

第3章 相対論的力学

第2章では特殊相対論における空間・時間の性質について調べてきました。この章では、このような時空間の中で物体の運動方程式はどのように記述されるのか、さらにはマクスウェルの電磁理論は相対論的にどのような形で定式化されるのかというところを調べていくことにします。少し数学的な準備をしておく必要があるのですが、まずはその辺りから進めていきましょう。

3.1 数学的準備

3.1.1 2次元時空

当面、1次元空間と時間軸からなる2次元時空間を考え、その数学的な構造を調べます。空間座標を x の代わりに x_1 、時間軸として虚数座標 $x_4 \equiv ix_0 = ict$ を使うと、ローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x'_1 &= (x_1 + i\beta x_4)/\sqrt{1-\beta^2} \\ x'_4 &= (x_4 - i\beta x_1)/\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & i\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ -i\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

と書けます。行列で表わされた変換係数を

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/\sqrt{1-\beta^2}, & a_{14} &= i\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ a_{41} &= -i\beta/\sqrt{1-\beta^2}, & a_{44} &= 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

と書くと、(3.1.1) は次のように簡単に書けます。

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{14}x_4 \\ x'_4 &= a_{41}x_1 + a_{44}x_4 \end{aligned} \longleftrightarrow x'_\mu = \sum_{\nu=1,4} a_{\mu\nu}x_\nu \longleftrightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \quad (3.1.3)$$

右側は同じ添字に対しては和をとるというアインシュタインの規約にもとづくもので、とくに支障がなければこの表記を使っていくことにします。変換係数の行列式は (3.1.2) の定義より

$$\det(a_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = 1 \quad (3.1.4)$$

また、

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1,4} a_{\mu 1}a_{\mu 1} &= a_{\mu 1}a_{\mu 1} = a_{11}a_{11} + a_{41}a_{41} = 1 \\ \sum_{\mu=1,4} a_{\mu 4}a_{\mu 4} &= a_{\mu 4}a_{\mu 4} = a_{14}a_{14} + a_{44}a_{44} = 1 \\ \sum_{\mu=1,4} a_{\mu 1}a_{\mu 4} &= a_{\mu 1}a_{\mu 4} = a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44} = 0 \\ \sum_{\mu=1,4} a_{\mu 4}a_{\mu 1} &= a_{\mu 4}a_{\mu 1} = a_{14}a_{11} + a_{44}a_{41} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

なので、(3.1.5) をまとめて書くと

$$\sum_{\mu=1,4} a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = a_{1\nu}a_{1\lambda} + a_{4\nu}a_{4\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \begin{cases} \nu = \lambda : 1 \\ \nu \neq \lambda : 0 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

となります。これは直交変換の条件ですね。全く同様にして

$$\sum_{\mu=1,4} a_{\nu\mu}a_{\lambda\mu} = a_{\nu\mu}a_{\lambda\mu} = a_{\nu 1}a_{\lambda 1} + a_{\nu 4}a_{\lambda 4} = \delta_{\nu\lambda} \begin{cases} \nu = \lambda : 1 \\ \nu \neq \lambda : 0 \end{cases} \quad (3.1.7)$$

この関係式を使うと, (3.1.3) より,

$$\begin{aligned} x'_\mu x'_\mu &= x'_1 x'_1 + x'_4 x'_4 \\ &= (a_{11}x_1 + a_{14}x_4)(a_{11}x_1 + a_{14}x_4) + (a_{41}x_1 + a_{44}x_4)(a_{41}x_1 + a_{44}x_4) \\ &= (a_{11}a_{11} + a_{41}a_{41})x_1x_1 + (a_{14}a_{14} + a_{44}a_{44})x_4x_4 + 2(a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44})x_1x_4 \\ &= x_1x_1 + x_4x_4 \\ &= x_\mu x_\mu \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

となります。アインシュタインの規約を使うと次のようにスッキリ書けます¹。

$$\begin{aligned} x'_\mu x'_\mu &= a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda}x_\nu x_\lambda \\ &= \delta_{\nu\lambda}x_\nu x_\lambda = x_\nu x_\nu \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

この式はよく知られているように 2 次元座標回転において距離の 2 乗は不変ということに相当します。いまの場合, ローレンツ変換で $x_1^2 + x_4^2$ は不変, つまり, 原点から世界点への距離, 世界距離の 2 乗はローレンツ不変ということを意味します。注意すべきは, 距離の 2 乗といっても x_4 は虚数 ($= ix_0$) なので, $x_1^2 + x_4^2 = x_1^2 - x_0^2$ で必ずしも正の値をとるわけではなく, 負の値になる場合もあることに留意してください。

スカラー, ベクトル

2 次元時空におけるスカラーやベクトルを定義します²。

(1) スカラー: ある量 ϕ が座標変換 (3.1.3) で ϕ' に変換したとき, $\phi = \phi'$ ならば, ϕ をスカラーといいます。先ほどの $x_\mu x_\mu$ という量は (3.1.9) によりスカラーですね。スカラーは座標系によらない量です。

(2) ベクトル: 成分 A_1, A_4 をもつ量 A を考えます。 A_4 は虚数なので

$$A_4 = iA_0 \quad (3.1.10)$$

によって実の量 A_0 を定義します。成分 A_1, A_4 が座標変換によって, (3.1.3) 同じ変換

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu \quad (3.1.11)$$

をする場合, A_μ をベクトルといいます。

(3) ベクトルの和: ベクトルの成分同士の足し算をベクトルの和と定義します。

$$D_\mu = A_\mu + B_\mu \quad (3.1.12)$$

(4) スカラー積: 2つのベクトルの同じ成分同士を掛け合わせ, それらを足したものと定義します。

$$A_\mu B_\mu = A_1 B_1 + A_4 B_4 = A_1 B_1 - A_0 B_0 \quad (3.1.13)$$

¹ ギリシャ字の添字 μ, ν, λ, ρ などは 1 から 4 をとるものとします。

² $A_\mu = (A_1, iA_0), B_\mu = (B_1, iB_0)$

スカラー積は座標変換で

$$A'_\mu B'_\mu = a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} A_\nu B_\lambda = \delta_{\nu\lambda} A_\nu B_\lambda = A_\nu B_\nu \quad (3.1.14)$$

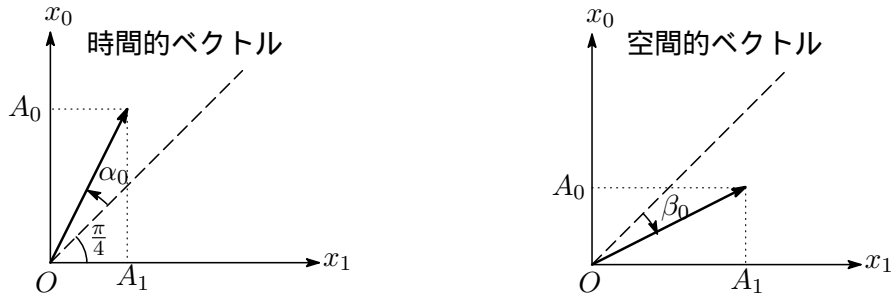
となり、変換不変量です。ベクトル A_μ と B_μ のスカラー積が 0 になる場合、ベクトル A_μ と B_μ は直交しているといえます³。

$$A_\mu B_\mu = A_1 B_1 - A_0 B_0 = 0 \quad (3.1.15)$$

ある慣性系でベクトルが直交していれば、どの慣性系においてもその関係は保持されます。添字 4 が虚数単位を持っているので、あるベクトルの自分自身とスカラー積は正、負、0 の場合が考えられ、それぞれのケースを次のように分類しています。

1. $A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 > 0$ のとき、 A_μ を空間的ベクトル
2. $A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 < 0$ のとき、 A_μ を時間的ベクトル
3. $A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 = 0$ のとき、 A_μ を光的ベクトル⁴

時間的ベクトルの中で、 x_0 軸方向に向いたベクトルを未来を向いた時間的ベクトルといい、それと逆向きのベクトルを過去を向いた時間的ベクトルといいます。なお、空間的、時間的、光的の意味については次の 4 次元時空の項で触れることにします。時間的、空間的ベクトルを実の成分を使って時空間図形として描くと下図になります。注意すべきは虚数成分を持つので、図形上のベクトルの長さ $\sqrt{A_1^2 + A_0^2}$ とベクトル A_μ のスカラー積は異なることに注意してください。



A_μ が時間的ベクトルの場合：ベクトル A_μ の長さ a を

$$a^2 = -A_\mu A_\mu = A_0^2 - A_1^2 \quad (3.1.16)$$

と定義します⁵。もちろん、この長さは図の矢印の長さとは一致しません。時間的ベクトルの矢印の長さはピタゴラスの定理より

$$\sqrt{A_1^2 + A_0^2} = \sqrt{A_0^2 - A_1^2} \sqrt{\frac{A_0^2 + A_1^2}{A_0^2 - A_1^2}} = a \sqrt{\frac{A_0^2 + A_1^2}{A_0^2 - A_1^2}} \quad (3.1.17)$$

となり、図の矢印の長さとベクトルの長さはの関係式が得られます。さらに、

$$\begin{aligned} A_0^2 - A_1^2 &= (A_1^2 + A_0^2) \sin^2(\alpha_0 + \pi/4) - A_1^2 = \frac{1}{2} \{A_0^2 - A_1^2 + (A_0^2 + A_1^2) \sin 2\alpha_0\} \\ \therefore A_0^2 - A_1^2 &= (A_0^2 + A_1^2) \sin 2\alpha_0 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

³ ベクトル A, B が必ずしも 90° の角をなしていなくてもよい。定義 (3.1.15) を満たせばよい。

⁴ null ベクトルともいう。

⁵ 時間的ベクトルなのでスカラー積は負となりますが、長さは正の物理量なので負号が付いています。

となるので，矢印の長さとはベクトルの長さの関係式 (3.1.16) は

$$\sqrt{A_1^2 + A_0^2} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\alpha_0}} \quad (3.1.19)$$

となります。時間的ベクトルの A_1, A_0 はそれぞれ

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\alpha_0}} \cos(\pi/4 + \alpha_0), \quad A_0 = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\alpha_0}} \sin(\pi/4 + \alpha_0) \quad (3.1.20)$$

となります。

2つの時間的ベクトル A_μ, B_μ のスカラー積：

$$\begin{aligned} A_\mu B_\mu &= A_1 B_1 - A_0 B_0 \\ &= \frac{ab}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_1}} \{ \cos(\pi/4 + \alpha_0) \cos(\pi/4 + \alpha_1) - \sin(\pi/4 + \alpha_0) \sin(\pi/4 + \alpha_1) \} \\ &= -ab \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_1}} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

A_μ が空間的ベクトルの場合： A_μ が空間的ベクトルの場合，図の矢印の長さとは空間的ベクトルの長さの関係は

$$a^2 = A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 \quad (3.1.22)$$

として

$$\sqrt{A_1^2 + A_0^2} = a \sqrt{\frac{A_0^2 + A_1^2}{A_1^2 - A_0^2}} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\beta_0}} \quad (3.1.23)$$

となります。空間的ベクトルの A_1, A_0 はそれぞれ

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\beta_0}} \cos(\pi/4 - \beta_0), \quad A_0 = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\beta_0}} \sin(\pi/4 - \beta_0) \quad (3.1.24)$$

となります。

時間的ベクトル A_μ と空間的ベクトル B_μ のスカラー積：

$$\begin{aligned} A_\mu B_\mu &= A_1 B_1 - A_0 B_0 \\ &= \frac{ab}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\beta_0}} \{ \cos(\pi/4 + \alpha_0) \cos(\pi/4 - \beta_0) - \sin(\pi/4 + \alpha_0) \sin(\pi/4 - \beta_0) \} \\ &= ab \frac{\sin(\beta_0 - \alpha_0)}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\beta_0}} \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

$\alpha_0 = \beta_0$ のとき，時間的ベクトル A_μ と空間的ベクトル B_μ は直交します。

未来を向いた時間的ベクトルの和は未来を向いた時間的ベクトルになる：時間的ベクトル A_μ, B_μ のそれぞれ長さを a, b とします。ベクトル A_μ と B_μ の和である合成ベクトル D_μ も時間的ベクトルで，その長さを d とすると

$$d \geq a + b \quad (3.1.26)$$

を満たします。この関係は，通常の関係 $|A + B| \leq |A| + |B|$ と不等号が逆になっていますね！ (3.1.26) の証明を以下にしておきます。

【証明】 A_μ, B_μ は未来を向いた時間的ベクトルなので，そのスカラー積は。

$$A_\mu A_\mu = -a^2, \quad B_\mu B_\mu = -b^2 \quad (a, b > 0) \quad (3.1.27)$$

合成ベクトル D_μ も未来を向いた時間的ベクトルで，その長さを $d^2 = -D_\mu D_\mu$ で定義すると，

$$d^2 = -D_\mu D_\mu = -(A_\mu + B_\mu)(A_\mu + B_\mu) = a^2 + b^2 - 2A_\mu B_\mu \quad (3.1.28)$$

ところで (3.1.21) より

$$-A_\mu B_\mu = ab \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sqrt{\sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha_1}} \geq ab \quad (3.1.29)$$

なので，

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2A_\mu B_\mu \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \quad (3.1.30)$$

となります。（証明終わり）

3.1.2 4次元時空 (ミンコフスキー空間)

空間座標を x_1, x_2, x_3 ，虚数の時間座標を $x_4 = ix_0 = ict$ と，これら 4 個の空間・時間座標を一緒にして x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) と書きます。この 4 次元の時空間をミンコフスキー空間と呼びます。ローレンツ変換は

$$x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 \quad (3.1.31)$$

を不変にする線形変換で，

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \begin{cases} \nu = \lambda : 1 \\ \nu \neq \lambda : 0 \end{cases} \quad (3.1.32)$$

で表わされます。(3.1.32) を行列形式で書くと

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (3.1.33)$$

となります⁶。(3.1.32) の係数同士の関係式は ν と λ がそれぞれ 1 から 4 までとるので見かけ上 16 個の条件式ですが， ν と λ について対称ということ を考慮すると，独立な条件式としては 10 個になります⁷。したがって，自由に決められる $a_{\mu\nu}$ の数は $16 - 10 = 6$ 個で，これは x_1, x_2, x_3 軸周りの回転角を指定する 3 個のパラメータと慣性系同士の相対速度成分 (V_1, V_2, V_3) 3 個の合計 6 個からなります。

スカラー，ベクトル，テンソル

4 次元時空におけるスカラーやベクトルも 2 次元時空の場合と同じように定義できます。ベクトルの場合，虚数の第 4 成分を含むので，通常の 3 次元ベクトルとは異なるという意味で，特に 4 元ベクトルと呼ばれます。また，ここではテンソルも登場します。

・スカラー：ある量 ϕ が (3.1.32) のローレンツ変換で

$$\phi' = \phi \quad (3.1.34)$$

のとき， ϕ をスカラーといいます。

⁶ a_{ij} の係数行列はいわゆる直交行列に相当します。

⁷ 転置対称なので，独立な条件の数は対角成分と非対角成分の半分の和となります。一般に n 次元では，条件の数は n 個の対角成分と $n^2 - n$ 個の非対角成分の半分の和となります。したがって自由に取れるパラメータの数は $(n^2 - n) - (n^2 - n)/2 = n(n - 1)/2$ 個。 $n = 4$ では 6 個となります。

・ベクトル：ローレンツ変換 (3.1.32) で

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu \quad (3.1.35)$$

と変換される量としてベクトルを定義します。この逆変換は

$$A_\mu = a_{\nu\mu} A'_\nu \quad (3.1.36)$$

となります⁸。これは、右辺に (3.1.35) を入れると

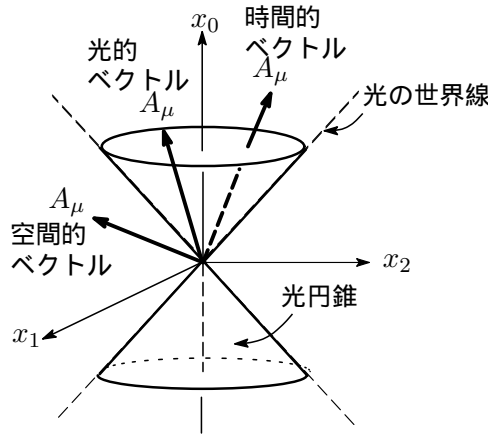
$$A_\mu = a_{\nu\mu} a_{\nu\lambda} A'_\lambda = \delta_{\mu\lambda} A'_\lambda = A'_\mu \quad (3.1.37)$$

となって (3.1.36) が成立します。スカラー積は

$$A_\mu B_\mu = a_{\nu\mu} A'_\nu a_{\lambda\mu} B'_\lambda = \delta_{\nu\lambda} A'_\nu B'_\lambda = A'_\nu B'_\nu \quad (3.1.38)$$

となってローレンツ変換不変量です。ベクトル A_μ の自分自身とのスカラー積は、2次元時空の場合と同様、次のように空間的ベクトル、時間的ベクトル、光的ベクトルと分類されます。

1. $A_\mu A_\mu = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_0^2 > 0$ のとき、 A_μ を空間的ベクトル
2. $A_\mu A_\mu = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_0^2 < 0$ のとき、 A_μ を時間的ベクトル
3. $A_\mu A_\mu = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_0^2 = 0$ のとき、 A_μ を光的ベクトルあるいはヌルベクトル



ここで、空間的、時間的、光的という言葉の意味を簡単に述べておくことにします。準備として、慣性系 S で発生した2つの任意の事象 P, Q の位置ベクトルを $x_P = (x_1, y_1, z_1, ict_1)$, $x_Q = (x_2, y_2, z_2, ict_2)$ とし、別の慣性系 S' における(ローレンツ変換された)位置ベクトルを $x'_P = (x'_1, y'_1, z'_1, ict'_1)$, $x'_Q = (x'_2, y'_2, z'_2, ict'_2)$ とします。次の2つのベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P &\longrightarrow A_\mu = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ic(t_2 - t_1)) \\ \mathbf{A}' = \mathbf{x}'_Q - \mathbf{x}'_P &\longrightarrow A'_\mu = (x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, z'_2 - z'_1, ic(t'_2 - t'_1)) \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

を定義し、 S, S' 系の事象の間隔を s_{12}, s'_{12} とすると

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= A_\mu A_\mu = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= -c^2 t_{12}^2 + \ell_{12}^2 \\ s'_{12}{}^2 &= A'_\mu A'_\mu = -c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= -c^2 t'_{12}{}^2 + \ell'_{12}{}^2 \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

⁸ 線形直交変換では $a_{\mu\nu}$ の逆行列は転置行列 $a_{\nu\mu}$ に等しい。

事象間隔はローレンツ不変なので

$$-c^2 t_{12}^2 + \ell_{12}^2 = -c^2 t'_{12}{}^2 + \ell'_{12}{}^2 \quad (3.1.41)$$

が成り立ちます。

1. 空間的：任意の2つの事象 P, Q が同一の時刻に生じるような慣性系 S' を見いだすことができるかを調べます。 S' で $t'_{12} = 0$ という条件を (3.1.41) に入れると

$$s_{12}^2 = -c^2 t_{12}^2 + \ell_{12}^2 = \ell_{12}^2 > 0 \quad (3.1.42)$$

したがって $A_\mu A_\mu > 0$ であれば S' が存在することになります。このとき、 S 系での2つの事象間の距離は

$$\ell_{12} > ct_{12} \quad (3.1.43)$$

となり、2つの事象間の距離 ℓ_{12} は時間 t_{12} の間に光が走る距離を超えたところにあります。すなわち、2つの事象 P, Q の間には因果関係が全くなく、空間的に離れた事象となります。このようなベクトル A_μ を空間的ベクトルと呼んでいます。

2. 時間的：P, Q 2つの事象が同一の場所に生じるような慣性系 S' を見いだすことができるかを調べます。 S' で $\ell'_{12} = 0$ という条件を (3.1.41) に入れる

$$s_{12}^2 = A_\mu A_\mu = -c^2 t_{12}^2 + \ell_{12}^2 = -c^2 t_{12}^2 < 0 \quad (3.1.44)$$

このとき、 S 系での2つの事象間の距離は

$$\ell_{12} < ct_{12} \quad (3.1.45)$$

となり、任意の2つの事象 P, Q の間に因果関係をとるもつことができます。このようなベクトル A_μ を時間的ベクトルと呼んでいます。

3. 光的：任意の2つの事象 P, Q は光の信号の世界線上の2点を表わします。

以上のことを図示すると全ページの図になり、時間的ベクトル、空間的ベクトルは光の世界線からなる光円錐を境界に区分けされます。(以上)

さて、話を元に戻して。。。微分演算子 $\partial/\partial x_\nu$ もベクトルとして振舞うことを次に示します。

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\nu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu}$$

ここで両辺に $a_{\rho\nu}$ を掛けて、 ν について和をとると

$$a_{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = a_{\rho\nu} a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \delta_{\rho\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x'_\rho}$$

ここで添字の ρ を μ に書き換えると

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (3.1.46)$$

これはベクトルの定義 (3.1.35) を満たしますね。

ベクトル $\partial/\partial x_\mu$ の自身とのスカラー積は

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square \quad (3.1.47)$$

となります。□ ≡ ∇² - $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ はダランベリアンと呼ばれ，ローレンツ変換不変量です。当然ですが，ベクトル $\partial/\partial x_\mu$ とベクトル A_μ のスカラー積は

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} (a_{\nu\mu} A'_\nu) = a_{\mu\nu} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\rho} \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\mu} = a_{\mu\nu} a_{\rho\mu} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\rho} \\ &= \delta_{\nu\rho} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\rho} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

でローレンツ不変量です。ベクトル A_μ と B_μ の直交条件はスカラー積が 0，つまり

$$A_\mu B_\mu = 0 \quad (3.1.49)$$

で定義します。

・テンソル：16 個の成分を持つある量 $T_{\mu\nu}$ がローレンツ変換 (3.1.32) で

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} T_{\lambda\rho} \quad (3.1.50)$$

と変換するなら， $T_{\lambda\rho}$ を 2 階テンソルといいます⁹。この逆変換は

$$T_{\mu\nu} = a_{\lambda\mu} a_{\rho\nu} T'_{\lambda\rho} \quad (3.1.51)$$

テンソルの成分が

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (3.1.52)$$

のとき対称テンソルといい，

$$T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu} \quad (3.1.53)$$

のとき反対称テンソルといいます¹⁰。2 階テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \quad (3.1.54)$$

と書けるので，前半を $S_{\mu\nu}$ ，後半を $A_{\mu\nu}$ とすると

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}), \quad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \quad (3.1.55)$$

となり，2 階テンソルは対称テンソル $S_{\mu\nu}$ と反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ の和に分解することができます。 $S_{\mu\nu}$ ， $A_{\mu\nu}$ とそれぞれ 16 個の成分を持ちますが，独立な成分の数は 印をつけたように 10 個と 6 個になります。

$$S_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \circ S_{11} & \circ S_{12} & \circ S_{13} & \circ S_{14} \\ S_{12} & \circ S_{22} & \circ S_{23} & \circ S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & \circ S_{33} & \circ A_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & \circ S_{44} \end{pmatrix}, \quad A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \circ A_{12} & \circ A_{13} & \circ A_{14} \\ -A_{12} & 0 & \circ A_{23} & \circ A_{24} \\ -A_{31} & -A_{32} & 0 & \circ A_{34} \\ -A_{14} & -A_{24} & -A_{34} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.56)$$

2 つのベクトルの各成分の積 $A_\mu B_\nu$ は

$$\begin{aligned} A'_\mu &= a_{\mu\lambda} A_\lambda, \quad B'_\nu = a_{\nu\rho} B_\rho, \quad A'_\mu B'_\nu = a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} A_\lambda B_\rho \\ \therefore T'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} T_{\lambda\rho}, \quad \text{ただし } T'_{\mu\nu} = A'_\mu B'_\nu, \quad T_{\lambda\rho} = A_\lambda B_\rho \end{aligned}$$

⁹ μ, ν 2 個の添字を持つから 2 階テンソルと呼ばれ，成分数は $4^2 = 16$ 個。 n 個の添字をもつテンソルは n 階テンソルといわれ，成分数は 4^n 個になります。ちなみにベクトルは添字が 1 個なので 1 階テンソルとも呼ばれ，スカラーは添字が 0 個なので 0 階テンソルともいえます。

¹⁰ 反対称の意味は添字を入れ替えると符号が反転することから。

となって，テンソルになります。テンソル $T_{\mu\nu}$ とベクトル A_μ の積 $T_{\mu\nu}A_\mu$ を

$$B_\nu = T_{\mu\nu}A_\mu \quad (3.1.57)$$

とにおいて，ローレンツ変換すると

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}T_{\lambda\rho}, & A'_\mu &= a_{\mu\xi}A_\xi \\ B'_\nu &= T'_{\mu\nu}A'_\mu = a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}T_{\lambda\rho}a_{\mu\xi}A_\xi = a_{\nu\rho}\delta_{\lambda\xi}T_{\lambda\rho}A_\xi = a_{\nu\rho}(T_{\lambda\rho}A_\lambda) \\ &= a_{\nu\rho}B_\rho \end{aligned}$$

したがって，テンソルとベクトルの積はベクトルとなります。

次に，テンソルの微分を

$$A_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \quad (3.1.58)$$

とにおいてローレンツ変換すると

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x'_\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x'_\nu} = a_{\mu\nu}a_{\nu\rho} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\tau} a_{\tau\nu} \\ &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}a_{\tau\nu} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\tau} = a_{\mu\lambda}\delta_{\tau\rho} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\tau} = a_{\mu\lambda} \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial x_\rho} \\ &= a_{\mu\lambda}A_\lambda \end{aligned} \quad (3.1.59)$$

したがって，テンソルの微分はベクトルになります。

テンソルの縮約

テンソルの縮約とは，テンソルの成分の2つの添字 μ と ν を等しいとにおいて，それらについて1から4まで加える操作のことです。縮約によってテンソルの階数は2階低くなります。

・2階テンソル $T_{\mu\nu}$ の縮約： スカラーとなります。

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{34} \\ T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} \end{pmatrix} \quad (3.1.60)$$

$$\longrightarrow (\text{縮約}) : T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44} = \text{tr } \mathbf{T}$$

テンソル $T_{\mu\nu}$ の縮約は行列 $T_{\mu\nu}$ の対角和で，これをトレースといいます。

・ベクトルの各成分の積 $A_\mu B_\nu$ の縮約： スカラーとなります。

2つのベクトルの別々の成分の積 $A_\mu B_\nu$ はテンソルになりました。これを縮約すると

$$A_\mu B_\nu = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 & A_1 B_4 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 & A_2 B_4 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 & A_3 B_4 \\ A_4 B_1 & A_4 B_2 & A_4 B_3 & A_4 B_4 \end{pmatrix} \quad (3.1.61)$$

$$\longrightarrow (\text{縮約}) : A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 = A_\mu B_\mu$$

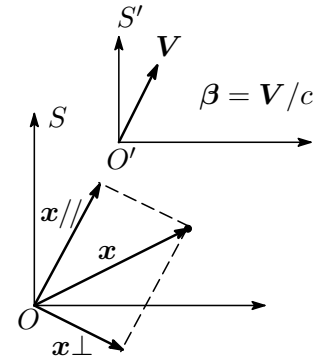
となり，スカラーになります。

3.1.3 一般のローレンツ変換

いままで S 系に対して x 軸方向に等速 V で移動する S' 系へのローレンツ変換を考えてきましたが、これをもっと一般化して、勝手な方向へ速度 $V = (V_1, V_2, V_3)$ へ走る S' 系へのローレンツ変換を考えます。これを V 方向へのローレンツブーストと呼んでいます。

位置ベクトル x を速度 V と平行な部分 x_{\parallel} とそれに垂直な部分 x_{\perp} に分解して次のように書きます。

$$\begin{aligned} x_{\parallel} &= \left(\frac{x \cdot \beta}{|\beta|} \right) \frac{\beta}{|\beta|} = \frac{x \cdot \beta}{\beta^2} \beta \\ x_{\perp} &= x - x_{\parallel} \end{aligned} \quad (3.1.62)$$



ローレンツ変換を受けるのは x_{\parallel} だけなので

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'_{\parallel} = \frac{x_{\parallel} - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_{\perp} = x_{\perp} \\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta \cdot x_{\parallel}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (3.1.63)$$

と表わせます¹¹。 $x' = x'_{\parallel} + x'_{\perp}$ なので、(3.1.62) を代入して

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x_{\parallel} - \beta x_0) + x_{\perp} = \gamma \left(\frac{x \cdot \beta}{\beta^2} \beta + \frac{x}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \frac{x \cdot \beta}{\beta^2} \beta \right) - \gamma \beta x_0 \\ &= x + \frac{1}{\beta^2} (\gamma - 1) (x \cdot \beta) \beta - \gamma \beta x_0 \end{aligned} \quad (3.1.64)$$

が得られます。 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ なので

$$\begin{aligned} (x \cdot \beta) \beta &= (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \therefore \{(x \cdot \beta) \beta\}_1 &= (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) \beta_1 = (x_j \beta_j) \beta_1 \\ \{(x \cdot \beta) \beta\}_2 &= (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) \beta_2 = (x_j \beta_j) \beta_2 \\ \{(x \cdot \beta) \beta\}_3 &= (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) \beta_3 = (x_j \beta_j) \beta_3 \end{aligned} \quad (3.1.65)$$

と表わせます。したがって、(3.1.64) の x' を成分ごとに書くと

$$x'_i = \left[\delta_{ij} + \frac{1}{\beta^2} (\gamma - 1) \beta_i \beta_j \right] x_j - \gamma \beta_i x_0 \quad (3.1.66)$$

となり、また

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta \cdot x) = \gamma(x_0 - \beta_i x_i) \quad (3.1.67)$$

となります。これが任意の方向へのローレンツ変換となります。この逆変換は

$$\begin{aligned} x_i &= \left[\delta_{ij} + \frac{1}{\beta^2} (\gamma - 1) \beta_i \beta_j \right] x'_j + \gamma \beta_i x'_0 \\ x_0 &= \gamma(x'_0 + \beta_i x'_i) \end{aligned} \quad (3.1.68)$$

(3.1.66) と (3.1.67) をまとめて行列表示で書くと

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta_1 & -\gamma \beta_2 & -\gamma \beta_3 \\ -\gamma \beta_1 & 1 + (\gamma - 1) \beta_1^2 / \beta^2 & (\gamma - 1) \beta_1 \beta_2 / \beta^2 & (\gamma - 1) \beta_1 \beta_3 / \beta^2 \\ -\gamma \beta_2 & (\gamma - 1) \beta_1 \beta_2 / \beta^2 & 1 + (\gamma - 1) \beta_2^2 / \beta^2 & (\gamma - 1) \beta_2 \beta_3 / \beta^2 \\ -\gamma \beta_3 & (\gamma - 1) \beta_1 \beta_3 / \beta^2 & (\gamma - 1) \beta_2 \beta_3 / \beta^2 & 1 + (\gamma - 1) \beta_3^2 / \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.1.69)$$

$\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$ とおけば、いままでのローレンツ変換となります。

¹¹ 矢印の左は従来のローレンツ変換 (参考まで)。

一般の速度合成則

一般のローレンツ変換による速度の合成則は次のようになります。速度 v を V と平行な方向 v_{\parallel} と垂直な方向 v_{\perp} に分解します。

$$v_{\parallel} = \frac{v \cdot V}{V^2} V, \quad v_{\perp} = v - v_{\parallel} \quad (3.1.70)$$

そして、

$$\begin{aligned} v'_{\parallel} &= \frac{v_{\parallel} - V}{1 - v_{\parallel} \cdot V/c^2} = \frac{v_{\parallel} - V}{1 - v \cdot V/c^2} \\ v'_{\perp} &= \frac{v_{\perp}}{\gamma(1 - v \cdot V/c^2)} \end{aligned} \quad (3.1.71)$$

とおくと

$$\begin{aligned} v' &= v'_{\parallel} + v'_{\perp} = \frac{\gamma(v_{\parallel} - V) + v - v_{\parallel}}{\gamma(1 - v \cdot V/c^2)} \\ &= \frac{(\gamma - 1)V(v \cdot V)/V^2 - \gamma V + v}{\gamma(1 - v \cdot V/c^2)} \end{aligned} \quad (3.1.72)$$

となります。速度の大きさは

$$\begin{aligned} v'^2 &= v'^2_{\parallel} + v'^2_{\perp} = v'_{\parallel} \cdot v'_{\parallel} + v'_{\perp} \cdot v'_{\perp} = \frac{(v_{\parallel} - V)^2 + v_{\perp}^2(1 - V^2/c^2)}{(1 - v \cdot V/c^2)^2} \\ &= \frac{v^2 - 2v_{\parallel}V + V^2 - v_{\perp}^2V^2/c^2}{(1 - v \cdot V/c^2)^2} \\ &= \frac{v^2 - 2v \cdot V + V^2 - [v^2V^2 - (v \cdot V)^2]/c^2}{(1 - v \cdot V/c^2)^2} \\ &= \frac{v^2 + V^2 - v^2V^2/c^2 - c^2 + c^2 - 2v \cdot V + (v \cdot V)^2/c^2}{(1 - v \cdot V/c^2)^2} \\ &= \frac{-(c^2 - v^2)(1 - V^2/c^2) + c^2(1 - v \cdot V/c^2)^2}{(1 - v \cdot V/c^2)^2} \\ &= c^2 - \frac{(c^2 - v^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 - v \cdot V/c^2)^2} \end{aligned} \quad (3.1.73)$$

$v < c, V < c$ なので右辺第 2 項は常に正となり、 $v' < c$ となります。

以上で数学的な準備が終わったので、いよいよ相対論的力学に進んでいくことにします。

3.2 相対論的力学

3.2.1 固有時

ニュートンの運動方程式から導かれる運動粒子の軌跡は、絶対時間 t (スカラー量) をパラメータとして $x = x(t)$ で表わすことができました。相対論の世界においては時間 t はローレンツ不変なスカラー量ではないので、これをパラメータにとるわけにはいきません。しかし、 t の代わりに固有時 τ をパラメータにとれば

$$x_1 = x_1(\tau), \quad x_2 = x_2(\tau), \quad x_3 = x_3(\tau), \quad x_4 = x_4(\tau), \quad (3.2.1)$$

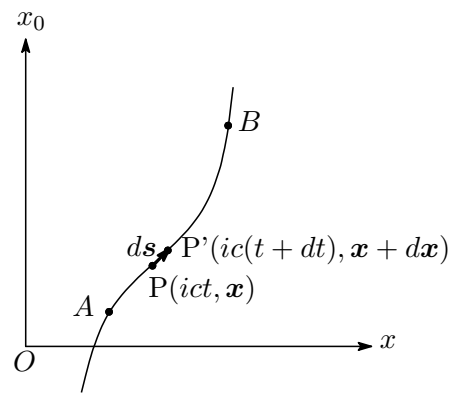
と表わすことができます。粒子の運動は 4 次元時空の世界線で表わされ、世界線上の近接する 2 点 P, P' に注目します。

PP' を結ぶベクトルを ds とすると、 ds は曲線 (世界線) の線素ですね。ベクトル ds は時間的ベクトルになるので

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= -dx_\mu dx_\mu = c^2(dt)^2 - dx_i dx_i \\ &= c^2(dt)^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

とおけます。慣性系 S での粒子の速度は $v_i = dx_i/dt$ なので、これを上式に入れて整理すると

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2.3)$$



が得られます¹²。いま、粒子と一緒に動く慣性系 S' を考えると、この系では $v = 0$ で ds はローレンツ不変なので

$$ds = c dt' \quad (3.2.4)$$

ところで dt' は粒子の固有時となるので、これを $d\tau$ と書き換えると

$$ds = c d\tau \longrightarrow d\tau = \frac{ds}{c} \quad (3.2.5)$$

を得ます。一般に曲線は線素をパラメータとして記述できるので、固有時 τ をパラメータとして (3.2.1) の記述が可能となります。(3.2.5) を (3.2.3) に入れると

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma_p \quad (3.2.6)$$

を得ます。

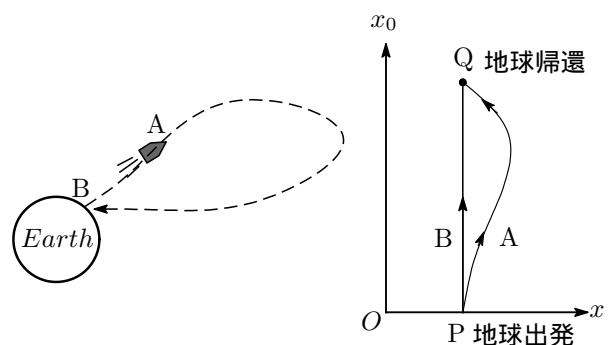
【補注】 ミューオンの寿命：宇宙線として地表に降り注ぐミューオンは $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ 秒で崩壊するといわれています。そうすると、仮にミューオンが光速で走っていたとしても、寿命が尽きるまでに高々 600m 程度しか走ることができず、とても大気圏を突破して地表にまで降ってこれないはずですが。。。？実は、ミューオンの寿命はミューオンに固定した時計が示す寿命で、地表の観測者から見ると寿命は

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (3.2.7)$$

で与えられ、その結果、光速の 99.99% で走る場合には寿命が 100 倍のびるので、10,000 メートルの大気圏を突き抜けて地表まで到達することになります。

双子のパラドックス

双子の兄弟 A, B (同い年) がいて、弟 (B) は地球に残り、兄 (A) は光速に近いロケットで宇宙旅行して地球に戻ってきて、弟と再会しました。この時、弟は、「兄は常に動いていたのでその時計は遅れ、地球に帰還したときは、私より年は若くなっている」と主張しました。一方、兄は「弟の方こそ常に動いていたのだからその時計は遅れ、弟の方が私より年は若い」と主張。この一見相矛盾する 2 つの主張



¹² $v = c$ とおくと右辺は 0 となるので、光子には以下の議論は適用できません。

はどうなるのでしょうか？

地球上にいる弟 B から見た 2 人の世界線は右図のようになります。B は地球に止まっていたので世界線は x_0 軸に平行な直線，一方，A はロケットで加速度運動していたので，世界線は曲線で表わされます。兄が地球を出発して再び地球に戻ってくるまでの時間を求めましょう。ここで留意すべきは，兄の加速度運動は，B のいる地球の慣性系から観測した記述になります。兄のロケットと共に動く座標系は加速度運動をしているので，慣性系ではありません。したがって，B からみた場合は特殊相対性理論では取り扱えません。つまり，A と B は非対称な関係ですね。

さて，時計が示す固有時の経過は (3.2.5) の積分で与えられます。B の場合，(3.2.5) で $v = 0$ として，

$$\Delta\tau_B = \int_P^Q d\tau_B = \int_P^Q dt = t_Q - t_P \quad (3.2.8)$$

一方，A の場合，

$$\Delta\tau_A = \int_P^Q dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} v(t)^2} < \int_P^Q dt = \Delta\tau_B \quad (3.2.9)$$

したがって，兄が地球に帰還したとき，弟は兄より年を喰っているということになります。つまり，弟の持っている時計を基準にしたとき，兄の持っている時計は弟の時計よりゆっくり進んでいたということです。

3.2.2 4元 - 速度・加速度・運動量

4元速度ベクトル

粒子の運動は固有時 τ をパラメータとして $x_1(\tau)$, $x_2 = x_2(\tau)$, $x_3 = x_3(\tau)$, $x_4 = x_4(\tau)$, として表わせることが分かりました。各成分を (2.2.15) のローレンツ変換すると

$$\left. \begin{aligned} x'_1(\tau) &= \gamma\{x_1(\tau) + i\beta x_4(\tau)\} \\ x'_2(\tau) &= x_2(\tau) \\ x'_3(\tau) &= x_3(\tau) \\ x'_4(\tau) &= \gamma\{x_4(\tau) - i\beta x_1(\tau)\} \end{aligned} \right\} \longrightarrow x'_\mu(\tau) = a_{\mu\nu} x_\nu(\tau) \quad (3.2.10)$$

τ で微分すると

$$\frac{dx'_\mu(\tau)}{d\tau} = a_{\mu\nu} \frac{dx_\nu(\tau)}{d\tau} \quad (3.2.11)$$

$d\tau$ はスカラーで dx_ν は 4 元ベクトルなので， $dx_\nu(\tau)/d\tau$ は 4 元ベクトルとして振舞います。そこでこれを 4 元速度ベクトル u_μ として定義します。

$$u_\mu(\tau) = \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} \quad (3.2.12)$$

$\mu = 1, 2, 3$ を空間成分， $\mu = 4$ を時間成分といいます。4 元速度ベクトル $u_\mu(u_1, u_2, u_3, u_4)$ と 3 次元速度ベクトル $v_i(v_1, v_2, v_3)$ の関係は¹³

$$\begin{aligned} \text{空間成分：} \quad u_i(\tau) &= \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma_p v_i \\ \text{時間成分：} \quad u_4 &= \frac{dx_4(\tau)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = i\gamma_p c \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\therefore u_\mu = (\gamma_p \mathbf{v}, i\gamma_p c)$$

¹³ 添字の 4 は虚数単位を持つことに留意してください。 $x_4 = ix_0, u_4 = iu_0$

となり, $v \ll c$ の場合, 4元速度ベクトルの空間成分はニュートン力学の速度 v_i と一致します。
4元速度ベクトルのスカラー積は

$$u_\mu u_\mu = u_i u_i - u_0 u_0 = -c^2 < 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.14)$$

となるので, 4元速度ベクトルは時間的であつ時間成分 $u_4 (\equiv iu_0)$ は空間成分 u_i はと独立ではありません。4元速度 u の大きさは常に

$$|u| = \sqrt{u_\mu u_\mu} = c \quad (3.2.15)$$

で光速に等しく, また, 粒子が粒子が静止している場合の4元速度は

$$u_\mu = (0, 0, 0, i\gamma_p c) \quad (3.2.16)$$

となります。 u_μ のローレンツ変換は (3.2.10) より

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_1 = \frac{dx'_1}{d\tau} = \gamma(u_1 + i\beta u_4) \\ u'_2 = \frac{dx'_2}{d\tau} = \frac{dx_2}{d\tau} = u_2 \\ u'_3 = \frac{dx'_3}{d\tau} = \frac{dx_3}{d\tau} = u_3 \\ u'_4 = \frac{dx'_4}{d\tau} = \gamma(u_4 - i\beta u_1) \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \gamma(u'_1 - i\beta u_4) \\ u_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{dx'_2}{d\tau} = u'_2 \\ u_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{dx'_3}{d\tau} = u'_3 \\ u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \gamma(u'_4 + i\beta u_1) \end{array} \right. \quad (3.2.17)$$

行列形式で書くと

$$u'_\mu = a_{\mu\nu} u_\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

4元加速度

4元加速度は4元速度を固有時で微分した量として定義されます。

$$a_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} \quad (3.2.19)$$

(3.2.14) を τ で微分すると

$$u_\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = 0 \quad (3.2.20)$$

となるので, 4元速度と4元加速度は常に直交します。

4元運動量

4元運動量を

$$p_\mu \equiv m_0 u_\mu \quad (3.2.21)$$

で定義します。 m_0 は固有質量とか静止質量と呼ばれます。空間成分と時間成分は (3.2.13) より

$$\begin{aligned} \text{空間成分} : p_i &= \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma_p m_0 v_i \\ \text{時間成分} : p_4 &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = i\gamma_p m_0 c \\ \therefore p_\mu &= (\gamma_p m_0 \mathbf{v}, i\gamma_p m_0 c) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$v \ll c$ の場合, 4元運動量の空間成分は $p_i = m_0 v_i$ となってニュートン力学での運動量に一致します。時間成分は何を意味しているのでしょうか。(3.2.20)の両辺に m_0 を掛けると

$$0 = u_\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dp_i}{d\tau} - \frac{dx_0}{d\tau} \frac{dp_0}{d\tau} = \gamma_p^2 \left(v_i \frac{dp_i}{dt} - c \frac{dp_0}{dt} \right) \quad (3.2.23)$$

を得ます。右辺の $v_i \cdot dp_i/dt$ はニュートン力学では仕事(エネルギー)の時間変化を表わしている¹⁴ので, 粒子のエネルギー E とし

$$v_i \frac{dp_i}{dt} = \frac{dE}{dt} \quad (3.2.24)$$

とにおいて(3.2.23)を整理すると

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{dp_0}{dt} \quad (3.2.25)$$

これを t で積分して

$$E = cp_0 = \gamma_p m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \therefore p_0 = \frac{E}{c} \quad (3.2.26)$$

を得ます(積分定数は E に取り込みそれを改めて E とすればよい)。4元運動量の時間成分は粒子のエネルギーを c で割ったものであることが分かります。したがって, $\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3)$ を4元運動量の空間成分とすると, (3.2.22)は次のようにも書けます。

$$p_\mu = (\mathbf{p}, iE/c) \quad (3.2.27)$$

いま,

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma_p m_0 \quad (3.2.28)$$

とおくと, (3.2.22),(3.2.26)は

$$p_i = \gamma_p m_0 v_i = m(v) v_i \quad (3.2.29)$$

$$p_0 = \gamma_p m_0 c = m(v) c \quad (3.2.30)$$

$$E = \gamma_p m_0 c^2 = m(v) c^2 \quad (3.2.31)$$

と書けます。(3.2.31)はエネルギーと質量の等価性を示す有名な関係式ですね。 $m(v)$ は相対論的質量と呼ばれます¹⁵。 p_μ のスカラー積は(3.2.14)より

$$p_\mu p_\mu = m_0^2 u_\mu u_\mu = \mathbf{p}^2 - p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{1}{c^2} E^2 = -m_0^2 c^2 \quad (3.2.32)$$

これからよくお目にかかる式の

$$E = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} \quad (3.2.33)$$

を得ます。 $\mathbf{p}^2 \ll m_0^2 c^2$ の場合

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_0^2 c^2} \right)^{1/2} \doteq m_0 c^2 + \frac{1}{2m_0} \mathbf{p}^2 \quad (3.2.34)$$

と近似でき, 右辺第2項にニュートン力学の運動エネルギーがでてきます。特に, 光子のエネルギーは(3.2.33)で $m_0 = 0$ とおいて

$$E = c |\mathbf{p}| \quad (3.2.35)$$

¹⁴ 仕事率: $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$

¹⁵ “相対論的質量は誤解をまねきやすい概念なので使わない方が望ましく、(一般相対性理論も含めて)相対論では、物体の質量は座標系によらない不変量と考えればよい(Wiki)”とされています。。。

速度，運動量とエネルギーの関係式は，(3.2.29) と (3.2.31) より

$$v_i = c^2 \frac{p_i}{E} \quad (3.2.36)$$

を得ます。また，(3.2.33) を p_i について微分すると

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = \frac{cp_i}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}} = c^2 \frac{p_i}{E^2} \quad (3.2.37)$$

となるので，(3.2.36) は

$$v_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} \quad (3.2.38)$$

とも書けます。4元運動量のローレンツ変換は

$$\begin{cases} p'_1 = \gamma(p_1 + i\beta p_4) \\ p'_2 = p_2 \\ p'_3 = p_3 \\ p'_4 = \gamma(p_4 - i\beta p_1) \end{cases} \quad (3.2.39)$$

$$p'_\mu = a_{\mu\nu} p_\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \quad (3.2.40)$$

3.2.3 相対論的運動方程式

ニュートンの運動方程式は運動量を p ，力を F とするとき

$$\text{ニュートンの運動方程式：} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.2.41)$$

で表わされました。4元運動量の空間成分 p_i が (3.2.41) の形で運動方程式として成立すると仮定すれば， $f(f_1, f_2, f_3)$ をニュートン力学的な力として

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i \quad \longrightarrow \quad \frac{dp_i}{d\tau} = \gamma_p f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.42)$$

とおけます。時間成分の方は (3.2.24), (3.2.25) より

$$v_i \frac{dp_i}{d\tau} = v_i \frac{dp_i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c \frac{dp_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c \frac{dp_0}{d\tau} = \gamma_p v_i f_i \quad (3.2.43)$$

となるので

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{\gamma_p}{c} v_i f_i \quad \longrightarrow \quad \frac{dp_4}{d\tau} = \frac{i}{c} \gamma_p v_i f_i \quad (3.2.44)$$

が得られます。したがって4元力 F_μ を

$$F_\mu = \left(\gamma_p \mathbf{f}, \frac{i}{c} \gamma_p \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \right) \quad (3.2.45)$$

と定義すると相対論的運動方程式として

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu \quad (3.2.46)$$

を得ます。ちなみ 4 元力のローレンツ変換は

$$\begin{aligned}
 F'_\mu &= \frac{dp'_\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_1/d\tau \\ dp_2/d\tau \\ dp_3/d\tau \\ dp_4/d\tau \end{pmatrix} \\
 \therefore F'_\mu &= a_{\mu\nu} F_\nu
 \end{aligned} \tag{3.2.47}$$

【補注】: くだいようですが, (3.2.46) がローレンツ変換で不変であることを確かめておきましょう。ローレンツ変換

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \tag{3.2.48}$$

を固有時 τ で微分すると

$$\frac{dx'_\mu}{d\tau} = a_{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} \longrightarrow u'_\mu = a_{\mu\nu} u_\nu \tag{3.2.49}$$

両辺に m_0 を掛けてもう一度微分すると

$$\frac{dp'_\mu}{d\tau} = a_{\mu\nu} F_\nu \tag{3.2.50}$$

一方, 4 元力のローレンツ変換は

$$F'_\mu = a_{\mu\nu} F_\nu \tag{3.2.51}$$

なので, (3.2.50) は

$$\frac{dp'_\mu}{d\tau} = F'_\mu \tag{3.2.52}$$

となり, S 系での運動方程式と同じ形になります。ローレンツ変換に対して方程式の形が変わらないことをローレンツ共変性といいます。

f はニュートン力学の力に相当する量で, ローレンツ変換で次のように変換されます (ニュートン力学では力は慣性系同士の変換で変わらなかった。下式で $\beta \rightarrow 0$ とすれば分かる。)

$$f'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\gamma(dp_x - \beta p_0)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c} dx\right)} = \frac{\frac{dp_x}{dt} - \beta \frac{dE}{dt} \frac{1}{c}}{1 - \frac{1}{c} \beta \frac{dx}{dt}} = \frac{f_x - \frac{\beta}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{1 - \beta \frac{v_x}{c}} \tag{3.2.53}$$

分子の $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ は単位時間当たりの仕事を表わす仕事率で, 力に時間の要素が絡んできます。つまり, 相対性理論では空間と時間が絡み合っていると同様の状況が 4 元力 F_μ にもあるということです。ちなみに, f'_y, f'_z も同様にして導くことができます

$$f'_y = \frac{f_y}{\gamma\left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right)}, \quad f'_z = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right)} \tag{3.2.54}$$

加速度と力の方向は一致しない

ニュートンの運動方程式では加速度の方向と力の方向は一致しました。一方, 相対論的運動方程式からは加速度と力の方向が一致しないことが導かれます。相対論的運動方程式 (3.2.46) を空

間成分と時間成分に分けて書くと

$$\text{空間成分： } \frac{dp_i}{d\tau} = F_i \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (3.2.55)$$

$$\text{時間成分： } \frac{dp_4}{d\tau} = F_4 \quad \longrightarrow \quad c^2 \frac{dm}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \quad (\because p_4 = iE/c, E = mc^2) \quad (3.2.56)$$

(3.2.55) より

$$\frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \quad (3.2.57)$$

これに (3.2.56) をいれて整理すると

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}}{c^2} \mathbf{v} \quad (3.2.58)$$

となり、加速度と力の方向は一致しないことが分かります。 $v \ll c$ のときは $m \simeq m_0$ で、ニュートンの運動方程式が近似的に成立します。右辺第 2 項は \mathbf{v} と \mathbf{f} の内積を含んでいるので、次の特別な場合が考えられます。

1. $\mathbf{v} \perp \mathbf{f}$ の場合： $\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = 0$ となるので、形式的にニュートンの運動方程式が成立する。

$$\gamma_p m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \quad (3.2.59)$$

m_0 が相対論的質量 $\gamma_p m_0$ になっている点がニュートンの運動方程式と異なります。

2. $\mathbf{v} // \mathbf{f}$ の場合： $\mathbf{v} = v(\mathbf{f}/f)$ とおくと

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{v\mathbf{f}}{c^2} \frac{\mathbf{f}}{f} = \frac{\mathbf{f}}{\gamma_p^2}, \quad \therefore \gamma_p^3 m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \quad (3.2.60)$$

形式的にニュートンの運動方程式とが成立しますが、質量は m_0 ではなく $\gamma_p^3 m_0$ となります。

粒子の運動方向に対して同じ方向あるいは垂直方向に力を加えると粒子の質量はそれぞれ $\gamma_p m_0$, $\gamma_p^3 m_0$ と増加するように見えます。古い文献には $\gamma_p m_0$ を横質量, $\gamma_p^3 m_0$ を縦質量と名づけられていますが、この名称はいまではほとんど使われないようです。

3.2.4 解析力学からのアプローチ

解析力学からのアプローチは最小作用の原理(変分原理)¹⁶からの出発で、相対論の場合、ローレンツ変換に対して不変な作用積分を見つけ、その作用積分の極値を与える方程式を解いて粒子の運動を決定していきます。この方程式をオイラー・ラグランジュの方程式といいます。

自由粒子

簡単のために相互作用のない自由粒子を取り上げます。自由粒子に対する作用を、比例係数を α として

$$I = -\alpha \int_a^b ds = -\alpha c \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_0}^{t_1} L_0 dt \quad (3.2.61)$$

とおきます。 ds はローレンツ不変な世界線の線素です¹⁷。 L_0 は自由粒子のラグランジアンと呼ばれるもので

$$L_0 = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2.62)$$

¹⁶ 「物体の運動は、作用積分と呼ばれる量を最小にするような軌道にそって実現される。」というものです。

¹⁷ 作用積分の前にマイナスの符号が付いているのは作用積分が極小値をとることができるようにするためで、詳しいことはランダウ・リフシツ「場の古典論」等を参照ください。

次に比例係数 α を求めなければなりません。古典力学で自由粒子のラグランジアンは運動エネルギーに等しかった ($L = T = \frac{1}{2}mv^2$) ことを思い出しましょう。そこで、 $v \ll c$ として右辺を展開して2項までとると

$$L_0 \doteq -\alpha c + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2 \quad (3.2.63)$$

となりますが、右辺第1項は単なる定数で変分を取るときに消えてしまいます。そこで L_0 から省いておきます。第2項は運動エネルギーの項で、この項は $m_0 v^2/2$ という式でなければなりません。ということで比例係数は

$$\alpha = m_0 c \quad (3.2.64)$$

と求まり、自由粒子のラグランジアン L_0 は

$$L_0 = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2.65)$$

となります。さて、作用積分の変分をとり、それを0として I の最小値を与える方程式を求めていきます。

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_0}^{t_1} L_0 dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \{L_0(x_i + \delta x_i) - L_0(\delta x_i)\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \frac{d\delta x_i}{dt} dt \\ &= \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = 0 \end{aligned} \quad (3.2.66)$$

δx_i は $t = t_1, t_2$ で0とおきました。任意の無限少 δx_i に対して δI が0になるのは

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.67)$$

のときで、これが求める方程式となります。これをオイラー・ラグランジュの方程式といいます。自由粒子の場合は次式となります。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = 0 \quad (3.2.68)$$

運動量は $p_i = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i}$ で与えられるので

$$p_i = \frac{\partial L_0}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma_p m_0 v_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.69)$$

これは (3.2.22) と一致します。ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_0 &= p_i v_i - L_0 = \gamma_p m_0 v_i^2 + \frac{m_0 c^2}{\gamma_p} = \gamma_p m_0 c^2 = E \\ &= c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

で粒子のエネルギーに等しい。ついでに正準運動方程式は

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_i} = c^2 \frac{p_i}{E} = v_i \quad (3.2.71)$$

で、これは (3.2.37) に一致します。

ポテンシャル力

粒子に外力が作用し，力 f がポテンシャル V から導かれるケースを考えます。ラグランジアンは

$$L = L_0 - V = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(x_1, x_2, x_3) \quad (3.2.72)$$

で，オイラー・ラグランジュの方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.73)$$

いま x 成分に注目して

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{m_0v_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -f_1 \quad (3.2.74)$$

したがって運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0v_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = f_1 \longrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{f} \quad (3.2.75)$$

運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m_0v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma_p m_0v_i = mv_i \quad (3.2.76)$$