第4章　相対論的電磁気学

4.1　マクスウェル方程式のローレンツ変換

電場を $\boldsymbol{E}$，磁場を $\boldsymbol{B}$ とすると，マクスウェルの方程式は慣性系 S において

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x},t) \tag{4.1.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{4.1.2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{4.1.3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{4.1.4}$$

ρ は電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度です。μ_0 は透磁率で真空の誘電率を ε_0 とすると $\mu_0=(\varepsilon_0c^2)^{-1}$ の関係にあります。マクスウェル方程式はローレンツ変換で不変であるということを仮定して以下の議論を進めていくことにします。慣性系 S' におけるマクスウェルの方程式は

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}',t')=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}',t') \tag{4.1.5}$$

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t')=0 \tag{4.1.6}$$

$$\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}',t')=-\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'} \tag{4.1.7}$$

$$\nabla'\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t')=\mu_0\boldsymbol{j}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'} \tag{4.1.8}$$

ローレンツ変換とその逆変換は

$$\begin{aligned}
t'&=\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right),\quad x'=\gamma(x-Vt),\quad y'=y,\quad z'=z\\
t&=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right),\quad x=\gamma(x'+Vt'),\quad y=y',\quad z=z'
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

これから S と S' 系における微分演算子の関係式として次式が得られます。

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'}-V\frac{\partial}{\partial x'}\right),\quad \frac{\partial}{\partial t'}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{4.1.10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\right),\quad \frac{\partial}{\partial x'}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'},\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'}
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

4.1.1　電場と磁場のローレンツ変換

(4.1.3) の x 成分は

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_y=-\frac{\partial}{\partial t}B_x \tag{4.1.12}$$

微分演算子の関係式を使って書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial y'}E_z - \frac{\partial}{\partial z'}E_y = -\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right)B_x \tag{4.1.13}$$

(4.1.2) より

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial y}B_y + \frac{\partial}{\partial z}B_z = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\right)B_x + \frac{\partial}{\partial y'}B_y + \frac{\partial}{\partial z'}B_z = 0 \\ &\therefore\ \gamma\frac{\partial}{\partial x'}B_x = \frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}B_x - \frac{\partial}{\partial y'}B_y - \frac{\partial}{\partial z'}B_z \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

これを (4.1.13) に入れて整理すると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y'}(E_z + VB_y) - \frac{\partial}{\partial z'}(E_y - VB_z) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t'}B_x \\ \therefore\ &\frac{\partial}{\partial y'}\big(\gamma(E_z + VB_y)\big) - \frac{\partial}{\partial z'}\big(\gamma(E_y - VB_z)\big) = -\frac{\partial}{\partial t'}B_x \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

一方，(4.1.7) より

$$\frac{\partial}{\partial y'}E'_z - \frac{\partial}{\partial z'}E'_y = -\frac{\partial}{\partial t'}B'_x \tag{4.1.16}$$

(4.1.15) と (4.1.16) は同じ方程式であるので

$$E'_z = \gamma(E_z + VB_y), \quad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \quad B'_x = B_x \tag{4.1.17}$$

を得ます。y 成分については

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z + \frac{\partial}{\partial t}B_y = \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right) - \gamma\frac{\partial}{\partial x'}(E_z + VB_y) + \frac{\partial}{\partial z'}E_x = 0 \tag{4.1.18}$$

また，(4.1.17) より

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}(E_z + VB_y) = \frac{\partial}{\partial x'}E'_z \tag{4.1.19}$$

なので，(4.1.19) を (4.1.18) にいれて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial z'}E_x - \frac{\partial}{\partial x'}E'_z = \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right) \tag{4.1.20}$$

これは (4.1.7) と同じ形をしているので，これとの比較により

$$E_x = E'_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right) \tag{4.1.21}$$

を得ます。同様にして z 成分について計算して

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right) \tag{4.1.22}$$

を得ます。以上，**電場と磁場のローレンツ変換**を整理すると次のようになります。

$$\begin{cases} E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + VB_y) \\ B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \dfrac{\beta}{c}E_z\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \dfrac{\beta}{c}E_y\right) \end{cases} \tag{4.1.23}$$

電場をローレンツ変換すると磁場が混ざるし，磁場をローレンツ変換すると電場が混ざりますね。

4.1.2 電荷密度，電流密度のローレンツ変換と 4 元電流密度

(4.1.5) より

$$
\begin{aligned}
\nabla' \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}', t') &= \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x + \frac{\partial}{\partial y}\{\gamma(E_y - VB_z)\} + \frac{\partial}{\partial z}\{\gamma(E_z + VB_y)\} \\
&= \gamma\nabla\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_x - \gamma V(\nabla\times\boldsymbol{B})_x \\
&= \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho + \frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_x - \gamma V(\nabla\times\boldsymbol{B})_x
\end{aligned}
\tag{4.1.24}
$$

また，(4.1.4) より

$$
(\nabla\times\boldsymbol{B})_x = \mu_0 J_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_x - \gamma V(\nabla\times\boldsymbol{B})_x = -\gamma V\mu_0 j_x \tag{4.1.25}
$$

これを上式に入れると

$$
\begin{aligned}
\nabla' \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}', t') &= \gamma\Big(\frac{1}{\varepsilon_0}\rho - \mu_o V j_x\Big) = \frac{1}{\varepsilon_0}\gamma\Big(\rho - \frac{\beta}{c}j_x\Big) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\rho'
\end{aligned}
\tag{4.1.26}
$$

したがって，**電荷密度のローレンツ変換**は

$$
c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_x) \tag{4.1.27}
$$

最後に電流密度のローレンツ変換をもとめます。

$$
\begin{aligned}
(\nabla'\cdot\boldsymbol{B}')_{x'} &= \frac{\partial}{\partial y'}B'_z - \frac{\partial}{\partial z'}B'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right)\right\} \\
&= \gamma\left\{(\nabla\times\boldsymbol{B})_x - \frac{\beta}{c}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{4.1.28}
$$

また，

$$
\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t'}\right)'_x = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}E_x + V\frac{\partial}{\partial x}E_x\right) = \gamma\frac{\partial}{\partial t}E_x + \gamma c\beta\frac{\partial}{\partial x}E_x \tag{4.1.29}
$$

これらを (4.1.27) に入れて

$$
\begin{aligned}
(\nabla'\cdot\boldsymbol{B}')_{x'} &= \gamma\left\{(\nabla\times\boldsymbol{B})_x - \frac{\beta}{c}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z\right)\right\} \\
&= \mu_0 j'_x + \frac{\gamma}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}E_x + c\beta\frac{\partial}{\partial x}E_x\right) \\
\therefore\ \mu_0 j'_x &= \gamma\left\{(\nabla\times\boldsymbol{B})_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}E_x - \frac{\beta}{c}\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right\} \\
&= \mu_0\gamma(j_x - \beta c\rho)
\end{aligned}
\tag{4.1.30}
$$

全く同様にして

$$
j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z \tag{4.1.31}
$$

ここで $x \to 1, y \to 2, z \to 3$ と書き換えて

$$
j_4 = ij_0 = ic\rho \tag{4.1.32}
$$

を定義すると，**電流密度のローレンツ変換**は

$$
j'_1 = \gamma(j_i + i\beta j_4), \quad j'_2 = j_2, \quad j'_3 = j_3, \quad j'_4 = ic\rho' = \gamma(j_4 - i\beta j_1) \tag{4.1.33}
$$

となります。したがって

$$j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} j'_1 \\ j'_2 \\ j'_3 \\ j'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} \tag{4.1.34}$$

j_μ **はローレンツ変換に対してベクトルとして変換**するので，4 元ベクトルである j_μ を **4 元電流密度**と呼んでいます。

$$\boldsymbol{j}_\mu = (j_1, j_2, j_3, j_4) = (\boldsymbol{j}, ic\rho) \tag{4.1.35}$$

4.1.3　4 元ベクトルポテンシャル

電場と磁場を電磁ポテンシャル ϕ，$\boldsymbol{A}$ を使って書き換えると[1]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla\phi(\boldsymbol{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.1.36}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.1.37}$$

となります。ローレンツ変換後も式の形は変わらないので

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}', t') = -\nabla'\phi(\boldsymbol{x}', t') - \frac{\partial}{\partial t'}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}', t') \tag{4.1.38}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}', t') = \nabla' \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}', t') \tag{4.1.39}$$

とおけます。(4.1.36) の x 成分は $E_x = E'_x$ であることを使って

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_x = -\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\phi - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - c\beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)A_x \\ &= -\frac{\partial}{\partial x'}\left\{\gamma(\phi - c\beta A_x)\right\} - \frac{\partial}{\partial t'}\left\{\gamma(A_x - \frac{\beta}{c}\phi\right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_x = E'_x \\ \therefore\ \frac{\phi'}{c} &= \gamma\left(\frac{\phi}{c} - \beta A_x\right), \quad A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{\beta}{c}\phi\right) \end{aligned} \tag{4.1.40}$$

次に y 成分は $E'_y = \gamma(E_y - VB_z)$ であることを使って

$$\begin{aligned} E'_y &= -\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A_y = \gamma\left\{-\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_y - V(\nabla \times \boldsymbol{A})_y\right\} \\ &= \gamma\left\{-\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_y - V\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\right\} \\ &= \gamma\left\{-\frac{\partial}{\partial y}(\phi - VA_x) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right)A_y\right\} \\ &= -\gamma\frac{\partial}{\partial y'}(\phi - VA_x) - \frac{\partial}{\partial t'}A_y = -\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_y \\ \therefore\ \frac{\phi'}{c} &= \gamma\left(\frac{\phi}{c} - \beta A_x\right), \quad A'_y = A_y \end{aligned} \tag{4.1.41}$$

z 成分も同様にして

$$A'_z = A_z \tag{4.1.42}$$

[1] ϕ をスカラーポテンシャル，$\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルといいます。この辺りの話は HP の「電磁気学再入門を読む」か適当な電磁気学のテキストを参照ください。

となります。ここで

$$A_4 = iA_0 = i\phi/c \tag{4.1.43}$$

を定義して整理すると

$$\begin{cases} A'_1 = \gamma(A_1 + i\beta A_4) \\ A'_2 = A_2 \\ A'_3 = A_3 \\ A'_4 = \gamma(A_4 - i\beta A_1) \end{cases} \tag{4.1.44}$$

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \\ A'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \tag{4.1.45}$$

A_μ **はローレンツ変換に対してベクトルとして変換**するので，4 元ベクトルである A_μ を **4 元ベクトルポテンシャル**と呼んでいます。

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_1, A_2, A_3, i\phi/c) \tag{4.1.46}$$

4.1.4 電磁場テンソル

ここで偏微分記号を簡略化した次の記号を導入しておきます。

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad \text{ただし } \partial_4 = -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.1.47}$$

この記号を使うと

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu\partial_\mu \equiv \Box \tag{4.1.48}$$

と表すことができ，見通しがよくなります。尚，□ はダランベリアンと呼ばれており，相対論的波動方程式などにでてきます。また，**電荷保存則**は 4 元電流密度を使って

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu j_\mu = 0 \tag{4.1.49}$$

と簡潔に表わせます。

さて，4 元ベクトルポテンシャルを

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, iA_0) \qquad (A_0 = \phi/c) \tag{4.1.50}$$

とおいて，反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ を

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}) \tag{4.1.51}$$

と定義します。独立成分は 6 個ですね。マクスウェルの方程式をを使って書くと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= -\nabla\phi(\boldsymbol{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) \\ &= ic(\partial_1 A_4 - \partial_4 A_1,\, \partial_2 A_4 - \partial_4 A_2,\, \partial_3 A_4 - \partial_4 A_3) \\ \therefore\ -\frac{i\boldsymbol{E}}{c} &= (\partial_1 A_4 - \partial_4 A_1,\, \partial_2 A_4 - \partial_4 A_2,\, \partial_3 A_4 - \partial_4 A_3) \\ &= (F_{14},\, F_{24},\, F_{34}) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) &= \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) \\ &= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2,\, \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3,\, \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ &= (F_{23}, F_{31}, F_{12}) \end{aligned} \tag{4.1.52}$$

となります。電場と磁場の成分を反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ の成分で表わすと

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases} E_x=E_1=icF_{14} \\ E_y=E_2=icF_{24} \\ E_z=E_3=icF_{34} \end{cases} \Leftrightarrow E_i=icF_{i4}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{cases} B_x=B_1=F_{23} \\ B_y=B_2=F_{31} \\ B_z=B_3=F_{12} \end{cases} \Leftrightarrow B_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \tag{4.1.53}$$

また，反対称テンソル成分を電場，磁場成分で表わすと

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.54}$$

となります。この 2 階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ を**電磁場テンソル**と呼んでいます。これから

$$F_{ij}=\varepsilon_{ijk}B_k, \quad \varepsilon_{ijk}=\begin{cases} 1: & i,j,k \text{ が } 123 \text{ の偶置換のとき} \\ -1: & i,j,k \text{ が } 123 \text{ の奇置換のとき} \\ 0: & \text{その他，添字に重複する場合} \end{cases} \tag{4.1.55}$$

の関係にあることが分かります。電磁場テンソルのスカラー積は

$$\begin{aligned} J=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(&F_{11}F_{11}+F_{12}F_{12}+F_{13}F_{13}+F_{14}F_{14} \\ &+F_{21}F_{21}+F_{22}F_{22}+F_{23}F_{23}+F_{24}F_{24} \\ &+F_{31}F_{31}+F_{32}F_{32}+F_{33}F_{33}+F_{34}F_{34} \\ &+F_{41}F_{41}+F_{42}F_{42}+F_{43}F_{43}+F_{44}F_{44} \\ =\boldsymbol{B}^2-\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}& \end{aligned} \tag{4.1.56}$$

となり，J **は不変量**となります。

電磁場テンソルがローレンツ変換に対して

$$F'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}F_{\lambda\rho} \tag{4.1.57}$$

と変換されると仮定し，この仮定が成立することを確認していきます。$F_{\mu\nu}$ の独立な成分は F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34} の 6 個で，$a_{\mu\nu}$ は次の通りです。

$$a_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.1.58}$$

$F_{\mu\nu}$ 各成分の変換性を調べてみましょう。(4.1.58) を睨みながら

$$\begin{aligned} F'_{12}&=a_{1\lambda}a_{2\rho}F_{\lambda\rho} \\ &=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})F_{12}+(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})F_{13}+(a_{13}a_{24}-a_{14}a_{21}F_{14} \\ &\quad+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})F_{23}+(a_{12}a_{24}-a_{14}a_{22})F_{24} \\ &\quad+((a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23})F_{34}=a_{11}a_{22}F_{12}-a_{14}a_{22}F_{24} \\ &=\gamma(F_{12}-i\beta F_{24}) \end{aligned} \tag{4.1.59}$$

同様にして

$$\begin{aligned} &F'_{13}=\gamma(F_{13}-i\beta F_{34}), \quad F'_{14}=F_{14}, \quad F'_{23}=F_{23} \\ &F'_{24}=\gamma(F_{24}+i\beta F_{12}), \quad F'_{34}=\gamma(F_{34}+i\beta F_{13}) \end{aligned}$$

となります。

$$F'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(F_{12} - i\beta F_{24}) & \gamma(F_{13} - i\beta F_{34}) & F_{14} \\ -\gamma(F_{12} - i\beta F_{24}) & 0 & F_{23} & \gamma(F_{24} + i\beta F_{12}) \\ -\gamma(F_{13} - i\beta F_{34}) & F_{23} & 0 & \gamma(F_{34} + i\beta F_{13}) \\ -F_{14} & -\gamma(F_{24} + i\beta F_{12}) & -\gamma(F_{34} + i\beta F_{13}) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.60}$$

(4.1.54) と (4.1.62) を見比べてみましょう。電場・磁場のローレンツ変換は (4.1.23) で与えられました。

$$B'_2 = \gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3\right),\ B'_3 = \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c}E_2\right),\ E'_2 = \gamma(E_2 - VB_3),\ E'_3 = \gamma(E_3 + VB_2)$$

$F'_{\mu\nu}$ の成分を調べると

$$\begin{aligned} F'_{12} &= \gamma(F_{12} - i\beta F_{24}) = \gamma\{(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) - i\beta(\partial_2 A_4 - \partial_4 A_2)\} \\ &= \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c}E_2\right) = B'_3 \\ F'_{13} &= \gamma(F_{13} - i\beta F_{34}) = \gamma\{(\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) - i\beta(\partial_3 A_4 - \partial_4 A_3)\} \\ &= -\gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3\right) = -B'_2 \\ F'_{14} &= \partial_1 A_4 - \partial_4 A_1 = -i\frac{E_1}{c}, \quad F'_{23} = B_1, \quad F'_{24} = -i\frac{E_2}{c}, \quad F'_{34} = -i\frac{E_3}{c} \end{aligned} \tag{4.1.61}$$

となって，(4.1.54) をローレンツ変換した各成分と一致します。したがって，最初の仮定が成立します。

4.1.5 マクスウェルの方程式を電磁場テンソルで書き換える

マクスウェルの方程式を電磁場テンソルで書き換えます。まず，(4.1.1) と (4.1.4) は次のテンソル方程式で表わされることを示します。

$$\left\{ \begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}, t) \\ &\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 j_\nu \tag{4.1.62}$$

最初の式は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}, t) &= \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ &= ic(\partial_1 F_{14} + \partial_2 F_{24} + \partial_3 F_{34} + \mu_0 j_4) = 0 \\ \therefore\ \partial_1 F_{14} + \partial_2 F_{24} &+ \partial_3 F_{34} + \mu_0 j_4 = 0 \end{aligned} \tag{4.1.63}$$

次の式は，各成分に分解すると

$$\begin{aligned} (\nabla \times \boldsymbol{B})_1 - \mu_0 j_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t} &= \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \mu_0 j_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t} \\ &= \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} + \partial_4 F_{14} - \mu_0 j_1 = 0 \\ (\nabla \times \boldsymbol{B})_2 - \mu_0 j_2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_2}{\partial t} &= \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 - \mu_0 j_2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_2}{\partial t} \\ &= \partial_3 F_{23} - \partial_1 F_{12} + \partial_4 F_{24} - \mu_0 j_2 = 0 \\ (\nabla \times \boldsymbol{B})_3 - \mu_0 j_3 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial t} &= \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 - \mu_0 j_3 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial t} \\ &= \partial_1 F_{31} - \partial_2 F_{23} + \partial_4 F_{34} - \mu_0 j_4 = 0 \end{aligned} \tag{4.1.64}$$

したがって，与式が成立します。次に，残りの方程式ですが，これは次のテンソル方程式で表わされます。

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \end{cases} \longrightarrow \quad \partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0 \tag{4.1.65}$$

まず，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\partial_1 B_1+\partial_2 B_2+\partial_3 B_3=\partial_1 F_{23}+\partial_2 F_{31}+\partial_3 F_{12}=0 \tag{4.1.66}$$

次に

$$\begin{aligned} (\nabla\times\boldsymbol{E})_1+\partial_t B_1&=\partial_2 E_3-\partial_3 E_2+ic\partial_4 B_1=ic(\partial_2 F_{34}+\partial_3 F_{42}+\partial_4 F_{23})=0 \\ (\nabla\times\boldsymbol{E})_2+\partial_t B_2&=\partial_3 E_1-\partial_1 E_3+ic\partial_4 B_2=ic(\partial_3 F_{14}-\partial_1 F_{34}+\partial_4 F_{31})=0 \\ (\nabla\times\boldsymbol{E})_3+\partial_t B_3&=\partial_1 E_2-\partial_2 E_1+ic\partial_4 B_3=ic(\partial_1 F_{24}-\partial_2 F_{14}+\partial_4 F_{12})=0 \end{aligned} \tag{4.1.67}$$

となるので，与式が成立します。

以上，見てきたようにマクスウェルの方程式は次の 2 つのテンソル方程式で表わされることが分かりました。

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x},t) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \\ \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_\mu F_{\mu\nu}=-\mu_0 j_\nu \\ \partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0 \end{cases} \tag{4.1.68}$$

さて，(4.1.51) で定義した反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ は (4.1.68) の 2 つ目の式を自動的に満たしますね。

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

を代入すると

$$\begin{aligned} &\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu} \\ &=\partial_\mu(\partial_\nu A_\lambda-\partial_\lambda A_\nu)+\partial_\nu(\partial_\lambda A_\mu-\partial_\mu A_\lambda)+\partial_\lambda(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)=0 \end{aligned} \tag{4.1.69}$$

ということで，4 元ベクトルポテンシャル (4.1.50) を導入して，反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ を (4.1.51) によって表わすと，(4.1.68) の 2 つ目の式はもういらなくなり，**マクスウェルの方程式は最終的に次の 2 式で表わされる**ことになります。

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=-\mu_0 j_\nu \tag{4.1.70}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{4.1.71}$$

(4.1.71) を (4.1.70) に入れると

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu}&=\partial_\mu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu) \\ &=\Box A_\nu-\partial_\nu\partial_\mu A_\mu=-\mu_0 j_\nu \end{aligned} \tag{4.1.72}$$

いま，4 元電流 j_ν が与えられたとすると，この式を解いて A_μ を求め，それを (4.1.71) の右辺に代入すると $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ が j_ν に応じて決まります。

【※補注】: デュアルテンソルを使った導出の仕方について触れておきます(←上の結論からこの導出は特に不要となるのだが... 参考までに)。
$F_{\mu\nu}$ に対してデュアルテンソル $^*F_{\mu\nu}$ を

$$^*F_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho} \tag{4.1.73}$$

と定義します。$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ は先ほどもでてきましたが，レヴィ・チヴィタの完全反対称テンソルといわれ，$\varepsilon_{1234}=1$ としたものです。具体的に書くと

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}=\begin{cases} \;\;1: & \mu,\ \nu,\ \lambda,\ \rho \text{が 1234 の偶置換のとき} \\ -1: & \mu,\ \nu,\ \lambda,\ \rho \text{が 1234 の奇置換のとき} \\ \;\;0: & \text{その他，添字に重複する数字を持つ場合} \end{cases} \tag{4.1.74}$$

$^*F_{\mu\nu}$ の成分は，例えば

$$\begin{aligned} ^*F_{12}&=\frac{i}{2}\varepsilon_{1234}F_{34}+\frac{i}{2}\varepsilon_{1243}F_{43}=\frac{i}{2}\varepsilon_{1234}F_{34}+\frac{i}{2}\varepsilon_{1234}F_{34} \\ &=iF_{34} \end{aligned} \tag{4.1.75}$$

となるので，各成分を書くと次のようになります。

$$\begin{cases} ^*F_{12}=iF_{34} & ^*F_{13}=-iF_{24} & ^*F_{14}=iF_{23} \\ ^*F_{23}=iF_{14} & ^*F_{24}=-iF_{13} & ^*F_{34}=iF_{21} \end{cases} \tag{4.1.76}$$

特に，

$$^*F_{i4}=\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \qquad (\text{添字 } i,j,k \text{はそれぞれ } 1,2,3 \text{ をとります}) \tag{4.1.77}$$

と表わせることに注意してください。(4.1.53) より

$$^*F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & E_3/c & -E_2/c & iB_1 \\ -E_3/c & 0 & E_1/c & iB_2 \\ E_2/c & -E_1/c & 0 & iB_3 \\ -iB_1 & -iB_2 & -iB_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.78}$$

そうすると，(4.1.68) の 2 番目の式はデュアルテンソル $^*F_{\mu\nu}$ を使うと

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \\ \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \end{cases} \iff \partial_\mu^*F_{\mu\nu}=0 \tag{4.1.79}$$

と表すこともできます。それを以下に見ていきます。

$$\begin{cases} \nu=1 & \partial_1^*F_{11}+\partial_2^*F_{21}+\partial_3^*F_{31}+\partial_4^*F_{41}=-(\partial_2E_3-\partial_3E_2)-\partial_tB_1=0 \\ \nu=2 & \partial_1^*F_{12}+\partial_2^*F_{22}+\partial_3^*F_{32}+\partial_4^*F_{42}=-(\partial_3E_1-\partial_1E_3)-\partial_tB_2=0 \\ \nu=3 & \partial_1^*F_{13}+\partial_2^*F_{23}+\partial_3^*F_{33}+\partial_4^*F_{43}=-(\partial_1E_2-\partial_2E_1)-\partial_tB_3=0 \end{cases} \tag{4.1.80}$$

$$\therefore\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.1.81}$$

$\nu=4$ の場合は

$$\partial_1^*F_{14}+\partial_2^*F_{24}+\partial_3^*F_{34}+\partial_4^*F_{44}=-i(\partial_1B_1+\partial_2B_2)-\partial_3B_3=0 \tag{4.1.82}$$

$$\therefore\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4.1.83}$$

なお，${}^{*}F_{\mu\nu}$ と $F_{\mu\nu}$ のスカラー積は

$$K = \frac{1}{4}{}^{*}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} \tag{4.1.84}$$

となり，K **は不変量**となります。

4.1.6　ゲージ変換

A_μ を任意のスカラー関数 Λ で

$$A_\mu \quad \longrightarrow \quad A_\mu + \partial_\mu \Lambda \equiv \widetilde{A}_\mu \tag{4.1.85}$$

のような置き換えをしても電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は不変です。つまり，電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ を決めるのにどんな関数 Λ をとってきてもかまわないことになります。変換 (4.1.85) を**ゲージ変換**といい，この勝手な量 $\Lambda(t,\boldsymbol{x})$ を A_μ の**ゲージ**といいます。また，$F_{\mu\nu}$ は勝手なゲージをとっても変わらないので，**ゲージ不変**であるといいます。

ターゲットとする方程式は

$$\begin{aligned}\partial_\mu F_{\mu\nu} &= \partial_\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\\ &= \Box A_\nu - \partial_\nu\partial_\mu A_\mu = -\mu_0 j_\nu\end{aligned} \tag{4.1.86}$$

$\Lambda(x)$ を 2 階微分可能な全く勝手スカラーな関数として，$A_\mu = \partial_\mu\Lambda(x)$ を (4.1.86) に入れると

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial_\mu\partial_\nu\Lambda(x) - \partial_\nu\partial_\mu\Lambda(x)) = 0 \tag{4.1.87}$$

のように恒等的に 0 となるので，A_μ を解とするなら $A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)$ も解になり，解はユニークに決まりません。そこで，次に述べるように，方程式が簡単になるようなある特別の $\Lambda(x)$ をとって解を求めていくやり方を考えます。このようにしても解は特別の $\Lambda(x)$ にはよらないので問題ないわけですね[2]。

ローレンツゲージとゲージ固定

いま，

$$\Box A_\nu - \partial_\nu\partial_\mu A_\mu = -\mu_0 j_\nu \tag{4.1.88}$$

を解いて，何か 1 つの解 A_ν^{old} が得られたとします。この解に ∂_μ を掛けたら一般には 0 とならず

$$\partial_\mu {A_\mu}^{old}(x) = s(x) \tag{4.1.89}$$

となったとします。このとき，任意にとれる勝手な関数 $\Lambda(x)$ として次の方程式

$$\Box\Lambda(x) = -s(x) \tag{4.1.90}$$

を満たすものをとり，この式を解いて $\Lambda(x)$ が 1 つ見つかったとき，それを使って

$$A_\mu^{new}(x) = A_\nu^{old} + \partial_\mu\Lambda(x) \tag{4.1.91}$$

[2] A_μ の任意性を利用して，目的に応じてクーロンゲージやローレンツゲージを採用して数式を簡単にできたわけですね。「電磁気学再入門を読む」を参照されたし。余談ですが，ローレンツゲージのローレンツはデンマークの数学者 $Ludvig\, Valentin\, Lorenz$ $(January\, 18, 1829 - June 9, 1891)$ です。

を定義すると

$$\partial_\mu {A_\mu}^{new} = \partial_\mu A_\nu^{old} + \Box\Lambda(x) = s(x) - s(x) = 0 \tag{4.1.92}$$

となるので，A_μ^{new} は常に

$$\partial_\mu {A_\mu}^{new} = 0 \tag{4.1.93}$$

を満たしています[3]。したがって，(4.1.88) より A_ν^{new} は

$$\Box A_\nu^{new} = -\mu_0 j_\nu \tag{4.1.94}$$

の解となります。以上のことから，解くべき方程式（連立方程式）は次のように簡単化されます。

$$\begin{cases} \Box A_\nu = -\mu_0 j_\nu \\ \partial_\mu A_\mu = 0 \end{cases} \tag{4.1.95}$$

この A_ν を使って (4.1.71) より $F_{\mu\nu}$ を決めればよいことになります。(4.1.93) を満たすようにゲージ $\Lambda(x)$ を制限することを**ローレンツゲージ**を採用するといい，(4.1.95) のように，マクスウェルの方程式にゲージ条件を付加することを**ゲージを固定**するといいます。

4.2　相対論的荷電粒子の運動

4.2.1　ローレンツ力

粒子の電荷を q，速度を $\boldsymbol{v}$ とすると，電磁場中でこの荷電粒子が受ける力は次式で表わされます。

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{4.2.1}$$

この力をローレンツ力といいます。ローレンツ力を 4 元力ベクトルに書きなおすことにします。4 元速度と 4 元力は (3.2.13) と (3.2.45) で与えられていますが，再掲しておきます。

$$u_\mu = \gamma_p(\boldsymbol{v},\, ic), \quad F_\mu = \gamma_p\left(\boldsymbol{f},\, \frac{i}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}\right) \tag{4.2.2}$$

4 元力の空間成分は

$$\begin{aligned} F_1 &= \gamma_p f_1 = \gamma_p q\{E_1 + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_1\} = q(F_{12}u_2 + F_{13}u_3 + F_{14}u_4) \\ F_2 &= \gamma_p f_2 = \gamma_p q\{E_2 + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_2\} = q(F_{21}u_1 + F_{23}u_3 + F_{24}u_4) \\ F_3 &= \gamma_p f_3 = \gamma_p q\{E_3 + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_3\} = q(F_{31}u_1 + F_{32}u_2 + F_{34}u_4) \\ &\therefore F_i = qF_{ij}u_j \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

次に時間成分は

$$\begin{aligned} F_4 &= \gamma_p\frac{i}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} = \gamma_p\frac{i}{c}q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = q(F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3) \\ &\therefore F_4 = qF_{4j}u_j \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

空間成分と時間成分をまとめると，**ローレンツ力の 4 元力ベクトル**は

$$F_\mu = qF_{\mu\nu}u_\nu \tag{4.2.5}$$

で表わされます。したがって，荷電粒子の相対論的運動方程式は (3.2.46) より

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = qF_{\mu\nu}u_\nu \quad or \quad \frac{dp_i}{dt} = qF_{\mu\nu}u_\nu\frac{d\tau}{dt} = qF_{\mu\nu}v_i \tag{4.2.6}$$

[3] これは電磁気学でお目にかかる $Lorenz\ gauge$: $\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\dot{A}_0 = 0$ ですね。

となります。
一様電場の場合の中における荷電粒子の運動を考えてみます。電場は $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$，磁場は $\boldsymbol{B} = 0$ とし，粒子は $t = 0$ で静止していたとします。この場合，x 軸方向の運動のみが起こるので，(4.2.6) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mv) = m_0\frac{d}{dt}(\gamma_p v) = \frac{1}{\gamma_p}qF_{1\nu}u_\nu = \frac{1}{\gamma_p}q(-iE_1/c)(i\gamma_p c) = qE \\ \therefore\ \frac{d}{dt}(\gamma_p v) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{q}{m_0}E \longrightarrow \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q}{m_0}Et \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

v について整理して

$$v = \frac{dx}{dt} = c\frac{qEt/m_0c}{\sqrt{1+(qEt/m_0c)^2}}, \quad \therefore\ x = \frac{m_0c^2}{qE}(\sqrt{1+(qEt/m_0c)^2}+1) \tag{4.2.8}$$

$qEt/m_0c^2 \ll 1$ の場合，ニュートン力学の結果と一致します。
次に一様な磁場の場合を考えます。$\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とします。この場合，$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ で 4 元力は

$$F_\mu = \gamma_p\big(q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}),\, 0\big) \tag{4.2.9}$$

運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = m_0\frac{d}{dt}(\gamma_p\boldsymbol{v}) = q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{4.2.10}$$

成分に分けて書くと

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{qB}{m_0\gamma_p}v_y = \omega v_y, \qquad \omega = \dfrac{1}{\gamma_p}\dfrac{qB}{m_0} \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{qB}{m_0\gamma_p}v_x = -\omega v_x \\ \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \tag{4.2.11}$$

いま，簡単のため $v_z = 0$ とします。

$$\begin{aligned} v_x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \quad v_y = B\cos\omega t - A\sin\omega t \\ \therefore\ x = (A/\omega)\sin\omega t - (B/\omega)\cos\omega t + x_0, \quad y = (B/\omega)\sin\omega t + (A/\omega)\cos\omega t + y_0 \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{A^2+B^2}{\omega^2} = \frac{v^2}{\omega^2} \tag{4.2.13}$$

これから粒子は x_0, y_0 を中心として半径 $r = v/\omega = \gamma_p(m_0v/qB)$ の円を描きます。ニュートン力学からの結果は，円運動の角振動数

$$\omega_c = \frac{qB}{m_0} \tag{4.2.14}$$

で，粒子の速さには依存しませんでしたが，相対論的効果を取り入れると

$$\omega = \frac{qB}{m_0}\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{4.2.15}$$

となって，粒子の速さに関係してきます。

4.2.2　荷電粒子のラグランジアン

自由粒子の作用は (3.2.61) でみるように

$$I_0 = -m_0 c\int ds = -m_0 c^2\int d\tau \tag{4.2.16}$$

で与えられました。電磁場と荷電粒子が相互作用している場合，I_0 に $e\int A_\mu u_\mu d\tau$ の項が加わり，この系の作用は次式で表わされます。

$$I = -m_0 c^2\int d\tau + e\int A_\mu u_\mu d\tau \tag{4.2.17}$$

相互作用の部分は

$$e\int A_\mu u_\mu d\tau = e\int \gamma_p(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - \phi)d\tau = \int(e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - e\phi)dt \tag{4.2.18}$$

と書けるので，作用は

$$I = \int\left(-\frac{m_0 c^2}{\gamma_p} - e\phi + e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)dt \tag{4.2.19}$$

と表わせます。したがって，**相対論的粒子のラグランジアン**として

$$L = -\frac{m_0 c^2}{\gamma_p} - e\phi + e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} \tag{4.2.20}$$

ととることができます。次に，オイラー・ラグランジュの方程式をたてて運動方程式を求めていくことになります。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \tag{4.2.21}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial v_i} = m_0\gamma_p v_i + eA_i = mv_i + eA_i\\
&\frac{\partial L}{\partial x_i} = -e\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e\frac{\partial}{\partial x_i}(v_j A_j) = -e\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + ev_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = m\frac{dv_i}{dt} + e\frac{dA_i}{dt} = m\frac{dv_i}{dt} + e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)\\
\therefore\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = m\frac{dv_i}{dt} + e\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - e\frac{\partial A_i}{\partial t} + ev_j\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\\
&\qquad = m\frac{dv_i}{dt} - eE_i - ev_j F_{ij}\\
&\qquad = m\frac{dv_i}{dt} - eE_i - e\varepsilon_{ijk}v_j B_k = 0 \qquad (\because F_{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k)
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

したがって，求める運動方程式は

$$m\frac{dv_i}{dt} = eE_i + e\varepsilon_{ijk}v_i B_k \longrightarrow m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{4.2.23}$$

正準運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m_0\gamma_p v_i + eA_i = mv_i + eA_i \longrightarrow \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{A} \tag{4.2.24}$$

これから

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{m_0\gamma_p}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) = \frac{1}{m_0}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{4.2.25}$$

両辺を 2 乗して v^2 を求めると

$$v^2 = \frac{c^2(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{(m_0c)^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}, \quad \therefore\ \frac{1}{\gamma_p} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0c}{\sqrt{(m_0c)^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}} \tag{4.2.26}$$

これを (4.2.25) に入れて

$$v_i = \frac{c(p_i - eA_i)}{\sqrt{(m_0c)^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}} \tag{4.2.27}$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= p_iv_i - L = m_0\gamma_p v^2 + \frac{1}{\gamma_p}m_0c^2 + e\phi \\ &= c\sqrt{(mc)^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2} + e\phi \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

ハミルトニアンを使ってハミルトンの運動方程式から (4.2.23) の導出は各自試みてください。

4.3 電磁場のエネルギーと運動量

4.3.1 電磁場のエネルギー保存則

電荷 e，質量 m をもつ 1 個の荷電粒子と電磁場からなる系を考えます。粒子のエネルギー密度とその流れを

$$\begin{aligned} \mathscr{E}^{(pe)} &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{\xi}}^2\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \\ j_i^{(pe)} &= \frac{1}{2}m\boldsymbol{\xi}^2\dot{\xi}_i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

で定義します。エネルギーに対するバランス方程式は

$$\dot{\mathscr{E}} + \nabla\cdot\boldsymbol{j}^{(pe)} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{4.3.2}$$

となります。一方，電磁場のエネルギー密度は

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{4.3.3}$$

で与えられ，電磁場のエネルギーに対するバランス方程式は

$$\dot{\mathscr{E}} + \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{4.3.4}$$

となります。エネルギーの流れの密度を表わすポインティングベクトル[4]

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{4.3.5}$$

を導入すると，(4.3.6) は

$$\dot{\mathscr{E}} + \nabla\cdot\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{4.3.6}$$

(4.3.2)，(4.3.6) はバランス方程式で，エネルギー保存則を表わしてはいません。そこで，荷電粒子と電磁場のエネルギーバランス方程式を加え合わせると次の連続の式が得られ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathscr{E} + \mathscr{E}^{(pe)}\right) + \nabla\cdot\left\{\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{j}^{(pe)}\right\} = 0 \tag{4.3.7}$$

電磁場と荷電粒子の全体系でエネルギー保存則が成り立つことが分かります。

[4] *John Henry Poynting*：1852.9.9 - 1914.3.30，イギリスの物理学者，ポインティングベクトルを考案。

4.3.2　電磁場のエネルギー運動量テンソル

電磁場のエネルギー保存則 (4.3.7) を相対論的に書き換えたものを紹介します。天下り的ですが，真空中での**電磁場のエネルギー・運動量密度を表わすテンソル**を

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}) \tag{4.3.8}$$

で定義します。このテンソルは**対称テンソル**$(T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu})$ であることは明らかで，さらに

$$T_{\mu\mu} = 0 \tag{4.3.9}$$

で，**対角成分の和は** 0 に等しいという性質を持っています。(4.1.56) より

$$F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = 2(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2/c^2) \tag{4.3.10}$$

また，

$$T_{44} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{4\lambda}F_{\lambda 4} + \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{4.3.11}$$

で，**電磁場のエネルギー密度**

$$\mathscr{E} = T_{44} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{4.3.12}$$

を表わします。T_{i4} は成分は

$$\begin{cases} T_{14} = \dfrac{1}{\mu_0}F_{1\lambda}F_{\lambda 4} = -\dfrac{i}{c}(E_2B_3 - E_3B_2) = -\dfrac{i}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_1 \\ T_{24} = \dfrac{1}{\mu_0}F_{2\lambda}F_{\lambda 4} = -\dfrac{i}{c}(E_3B_1 - E_1B_3) = -\dfrac{i}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_2 \\ T_{34} = \dfrac{1}{\mu_0}F_{3\lambda}F_{\lambda 4} = -\dfrac{i}{c}(E_1B_2 - E_2B_1) = -\dfrac{i}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_3 \end{cases} \tag{4.3.13}$$

となり，T_{i4} **は電磁場のエネルギー密度の流れの** i **成分，すなわちポインティングベクトル**の i 成分を表わします。

$$T_{i4} = \frac{1}{\mu_0}F_{i4}F_{4j} = -\frac{i}{c}\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_i = -\frac{i}{c}\boldsymbol{S}_i \tag{4.3.14}$$

次に，T_{ij} の各成分を計算すると

$$\begin{cases} T_{11} = \dfrac{1}{\mu_0}F_{1\lambda}F_{\lambda 1} + \dfrac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = \varepsilon_0E_1E_1 + \dfrac{1}{\mu_0}B_1B_1 - \left(\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \\ T_{22} = \dfrac{1}{\mu_0}F_{2\lambda}F_{\lambda 2} + \dfrac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = \varepsilon_0E_2E_2 + \dfrac{1}{\mu_0}B_2B_2 - \left(\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \\ T_{33} = \dfrac{1}{\mu_0}F_{3\lambda}F_{\lambda 3} + \dfrac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = \varepsilon_0E_3E_3 + \dfrac{1}{\mu_0}B_3B_3 - \left(\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \\ T_{12} = \dfrac{1}{\mu_0}F_{1\lambda}F_{\lambda 2} = \varepsilon_0E_1E_2 + \dfrac{1}{\mu_0}B_1B_2 \\ T_{13} = \dfrac{1}{\mu_0}F_{1\lambda}F_{\lambda 3} = \varepsilon_0E_1E_3 + \dfrac{1}{\mu_0}B_1B_3 \end{cases} \tag{4.3.15}$$

これをまとめて書くと

$$T_{ij} = \varepsilon_0E_iE_j + \frac{1}{\mu_0}B_iB_i - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \tag{4.3.16}$$

となり，**電磁場の j 方向の運動量密度の流れの i 成分，マクスウェルの応力テンソル**であることが分かります。したがって，テンソル $T_{\mu\nu}$ は次のような構成になっています。

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{ij} & T_{i4} \\ T_{4j} & T_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{ij} & -\frac{i}{c}\boldsymbol{S}_i \\ -\frac{i}{c}\boldsymbol{S}_i & \mathscr{E} \end{pmatrix} \tag{4.3.17}$$

(4.3.8) に ∂_ν を掛け[5]，(4.1.86) の $\partial_\nu F_{\lambda\nu} = \mu_0 j_\lambda$ を使うと

$$\begin{aligned} \partial_\nu T_{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + F_{\mu\lambda}\partial_\nu F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\partial_\nu F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \mu_0 F_{\mu\lambda}j_\lambda + \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}\right) \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

次に括弧内の右辺第 1 項と第 3 項との和は

$$\begin{aligned} \partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} &= \frac{1}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

ここで単に添字を書き換えるだけで生まれる次の関係式を使います。

$$\partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} = \partial_\lambda F_{\nu\mu}F_{\lambda\nu} \qquad (\nu \to \lambda, \lambda \to \nu) \tag{4.3.20}$$

そうすると (4.3.18) の第 2 項と第 3 項は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\partial_\lambda F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} \\ &\frac{1}{2}\partial_\mu F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\lambda\nu}F_{\lambda\nu} \qquad (\sigma \to \nu\text{に書き換えただけ}) \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

となり，(4.3.19) は (4.1.65) を使えば

$$\frac{1}{2}(\partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\lambda\nu})F_{\lambda\nu} = 0 \tag{4.3.22}$$

となるので，結局

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}j_\lambda \tag{4.3.23}$$

を得ます。ここではこれ以上の議論はやめておきますが，$\mu = 4$ と置いたものが系全体のエネルギー保存則を表わし，$\mu = 1, 2, 3$ と置いたものが系全体の運動量保存則を表わします。

//

以上で本レポートを終了します。最後は尻切れトンボのような終わり方となりましたが，少し疲れてきたのでご容赦願いたい。また機会があれば内容の充実を図っていきたいと思います。それでは皆様のご健闘を祈って筆を擱くことにします。

[5] 4 次元的な発散