逆に言えば S' 系から S 系を見れば、今度は S 系が斜交座標となる）。ガリレイ変換では時間軸だけが傾きましたが、ローレンツ変換では x_0 と x が対称なので、 x_0 軸と x 軸の両方が同じように傾く分けですね。

幾何学的表示上の注意点

ところで、図形上で描いた S' 系のスケールはどうなっているのでしょうか。

S 系を $x_0 - x$ 、 S' 系を $X'_0 - X$ として右図より

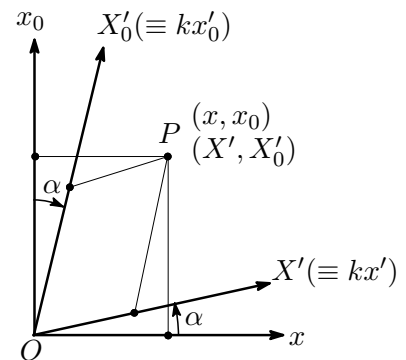
$$\begin{cases} x = X' \cos \alpha + X'_0 \sin \alpha \\ x_0 = X' \sin \alpha + X'_0 \cos \alpha \end{cases} \quad (2.7.4)$$

の関係式が得られます。ここで

$$X' = x' \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad X'_0 = x'_0 \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.7.5)$$

とおくと、(2.7.5) より、ローレンツ変換の式 (2.2.15)

$$\begin{cases} x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + \beta x_0}{\sqrt{1 + \beta^2}} \\ x_0 = \frac{x'_0 + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (2.7.6)$$



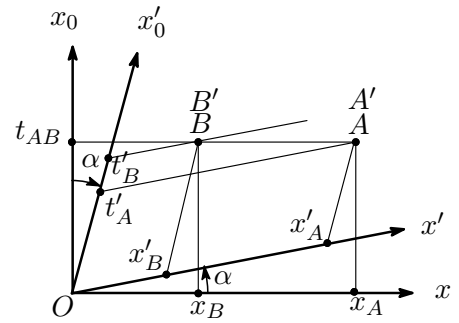
が得られます。 $k = \sqrt{(1 + \beta^2)/(1 - \beta^2)}$ とおくと、 $X' = kx'$ 、 $X'_0 = kx'_0$ なので、図形上の X' 、 X'_0 軸のスケールは k だけずれています。したがって、幾何学的にローレンツ変換を考える場合には、時空軸の x' の代わりに kx' を、 x'_0 の代わりに kx'_0 をプロットしておけばいいことになります。

¹⁹ ict と虚数が付いていないことに注意。この場合、ローレンツ変換は斜交座標で表わされることになります。

²⁰ x'_0, x' の両軸は、粒子の速度の大きさにより扇子が開いたり閉じたりするようなイメージで捉えればよい。

同時刻の相対性

S 系において2つの事件 A, B が同時刻 ($t_A = t_B = t_{AB}$) で起きたとします。この事件は S 系の時空図では点 $A(t_{AB}, x_A)$, 点 $B(t_{AB}, x_B)$ となります。この事件は S' 系では点 $A'(t'_A, x'_A)$, $B'(t'_B, x'_B)$ となり, A' の起こった時刻は t'_A , B' の起こった時刻は t'_B で $t'_A \neq t'_B$ つまり, 同時刻に事件は起こっていないということが図から即座にわかります。



ローレンツ収縮

S' 系の X' 軸に沿って長さ ℓ_0 の棒が横たわっており, その両端を AB とします²¹。これを図で描くと右図のようになりますね。図中で AB の長さは

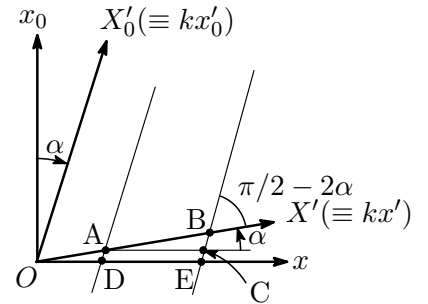
$$\overline{AB} = k\ell_0 = \ell_0 \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.7.7)$$

点 A, B を通る世界線をそれぞれ引いて x 軸と交叉する点を

D, E とすると, \overline{DE} が S から見た棒の長さ ℓ になります。三角形 ABC に正弦定理を適用すると

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC}, \quad \therefore \overline{AC} = \ell = k\ell_0 \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \ell_0 \sqrt{1-\beta^2} \quad (2.7.8)$$

となって, ローレンツ収縮の式がでできます。 S 系でも S' 系でも同時刻に長さを測定しているという点に留意ください。



走っている時計の遅れ

次の2つのケースを考えます。

1. S 系において同じ位置で時間間隔 $x_0 = \tau$ で2つの事件 A, B が起こったとします。その2つの事件を S 系に対して速度 V で動いている S' 系で測ったとき, 時間間隔が $x'_0 = \tau'$ であったとします。事件 A, B の世界線は下図の左側となります²²。 $\overline{AB} = \tau$, $\overline{A'B'} = k\tau'$ であることに注意してください。そうすると正弦定理を使って次式が得られます。

$$k\tau' = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \tau, \quad \therefore \tau' = \frac{1}{k} \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \tau = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau \quad (2.7.9)$$

これは (2.3.3) と同じ式ですね。

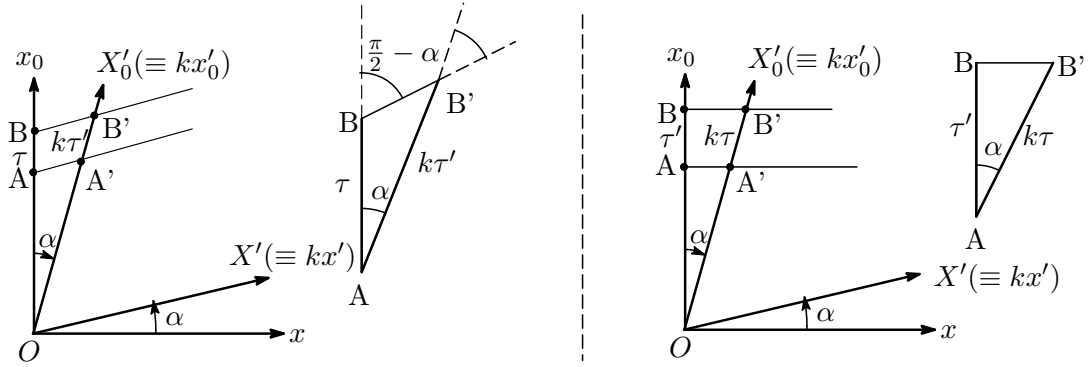
2. 今度は S 系に対して動いている S' 系において, 同じ位置で時間間隔 $x'_0 = \tau$ で2つの事件 A, B が起こったとします。 S' 系で2つの事件の時間間隔は $x'_0 = \tau$ であったとします。 S 系から測定した場合の時間間隔を τ' とすると, 図の右²³から明らかなように

$$k\tau \cos \alpha = \tau', \quad \therefore \tau' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau \quad (2.7.10)$$

²¹ S' 系で同時刻に A, B 両端の位置を測定している。

²² A から斜交座標上の A' への線引きは X' 軸と平行な線を引けばよいわけですね。

²³ 斜交座標 A' 点から直交座標 A 点への線引きは x 軸と平行な線を引けばよいわけですね。



速度の合成則

S 系である速度 v で走っている物体を考えます。その世界線を AB とし、 x 軸となす角を γ とすれば

$$\tan \delta = \frac{x_0}{x} = c \frac{t}{x} = \frac{c}{v}, \quad \therefore \frac{v}{c} = \cot \delta \quad (2.7.11)$$

また、

$$\frac{V}{c} = \tan \alpha \quad (2.7.12)$$

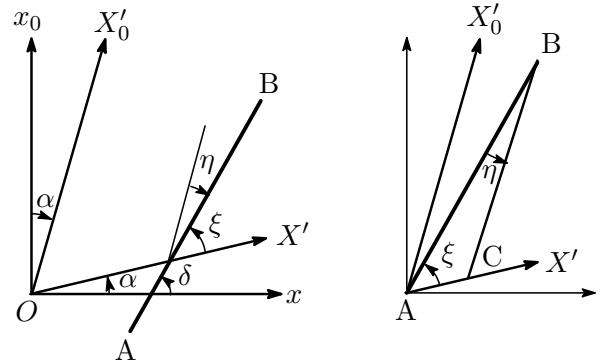
右図より

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \eta} = \frac{\overline{BC}}{\sin \xi}, \quad \overline{AC} = kx', \quad \overline{BC} = kt'$$

$$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{c} \frac{x'}{t'} = \frac{v'}{c} = \frac{\sin \eta}{\sin \xi}, \quad v' = c \frac{\sin \eta}{\sin \xi}$$

角 ξ, η は

$$\xi = \delta - \alpha, \quad \eta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \delta$$



これを (2.7) に入れて

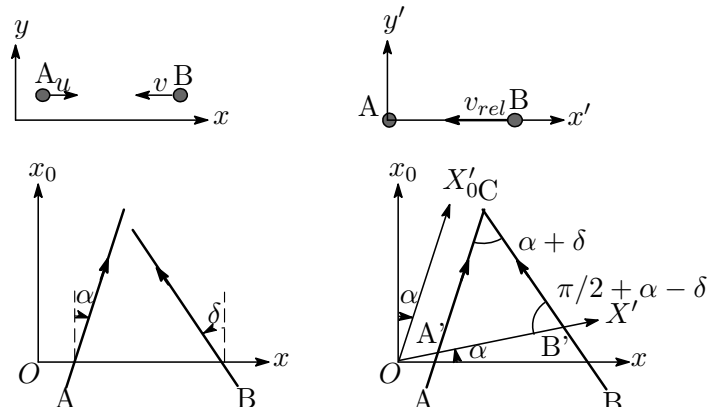
$$v' = c \frac{\cos(\delta + \alpha)}{\sin(\delta - \alpha)} = c \frac{\cot \delta - \tan \alpha}{1 - \cot \delta \tan \alpha} = c \frac{(v/c) - \beta}{1 - (v/c)(V/c)}$$

$$\therefore v' = \frac{v - V}{1 - \frac{1}{c^2}vV} \quad (2.7.13)$$

が得られます。この式は以前導出した (2.5.2) です。

相対速度

2個の粒子 A, B があり、粒子 A は x 軸の正の方向に速さ u で、粒子 B が x 軸の負の方向に速さ v で走っているとすれば、その相対速度を求めます。粒子 A, B は速さ u, v で動いているので、その世界線は $\tan \alpha = u/c, \tan \delta = v/c$ で表わされます。次に相対速度を求めるために、粒



子 A の静止系に移ります。その系での粒子 A, B の世界線は右の図となりますね。S' 系では粒子 A は静止しています。点 C で 2 粒子が衝突するまでの時間は A'C = kt', 粒子 B の移動距離は A'B' = kx' となるので, 粒子 A から見た粒子 B の相対速度 $v_{rel}(= x'/t')$ はしたがって

$$\frac{A'B'}{A'C} = \frac{1}{c} \frac{x'}{t'} = \frac{1}{c} v_{rel} \quad (2.7.14)$$

で与えられます。三角形 A'CB に正弦定理を適用すると

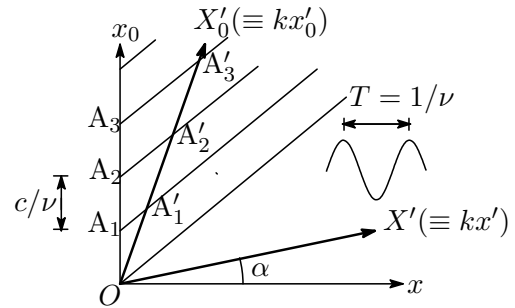
$$\begin{aligned} \frac{A'B'}{A'C} &= \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\pi/2 + \alpha - \delta)} = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\cos(\alpha - \delta)} = \frac{\sin \alpha \cos \delta + \cos \alpha \sin \delta}{\cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \delta}{1 + \tan \alpha \tan \delta} = \frac{1}{c} \frac{u + v}{1 + \frac{1}{c^2} uv} = \frac{1}{c} v_{rel} \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

$$\therefore v_{rel} = \frac{u + v}{1 + \frac{1}{c^2} uv}$$

となって, (2.5.17) と同じ結果が得られます。

ドップラー効果

最後に, 観測者が光源から V の速度で遠ざかっていく場合のドップラー効果を考えます。原点 O に静止した光源が放出する光の世界線は図中 45° の斜線で描かれますね。1 つの波の山が原点からでて次の山が出るまでの時間間隔は, 光の振動数を ν として c/ν です。この波を光源に対して速度 V で遠ざかっていく観測者が眺めるとすると, 右図のようになります。



$$\angle A'_1 A_1 O = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi, \quad \angle A_1 A'_1 O = \pi - (\alpha + \frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{4}\pi - \alpha$$

となるので, 三角形 $OA_1A'_1$ に正弦定理を使うと

$$OA_1 / \sin(\pi/4 - \alpha) = OA'_1 / \sin(3\pi/4) \quad (2.7.16)$$

$OA_1 = c/\nu$, $OA'_1 = (c/\nu')k$ を²⁴上式に入れて整理すると, (2.7.3) を使って

$$\nu' = \nu k(\cos \alpha - \sin \alpha) = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}} \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (2.7.17)$$

となり, (2.4.6) が得られます。

M&M 3: 波の位相のローレンツ変換不変について

速度 v の平面波 $\psi(t, x) = A \sin(\omega t - kx) = \omega t - kx = 2\pi\nu(t - x/v)$ を位相といいました。ここでは 2π を省いた $\nu(t - x/v)$ を位相とし, その物理的意味を考えてみましょう。

振動数 ν の静止した光源から発射された光の波の山が $t = 0$ 原点 O を通過したとします。この波の山が P 点に到達するまでの時間を t_0 とします。そうすると, 時間 $t(> t_0)$ までに P 点を通過した波の数は, したがって $\nu(t - t_0) = \nu(t - x/c)$ となり, これは波の位相と同じですね。つまり, 時刻 t までに P 点を通過する波の数が位相に等しいということです。

²⁴ X'_0 軸のスケール変換を忘れないように!

さて、時空図で考えます。P 点はローレンツ変換で結ばれる同一点です。S 系での時空図では波の位相は PA の間の波の数になります。BA=ct₀ = c(x/c) = x, PA= ct-BA= ct - x なので、この間に含まれる波の数は PA/(c/ν) = ν(t - x/c) です。一方、S' 系では BA→B'A', PA→PA' に移り、PA' = ct', B'A' = c(x'/c) = x' となり、波の位相は PA' の間の波の数で、PA'/(c/ν') = ν'(t' - x'/c) となります。この波の数は図から分かるように、S 系と同じですね。したがって、位相はローレンツ変換で不変ということになります。念のため、いまの場合、位相のローレンツ不変を式で確認しておきましょう。(2.7.6) と (2.7.17) を使います。

$$\begin{aligned} \nu'(ct' - x') &= \nu'(x'_0 - x') = \nu'\gamma(1 + \beta)(x_0 - x), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \\ &= \nu\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(1 + \beta)(x_0 - x) = \nu(ct - x) \end{aligned} \quad (2.7.18)$$

∴ ν'(t' - x'/c) = ν(t - x/c)

