

一般相対性理論

KEN LOU

2021年6月7日

等価原理のレポートをアップした頃からそろそろ一般相対性理論のレポートに取りかかろうかなという気になってきましたが、ろくにまともな勉強もしてこなかった身には結構ハードな取り組みとなりました。

一般相対論ではテンソルがうんとこさ登場し、テンソル計算は煩雑極まりない。テンソルの上下についた細かい添字の判読にはルーペを覗き込むことしばしばで、自分の計算結果が果たして合っているかどうか教科書とにらみ合ったりしているうちに首や肩が凝ってきたり、頭がボ～としはじめたり。。。とまあ、それなりに苦闘しつつ匍匐前進、ポチポチと取り組みました。しかしまあ、等価原理を出発点として一般相対性理論を独自に構築したアインシュタインはやはり巨人だなあ、という感想をあらためて抱くなど、楽しみながら稿を書き進めていったことも事実です。

本レポートはニュートン力学の簡潔なレビューから特殊相対論（電磁場は除く）の要約を経て一般相対性理論へと向かう道筋をとりました。細かな計算は慎重に進めてほとんど省略することなく書いていますが、間違いやミス等があるかも知れません。見つけられたらお気軽にご一報いただくとありがたい。また、当方の考えにおかしな点があればそれらもご指摘いただくと嬉しい。

一般相対性理論が描く世界について静かに思い馳せるのも一興かと。。。。

それではごゆっくりとお楽しみください。

目次

| | | |
|-------|---------------------------|----|
| 第1章 | ニュートン力学から相対論的力学へ | 5 |
| 1.1 | ニュートン力学 | 5 |
| 1.1.1 | ガリレイの相対性原理 | 5 |
| | (1) ガリレイ変換 | 5 |
| | (2) 速度の合成則 | 6 |
| | (3) ガリレイ変換の幾何学的表示(ガリレイ時空) | 6 |
| 1.1.2 | 加速度座標系と慣性力 | 6 |
| 1.2 | 相対論的力学 | 8 |
| 1.2.1 | アインシュタインの相対性原理 | 8 |
| 1.2.2 | 特殊相対性理論 | 8 |
| | ローレンツ変換 | 8 |
| 1.2.3 | 特殊相対論における時間と空間の性質 | 9 |
| | (1) 同時刻の相対性 | 9 |
| | (2) 動く棒は短く見える(ローレンツ収縮) | 9 |
| | (3) 運動する時計は遅れる | 10 |
| | (4) 速度のローレンツ変換(速度の合成則) | 11 |
| | (5) 加速度のローレンツ変換 | 12 |
| 1.2.4 | 相対論的力学 | 13 |
| | (1) ミンコフスキー時空(4次元時空) | 13 |
| | (2) ローレンツ変換の幾何学的表示 | 14 |
| | (3) スカラーと4元ベクトル | 15 |
| | (4) 固有時間 | 15 |
| | 瞬間静止系 | 16 |
| | (5) 4元速度 | 17 |
| | (6) 4元加速度 | 18 |
| | (7) 瞬間静止系での加速度(固有加速度) | 19 |
| | (8) 4元運動量 | 19 |
| 1.2.5 | 相対論的運動方程式 | 21 |
| 1.2.6 | 相対論的運動方程式からの帰結 | 22 |
| | 加速度と力の方向は一致しない | 22 |
| | 縦質量と横質量 | 22 |
| 第2章 | 一般相対性理論 | 25 |
| 2.1 | ニュートンの重力理論 | 25 |
| 2.2 | 等価原理 | 26 |
| 2.2.1 | エレベーターの思考実験 | 27 |

| | | |
|--------------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.2.2 | 重力と時計の遅れ | 27 |
| | (1) 重力赤方偏移 | 27 |
| | (2) 重力場により時計の進み方が変わる | 29 |
| | (3) 重力場が光を曲げる | 30 |
| 2.2.3 | 重力と曲がった時空 | 31 |
| 2.3 | 曲がった時空の表し方：リーマン空間とリーマン計量 | 32 |
| 2.3.1 | 固有時間と座標時間 | 36 |
| 2.4 | 重力場の中の粒子の運動方程式 | 37 |
| 2.4.1 | 一般座標変換で慣性系から非慣性系へ | 37 |
| 2.4.2 | ニュートン運動方程式との比較 | 38 |
| 2.4.3 | 弱い重力場での運動方程式 | 41 |
| 第 3 章 | リーマン空間におけるテンソル解析 | 43 |
| 3.1 | 斜交座標とテンソル | 43 |
| 3.1.1 | 反変ベクトルと共変ベクトル | 43 |
| 3.1.2 | 計量テンソル | 44 |
| 3.1.3 | 斜交座標の座標変換 | 46 |
| | (1) ベクトルの座標変換 | 46 |
| | (2) テンソルの座標変換 | 47 |
| | (3) 計量テンソルの座標変換 | 48 |
| 3.2 | 一般座標変換 | 49 |
| 3.2.1 | ベクトル場の変換 | 50 |
| 3.2.2 | テンソル場の変換 | 51 |
| 3.3 | リーマン計量 | 51 |
| 3.3.1 | 不変体積要素 | 53 |
| 3.4 | 一般相対性原理とテンソル方程式 | 54 |
| 3.5 | 共変微分 | 55 |
| 3.5.1 | ベクトルの共変微分 | 55 |
| 3.5.2 | テンソルの共変微分 | 60 |
| 3.5.3 | 接続係数 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ とリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ | 61 |
| 3.5.4 | リーマン計量の共変微分 (計量条件) | 63 |
| 3.5.5 | 局所慣性系 | 64 |
| 3.6 | 曲率テンソル | 65 |
| 3.6.1 | リーマンの曲率テンソル | 66 |
| | ビアンキの恒等式 | 68 |
| | リッチテンソルとスカラー曲率 | 71 |
| 第 4 章 | 重力場の方程式 | 73 |
| 4.1 | 測地線方程式 | 73 |
| 4.2 | アインシュタインの重力場の方程式 | 75 |
| 4.2.1 | エネルギー・運動量テンソル | 75 |
| 4.2.2 | アインシュタインの重力定数を求める | 78 |
| 4.3 | シュヴァルツシルドの解 | 80 |

| | | |
|-------|--------------------------------|----|
| 4.3.1 | 静的球対称な時空の計量テンソル | 81 |
| 4.3.2 | クリストッフェル記号の計算 | 83 |
| 4.3.3 | リッチテンソルの計算 | 84 |
| 4.3.4 | シュヴァルツシルドの解を求める | 85 |
| 4.3.5 | ブラックホール | 87 |
| 4.3.6 | 重力赤方偏移 | 89 |
| 4.3.7 | シュヴァルトシルト時空における惑星の運動 | 89 |
| | (1) 円運動 | 91 |
| | (2) 楕円軌道と水星の近日点移動 | 92 |
| 4.3.8 | 光線の湾曲 | 94 |

第1章 ニュートン力学から相対論的力学へ

1.1 ニュートン力学

1.1.1 ガリレイの相対性原理

『すべての物体は外力を受けないかぎり静止したままか、あるいは等速直線運動を続ける』これを慣性の法則と呼んでいます。慣性座標系（慣性系ともいう）とは、慣性の法則（運動の第1法則）が成り立つ座標系です。特殊相対性理論は慣性系間の座標変換（ローレンツ変換）で方程式の形が変わらないことを主張し、一般相対性理論はもっとフレキシブルに加速度座標系など任意の座標系間での方程式の不変性を主張しています。いずれにしても「慣性系」の概念はこれらの理論の根幹をなすものです。

ニュートンの運動方程式「質量×加速度＝力」は慣性系で成立し、次式で表されます。

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1.1.1)$$

m は質点の質量¹、 $\mathbf{x}(t)$ は質点の位置ベクトル、 \mathbf{F} は質点に働く外力です。いま、ある慣性座標系 S があり、それに対して速度 V で動いている慣性座標系 S' を考えた場合、 S 系でのニュートンの運動方程式は S' 系ではどう表されるか。これはガリレイ変換することで求められます。

(1) ガリレイ変換

S 系に対して一定の速度 V で並進運動している慣性座標系を S' とし、時刻 $t=0$ で両座標系の原点は一致していたとします。時刻 t での S' における物体の位置ベクトルを $\mathbf{x}'(t)$ とすると

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{V}t \quad (1.1.2)$$

時間 t で2階微分し両辺に質量 m を掛けると

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \quad (1.1.3)$$

この式の右辺は \mathbf{F} に等しいので

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1.1.4)$$

となり、質点の運動方程式は S' 系においても変わりません。速度 V は任意ですから、慣性系 S が一つ見つければ、それに対する慣性系 S' は無数に存在します。

(1.1.2) は慣性座標系間の座標変換で、これをガリレイ変換といいます。どの慣性でもニュートンの運動方程式の形は変わらず、すべての慣性系は同等で基準となる「絶対静止系」という特別な慣性系は存在しないという主張をガリレイの相対性原理といいます。

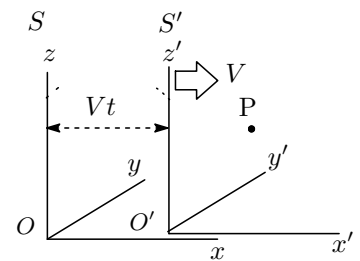


図 1.1: ガリレイ変換

¹ 厳密には慣性質量

(2) 速度の合成則

S, S' 系での質点の速度をそれぞれ v, v' とすると (1.1.2) より

$$\begin{aligned} v' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V = v - V \\ \therefore v &= v' + V \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

これをガリレイ変換による速度の合成則といいます。なお, S, S' 系での質点の加速度をそれぞれ a, a' とすると $a = a'$ となるのが容易にわかります。加速度は慣性系によらず一定の値をとります²。

(3) ガリレイ変換の幾何学的表示 (ガリレイ時空)

ガリレイ変換を幾何学的に見てみます。簡単のため, 1次元の運動を考え, 縦軸を t , 横軸を x とする 2次元時空座標を考えます。 $S(x, t) \rightarrow S'(x', t')$ のガリレイ変換は (1.1.2) より

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ t' &= t \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

初期値として $t=0$ のとき $x=0$ とすれば, S, S' の原点は $x'=x=0, t'=t=0$ で一致します。 $S(x, t)$ の座標系を直交座標系として, $S'(x', t')$ の座標系を設定します。

x' 軸は $t'=0$ を満たす直線で, これは (1.1.6) より x 軸と一致します。次に, t' 軸は $x'=0$ を満たす直線で (1.1.6) の $t'=t=(1/V)x$ の関係より傾きが $1/V$ の直線です。 t と t' 軸のなす角を ϕ とすると V と ϕ の関係は

$$V = \tan \phi \quad (1.1.7)$$

となるので, S, S' 系は図 1.2 となります。この図から

$$\begin{aligned} \tan \phi &= (x_p - x'_p)/t_p \\ \therefore x'_p &= x_p - t_p \tan \phi = x_p - Vt_p \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

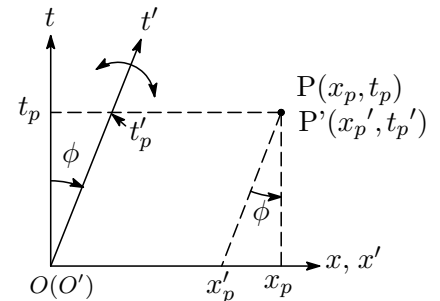


図 1.2: ガリレイ変換と時空座標

が得られ, 確かにガリレイ変換の式が成立しています。(1.1.8) からわかるように, 相対速度 V が大きくなれば t' 軸が大きく傾きます ($V > 0$ で右, $V < 0$ で左に傾く)。なお, 後ほどでてくるローレンツ変換では x' に加え t' も変換されるので, t' 軸の傾きに相反して x' 軸も傾きます。

1.1.2 加速度座標系と慣性力

慣性系に対して加速度運動している座標系を加速度座標系といい非慣性系です。この座標系では加速度運動に伴う見かけの力 (virtual force) が発生し, この座標系特有の力で慣性力 (inertial force) と呼んでいます。例えば回転座標系での遠心力やコリオリの力などです。ニュートンの運動方程式は慣性系でのみ成立し, 加速度系では成立しません。そこで, 加速度系では見かけの力を真の力と組み合わせることでニュートンの運動方程式が成立するようにしています。

具体的に見ていきましょう。加速度 α で右向きに進んでいる電車の床に置かれた質量 m の物体の運動を考えます。床の動摩擦係数を μ とし電車の外に設定された慣性系 S と電車に固定された

² ローレンツ変換では速度の合成則は単純な足し算でなく, 加速度も慣性系によって異なる値をとる。

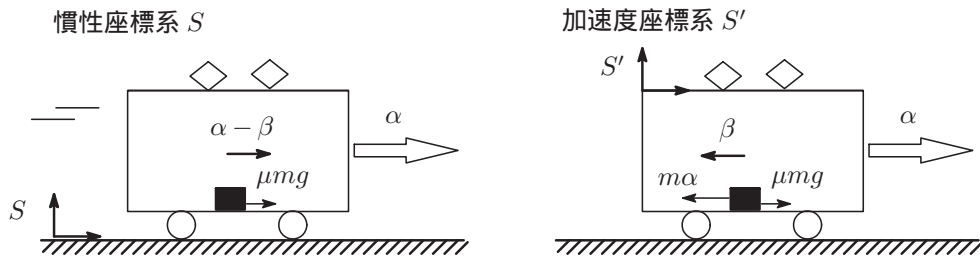


図 1.3: 慣性力

加速度座標系 S' の 2 つの座標系で物体の運動を考えます。 S' 系においては物体には電車の加速度とは逆向きに大きさ $m\alpha$ の慣性力が働くので、電車内の観測者には物体が床の上を電車の進行方向とは逆向きに加速度 β で運動していると見えます。物体と床の間には動摩擦係数 $\mu N = \mu mg$ が働くので運動方程式は次式で表されます。

$$-m\beta = \mu mg - m\alpha \quad \therefore m\beta = m\alpha - \mu mg \quad (1.1.9)$$

一方、 S 系にいる観測者から見れば、物体に働く力は動摩擦係数 μmg だけで（慣性力 $m\alpha$ は存在しない）、物体の加速度は $(\alpha - \beta)$ と観測されるので、運動方程式は

$$m(\alpha - \beta) = \mu mg \quad (1.1.10)$$

と表されます。両者の式 (1.1.9) と (1.1.10) を見比べると数学的には全く同じ式となりますが、その意味するところは全く違うことに注意してください。(1.1.9) の右辺の力の項には「真の力」 μmg と「見かけの力」 $m\alpha$ を組み合わせる力として扱っています。つまり、慣性力 $m\alpha$ はニュートンの運動方程式と同じ式になるように導入された力ということになります。慣性座標系には存在しない力なので“見かけの力”といわれる所以です。

【補足.1】一般的な議論をしておくとして、ある慣性系 S で物理量 A, B, \dots を測定したとき、これらの量と各種の微係数の間の関係式

$$f\left(A, B, \dots; \frac{\partial A}{\partial x_i}, \frac{\partial B}{\partial x_k}, \dots\right) = 0 \quad (1.1.11)$$

で物理法則を表すことができたとします。そうすると、別の慣性系 S' 系において物理量が A', B', \dots と測定され、物理法則は S 系における関数 f を使って

$$f\left(A', B', \dots; \frac{\partial A'}{\partial x'_i}, \frac{\partial B'}{\partial x'_k}, \dots\right) = 0 \quad (1.1.12)$$

と表せる。このことを自然法則は慣性系の選び方によらず不変であるとか、共変的であるといえます。尚、「相対性原理」とは、「ある物理法則がある座標系で成立する場合、別の座標系でも同じ法則が成立する」ということで、特殊相対性理論は力学におけるガリレイの相対性原理を、電磁気学を含むすべての基本的自然法則に拡張したものといえることができます。//

1.2 相対論的力学

1.2.1 アインシュタインの相対性原理

「力学を含むすべての物理法則は、慣性系から別の慣性系への変換に関して方程式の形を変えない」という主張をアインシュタインの相対性原理といいます。また、「どのような慣性系から見ても真空中の光速度は一定である」。この2つの仮定を基本原理としてアインシュタインが特殊相対性理論を構築したことはご存知の通りです。

ガリレイ変換では、時間 t はどの慣性系でも同じ ($t = t'$) という絶対時間を仮定しましたが、特殊相対性理論では様子が一変し、時間は各慣性系ごとに異なった値をとる相対的なもので、時間 t を空間座標 x, y, z と同列に扱い、 (x, y, z, t) を座標点とする4次元座標系を導入しています。

1.2.2 特殊相対性理論

ローレンツ変換

簡単のために、ある慣性系 S に対して相対速度 V で x 軸方向に等速度運動している慣性系を S' を考えます。ガリレイ変換では $S(x, t)$ から $S'(x', t')$ への変換は次の線形変換 (1次変換)

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \quad (1.2.1)$$

で表されましたが、特殊相対性理論 (以下、特殊相対論) では時間と空間を同列に扱うので、空間座標と時間座標を区別することなく、より一般的な線形変換

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta t \\ t' = \gamma x + \delta t \end{cases} \quad (1.2.2)$$

を仮定します。そして真空中の光速度はどの慣性座標系から見ても一定という条件として

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (1.2.3)$$

を導入します³。これから α, β, \dots の各係数を求めると⁴、座標変換式として

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad (1.2.4)$$

を得ます。これを慣性系 $S(x, y, z, t)$ から慣性系 $S'(x', y', z', t')$ への x 方向へのローレンツ変換といいます。(1.2.4) の逆変換は

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad (1.2.5)$$

となり、これは慣性系 S' に対して相対速度 V で $-x$ 軸方向に等速運動している慣性系 S への x 軸の負の方向へのローレンツ変換です。ちなみに、 $V \ll c$ の場合は

$$\begin{cases} x' = x - Vt, & y' = y, & z' = z, & t' = t \\ x = x' + Vt', & y = y', & z = z', & t = t' \end{cases} \quad (1.2.6)$$

とガリレイ変換になります。

³ これを4次元距離のローレンツ不変性といいます。(1.2.4) は(1.2.3)を満たしていることを要確認。

⁴ 導出の詳細は「特殊相対性理論」のレポート参照。

【補足.2】ローレンツ変換を行列形式で書くと → のようになります。 $\mu = 0, 1, 2, 3$ として

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, y' = y, z' = z \end{array} \right] &\rightarrow x^{\mu'} = a^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \\ \left[\begin{array}{l} t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, x = \frac{x' - Vt'}{\sqrt{1 + (V/c)^2}}, y = y', z = z' \end{array} \right] &\rightarrow x^{\mu} = a^{\mu}_{\nu'} x^{\nu'} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

なお，添字の上下の付き方についてはいまは気にしないでください。 //

1.2.3 特殊相対論における時間と空間の性質

(1) 同時刻の相対性

地上に固定された座標系を $S(x, t)$ ，速度 V で x 軸方向に走っている列車に固定された座標系を $S'(x', t')$ とし，時刻 $t = t' = 0$ で両座標系の原点は一致していたとします。いま， S 系の x 軸上の異なる 2 点 x_1, x_2 において同時刻 ($t_1 = t_2 = t$) に起きた事象 (event) を S' 系から観測したとき，この 2 つの事象の位置と時刻はそれぞれ $(x'_1, t'_1), (x'_2, t'_2)$ であったとします。ローレンツ変換 (1.2.4) によれば S' 系から観測した時刻 t'_1, t'_2 は

$$t'_1 = \frac{t - Vx_1/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, t'_2 = \frac{t - Vx_2/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \therefore t'_2 - t'_1 = \frac{V(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \neq 0 \quad (\because x_1 \neq x_2) \quad (1.2.8)$$

となるので， S' 系では同時刻とはなりません ($\because t'_1 \neq t'_2$)。逆も同様で， S' 系の x' 軸上の異なる 2 点 x'_1 と x'_2 で同時に起きた 2 つの事象を S 系から見ると

$$t_2 - t_1 = \frac{V(x'_2 - x'_1)/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \neq 0 \quad (\because x'_1 \neq x'_2) \quad (1.2.9)$$

となり， S 系では同時刻とはなりません。これを同時刻の相対性といいます。

(2) 動く棒は短く見える (ローレンツ収縮)

$S(x, t)$ 系から見て $S'(x', t)$ 系は相対速度 V で x 軸方向に動いていて，出発時点での S, S' 系の原点は一致していたとします。いま， S' 系の x' 軸に沿って静止しているある長さの棒があり， S' 系の観測者は棒の両端の位置を x'_1, x'_2 ($x'_2 > x'_1$) と計測して棒の長さを $\ell_0 = x'_2 - x'_1$ と記録しました。棒に対して静止した観測者が測った長さを固有長さといいます。一方， S 系の観測者は，速さ V で動いている棒の両端の位置を同時刻 ($t = t_1 = t_2$) に測定して x_1, x_2 ($x_2 > x_1$) の値を得，棒の長さは $\ell = x_2 - x_1$ と記録しました⁵。

さて，一体どちらの観測者の記録が正しいのでしょうか？ ローレンツ変換 (1.2.4) により x'_1, x'_2 は $t = t_1 = t_2$ において

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

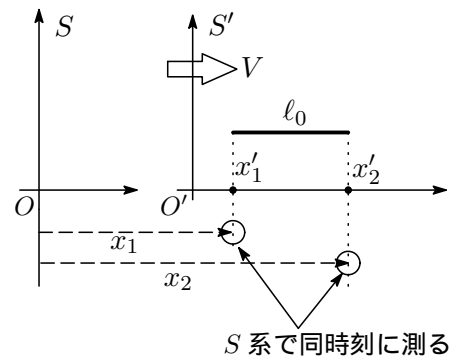


図 1.4: ローレンツ収縮

⁵ 棒は動いているので両端の位置を別々の時刻に測ってその差をとっても棒の長さにはならないことに注意!

これから S' 系の観測者が測った棒の長さ ℓ_0 は

$$\ell_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

一方, ℓ は S 系の観測者が記録した棒の長さなので, 上式から ℓ を求めると

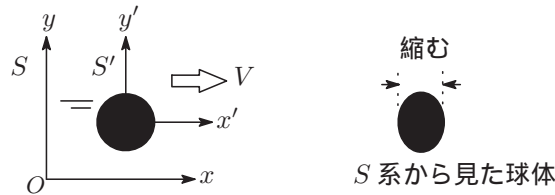
$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - (V/c)^2} < \ell_0 \quad (1.2.10)$$

という結果になります。 S 系の観測者が測った棒の長さ ℓ は固有長さ ℓ_0 より常に $\sqrt{1 - (V/c)^2}$ 倍縮んで見えるということになります。逆も真なりで, 今度は S 系で静止している長さ $\ell_0 = x_2 - x_1$ の棒を S' 系から見た場合の長さ ℓ を求めると $t' = t_1' = t_2'$ として $\ell = x_2' - x_1'$ なので

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad x_2 = \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad \therefore \ell = \ell_0 \sqrt{1 - (V/c)^2} \quad (1.2.11)$$

以上まとめると, 相対運動している相手の系に静止している棒は, こちら側からはつねに収縮して観測されるということです。これをローレンツ収縮と呼んでいます。

(例.1) $2 \times 10^8 \text{m/s}$ の速さで x 軸方向に運動する球体は, 地上で静止している人にはどのような形に見えるでしょうか? 地上に固定された静止座標系を S , 運動する球の中心に固定された座標系を S' とし, 球の半径を a とすると $x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2$ 。 S 系の観測者から見た球の位置



座標を (x, y, z) とすると, (1.2.11) より

$$x = x' \sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad y = y', \quad z = z'$$

これから

$$\frac{x^2}{(a \sqrt{1 - (V/c)^2})^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

これが S 系から見た球体の形で, x 方向に少し圧縮された回転楕円体として見えます。圧縮率は光速を $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$ として

$$\sqrt{1 - (V/c)^2} = \sqrt{1 - (2 \times 10^8 / 3 \times 10^8)^2} = \sqrt{5}/3 \doteq 0.75 \quad //$$

(3) 運動する時計は遅れる

地上に固定された座標系を S , 速度 V で x 軸方向に走っている列車に固定された座標系を S' とします。いま, 列車内の観測者が位置 $x' = 0$ で 2 つの事象を異なる時刻 $t_1', t_2' (t_2' > t_1')$ で観測し, この事象を地上の観測者がそれぞれ時刻 $t_1, t_2 (t_2 > t_1)$ で観測したとします。地上の観測者の時間差 $t_2 - t_1$ は (1.2.5) より

$$t_1 = \frac{t_1' + (V/c^2)x_1'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + (V/c^2)x_2'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

$$\therefore t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + V(x_2' - x_1')/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad (\because x' = 0 \rightarrow x_1' = x_2')$$

となり，地上の観測者から見れば列車内の時計は遅れて見えます。つまり，地上の時計の1秒は列車内の時計では $1 \times \sqrt{1 - (V/c)^2} < 1$ 秒となります。逆も真なりで，地上の観測者が $x = 0$ で2つの事象を時刻 $t_1, t_2 (t_2 > t_1)$ に観測したとし，これを列車内の観測者が時刻 t'_1, t'_2 で観測したとすると (1.2.4) より

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (1.2.12)$$

となって，列車の観測者から見れば地上の時計は遅れて見えます。なお，列車と一緒に動く観測者の時計が示す時間を固有時間（固有時ともいいます）と呼んでいます。なお，固有時間についてはまた後ほど詳しく説明します。微小時間間隔を $\Delta t = t_2 - t_1, \Delta\tau = t'_2 - t'_1$ とすると S, S' 系での時計の刻み幅の関係は，固有時間を使って次のように表されます。

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad \therefore \Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - (V/c)^2} < \Delta t \quad (1.2.13)$$

(例.2) 速さ 1,000km/s のロケットの火星までの到達時間は，ロケット搭乗者の時計で T_0 秒，地上の観測者の時計で T 秒となりました。その時間の差はどれだけか。(1.2.13) より

$$T = T_0 / \sqrt{1 - (V/c)^2} \simeq T_0 (1 + V^2/2c^2), \quad \therefore T - T_0 \simeq T_0 V^2/2c^2 = 0.88 \text{ 秒}$$

(例.3) 4次元の微小体積要素 $dx dy dz dt$ はローレンツ変換に対して不変。

$$dx = dx' \sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = dt' / \sqrt{1 - (V/c)^2}$$

$$\therefore dx dy dz dt = dx' dy' dz' dt'$$

(4) 速度のローレンツ変換（速度の合成則）

平面運動している粒子の速度が S 系では $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ， S' 系では $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ と観測されました。ガリレイ変換の速度合成則では S 系から見た粒子の速度は

$$u_x = u'_x + V, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z \quad (1.2.14)$$

と表なり， x 軸方向の速度が加算されるだけです。しかし，粒子が光速に近い速さで運動している場合にはローレンツ変換となるので様相は一変し，速度の x, y 成分も変化します。

S 系から見た粒子の速度は $\mathbf{u} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ なので位置座標 (x, y, z) をローレンツ変換して \mathbf{u} と \mathbf{u}' の関係を見ると

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dt'}{dt} \frac{dx}{dt'} = \frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt'} \left(\frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) = \frac{dt'}{dt} \frac{u'_x + V}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dt'}{dt} \frac{dy}{dt'} = \frac{dt'}{dt} \frac{dy'}{dt'} = \frac{dt'}{dt} u'_y$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dt'}{dt} \frac{dz'}{dt'} = \frac{dt'}{dt} u'_z$$

となります。また，

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) = \frac{1 + u'_x V/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

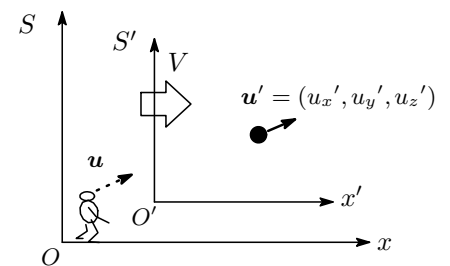


図 1.5: 速度の加法則

なので、これを上式に入れて整理すると

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1 + u_x'V/c^2}, \quad u_y = \frac{u_y' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + u_x'V/c^2}, \quad u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + u_x'V/c^2} \quad (1.2.15)$$

が得られます。 $u_y \neq u_y', u_z \neq u_z'$ となることに注目してください。これを相対論的な速度の合成則とか速度の加法則と呼んでいます。仮に、 S' 系で粒子が x 軸方向に光速 c で運動していたとしても、 S 系からは光速を超えた速さは観測されないことが確認できます。光速はいかなる慣性系でも一定 ということも裏付けていますね。なお、 $V \ll c$ の場合には $u_x = u_x' + V, u_y = u_y', u_z = u_z'$ となり、ガリレイ変換の速度合成則と一致します。

(5) 加速度のローレンツ変換

S 系から見た粒子の加速度を $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ とすると、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$ として

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{d}{du_x'} \left(\frac{u_x' + V}{1 + u_x'V/c^2} \right) \frac{du_x' dt'}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - (V/c)^2}{(1 + u_x'V/c^2)^2} \frac{du_x' dt'}{dt'} \frac{dt'}{dt} \\ &= \frac{1}{\gamma^3 (1 + u_x'V/c^2)^3} a_x' \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{1}{\gamma^3} \left\{ \frac{1}{(1 + u_x'V/c^2)^2} a_y' - \frac{u_y' V}{c^2 (1 + u_x'V/c^2)^3} a_x' \right\} \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{1}{\gamma^3} \left\{ \frac{1}{(1 + u_x'V/c^2)^2} a_z' - \frac{u_z' V}{c^2 (1 + u_x'V/c^2)^3} a_x' \right\} \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

記号 γ をローレンツ因子と呼んでいます。 $V \ll c$ では $a_x = a_x', a_y = a_y', a_z = a_z'$ となり、ガリレイ変換の結果と一致します。しかし、粒子の速度が光速に近くなると事情は一変し、加速度は慣性系によって異なる値をとります。いいかえると「等加速度運動」というのは存在しないのか？このあたりのお話は「相対論的力学」の項で説明することにして、先に進むことにします。

《ローレンツ変換の要約》

ローレンツ変換は光速度一定の原理を満たす一次変換で、慣性座標系同士の変換である。

$$x \text{ 方向のローレンツ変換 } \begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, & x = \frac{x' + Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \\ t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, & t = \frac{t + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \end{cases} \quad (1.2.17)$$

・時間の相対性

- (1) 同時性：ある慣性系で異なる2点で同時刻に起こった2つの事象は、別の慣性系では同時刻の事象として観測されない。同時性は慣性系によって異なる。
- (2) 時間間隔：速度 V で運動する時計の経過時間を T_0 (固有時間) とし、それに対して静止した観測者が測った経過時間を T とすると、 $T_0 = T\sqrt{1 - \beta^2} < T$ となり、運動する時計は遅れる。

・ローレンツ収縮

棒の長さ方向に速度 V で動いている長さ l_0 (固有長さ) の棒は、静止した観測者から見れば $l = l_0 \sqrt{1 - (V/c)^2} < l_0$ と縮んで見える。

・速度の変換 (合成則)

S' 系で速度が u' と観測される運動を S 系で観測したときの速度を u とすると

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1 + u_x'V/c^2}, \quad u_y = \frac{u_y' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + u_x'V/c^2}, \quad u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + u_x'V/c^2}$$

・ 加速度の変換

S' 系で x' 方向に加速度 a_x' と観測される運動の S 系での加速度を a_x とすると

$$a_x = \frac{a_x'}{\gamma(1 + u_x'V/c^2)^3}, \text{ etc. } \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$$

1.2.4 相対論的力学

(1) ミンコフスキー時空 (4次元時空)

空間座標を x_1, x_2, x_3 , 虚数の時間座標を $x_4 = ix_0 = ict$ とする 4次元時空間を 4次元時空とかミンコフスキー時空といいます。事象はそれが起こった「場所」と「時間」で指定されるので、ミンコフスキー時空の点 (x_1, x_2, x_3, x_4) が一つの事象を表しこの点を世界点, 2つの世界点の間隔を世界間隔といいます。粒子の運動はミンコフスキー時空内の軌跡で表され, この軌跡を世界線といいます。

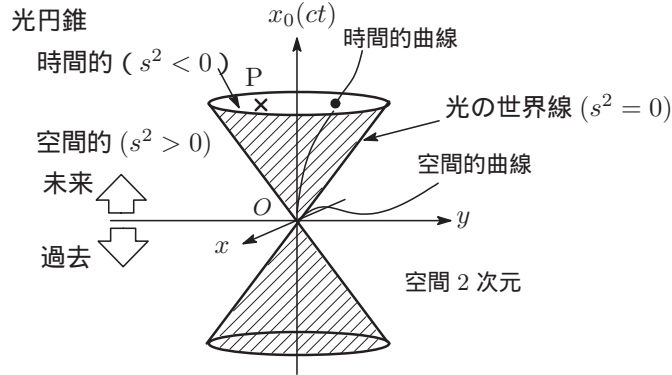


図 1.6: 光円錐 (Light cone)

世界線上の 2つの世界点を $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Q(x_1', x_2', x_3', x_4')$, その世界間隔を s とするとその 2乗は

$$\begin{aligned} s^2 &= (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2 + (x_4' - x_4)^2 \\ &= (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2 - (x_0' - x_0)^2 \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

で与えられ, 世界線の線素を ds とすると, その 2乗は

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 \quad (1.2.19)$$

と表せます。慣性系 S でのミンコフスキー時空を考え, 原点 O からの距離⁶を s とすると

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 \quad (1.2.20)$$

同様に, 別の慣性系 S' では

$$s'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_0'^2 \quad (1.2.21)$$

が成立します。この 2つは実は等しい, s^2 は ローレンツ変換に際して不変量 であることを以下

⁶ ユーグリッド的な意味での距離ではない。

に示します。 $S \rightarrow S'$ へのローレンツ変換は (1.2.5) より

$$x_1 = \gamma(x_1' + \beta ct'), \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x_1'\right) \quad (\text{ただし } \beta = V/c)$$

これを (1.2.20) に入れると

$$\begin{aligned} s^2 &= \gamma(x_1' + \beta ct')^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \{ic\gamma(t' + \beta/c)x_1'\}^2 \\ &= x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_0'^2 = s'^2 \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

このように、ローレンツ変換はミンコフスキー時空の原点から任意の点までの距離の 2 乗を不変に保つ変換ですので、ノルムを一定に保つ 3 次元空間の座標回転に対応させて考えることができます (このあたりの詳しい話は「特殊相対性理論」のレポート参照)。

さて、 s^2 は (1.2.20) からわかるように正、負、ゼロの値を取ります。 $s^2 = 0$ の場合、

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$$

を満たす点の集りは、原点から発した光の世界線を母線にもつ錐面上にあり、この円錐を光円錐といいます (図 1.6 は空間を 2 次元とした描いたもの)。 $s^2 < 0$ を満たす世界点 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は光円錐の内部にあり、時間的領域にあるといいます。 $s^2 > 0$ を満たす世界点は光円錐の外部にあり、空間的領域にあるといいます。

s^2 はローレンツ変換不変な量なので、どんな慣性系から見ても時間的領域内の点は常に時間的領域内にあり、空間的領域内の点は常に空間的領域内にあるので、ローレンツ変換でこの両者が混じり合うことは決してありません。各領域の特徴として次のことがあげられます。

- ・時間的領域 ($s^2 < 0$) : 事象 P が影響を与えうる事象の集合で、その間に因果関係が成り立つ。
- ・空間的領域 ($s^2 > 0$) : 事象 P と因果関係を持ち得ない事象の集合で、何が起こっても関係せず。

(2) ローレンツ変換の幾何学的表示

簡単のために縦軸に時間軸 x_0 、横軸に x 軸をとった 2 次元ミンコフスキー時空を考えます。ローレンツ変換は次式で与えられます。

$$x_0' = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.2.23)$$

さて、 x_0' 軸は $x' = 0$ を満たす直線、 x' 軸は $x_0' = 0$ を満たす直線なので、(1.2.23) より各軸は

$$x_0' \text{ 軸} : x = \beta x_0, \quad x' \text{ 軸} : x_0 = \beta x$$

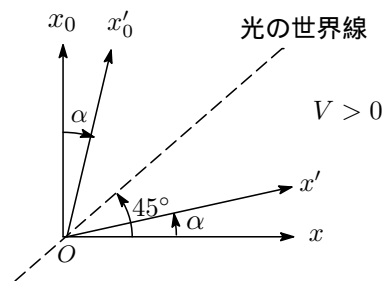


図 1.7: ローレンツ変換の幾何学的表示

で表される直線で、軸の傾斜角を α とすると、これは $\beta (= V/c)$ と関連していて

$$\alpha = \tan^{-1} \beta, \quad \cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \beta^2}, \quad \sin \alpha = \beta/\sqrt{1 + \beta^2} \quad (1.2.24)$$

となります (図 1.7 参照)。 $\beta \rightarrow 1$ に近づくほど角 α は大きくなり (扇が閉じる感じ)、 $\beta = 1$ で光の世界線になります。慣性系 S (直角座標にとる) からみた慣性系 S' は斜交座標となり、逆も真で、 S' 系 (直角座標にとる) から S 系を見れば S 系が斜交座標となります⁷。ガリレイ変換では時間軸だけが傾きましたが、ローレンツ変換では x_0 と x が対称 (同格) なので、 x_0 軸と x

⁷ $-V$ となるので軸は外側に開く。

軸の両方が傾きます。時間の相対性やローレンツ収縮などは、この幾何学的表示から容易に分かりますが、その話はここでは省略します。

(3) スカラーと4元ベクトル

4元空間におけるスカラーとベクトルを定義します⁸。ローレンツ変換で $\phi' = \phi$ と変換される量 ϕ をスカラーといい、ローレンツ変換不変量です。一方、

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (1.2.25)$$

と変換される量を4元ベクトルといい、係数 $a_{\nu\lambda}$ は次の直交条件を満たします。

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \begin{cases} \nu = \lambda : 1 \\ \nu \neq \lambda : 0 \end{cases} \quad (1.2.26)$$

2つの4元ベクトル A_μ, B_μ のスカラー積(内積)は3次元ベクトルの場合と同様に各成分の積の和として定義されます。4元ベクトルの第4成分は虚数なので実の量 A_0 を用いて $A_4 = iA_0$ などとしておくと、スカラー積は

$$A_\mu B_\mu = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 \equiv A_j B_j - A_0 B_0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.2.27)$$

と表せます⁹。4元ベクトルのスカラー積は

$$A'_\mu B'_\mu = a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} A_\nu B_\lambda = \delta_{\nu\lambda} A_\nu B_\lambda = A_\nu B_\nu \quad (1.2.28)$$

となり、ローレンツ変換に対して不変量です。4元ベクトルのスカラー積は(1.2.27)からわかるように正、負、0となる3つの場合があり、ベクトル A_μ はそれらに応じて次のように分類されます。

$$A_\mu \longrightarrow \begin{cases} A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 > 0 : \text{ベクトル } A_\mu \text{ は空間的} \\ A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 < 0 : \text{ベクトル } A_\mu \text{ は時間的} \\ A_\mu A_\mu = A_1^2 - A_0^2 = 0 : \text{ベクトル } A_\mu \text{ は光的} \end{cases} \quad (1.2.29)$$

(4) 固有時間

ニュートン力学ではすべての慣性系に共通する時間として「絶対時間」が仮定され、粒子の位置や速度は絶対時間の関数として表わしました。一方、相対論では既に見てきたように時間は慣性系ごとに異なる値をとるため、絶対時間の仮定は成立しません。それに変わるものとして登場するのがローレンツ変換不変な固有時間です。固有時間は運動する粒子に貼り付いた時計が示す時間で、通常 τ の記号が使われます。粒子の運動は τ をパラメータとして

$$x_1 = x_1(\tau), x_2 = x_2(\tau), x_3 = x_3(\tau), x_4 = x_4(\tau) \quad (1.2.30)$$

と表され、ミンコフスキー時空の時間的領域内の世界線として記述できます。一般に粒子は等速運動とは限らないので図 1.6 に示すように世界線は曲線となります。それでは次に固有時間の定義を与えておきます。

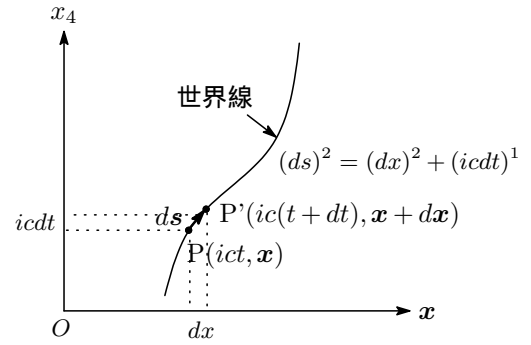
⁸ この章では共変形式について触れないので反変・共変という区別はせずに添え字はすべて下付き添字で統一しておきます。あえていうならここで登場するベクトルは反変ベクトルで添え字は上付きで区別されます。なお、反変・共変に関するお話は一般相対論のところで詳しくやります。

⁹ アインシュタイン規約：同じ項において添え字が二度現れる場合には、その添字について和をとる

固有時間の定義

ある慣性系 S に対して速度 $v(t)$ (等速とは限らない) で運動している粒子があり, 世界線上の近接した2点 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ をとります。 $dx_i = x_i' - x_i$ とすれば線素の2乗は

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\ &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2 \\ &= dt^2 \left(\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dt^2} - c^2 \right) \\ &= dt^2 (v^2(t) - c^2), \quad (v \equiv \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}/dt) \end{aligned}$$



となるので, これから

$$\begin{aligned} ds &= icdt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} = icdt \sqrt{1 - \beta^2} = ic \frac{dt}{\gamma_p} \quad (1.2.31) \\ (\beta &= v(t)/c, \quad \gamma_p = 1/\sqrt{1 - \beta^2}) \end{aligned}$$

が得られます。なお, この式の $\beta (= v/c)$ とローレンツ変換の $\beta = V/c$ と混同しないように。 V は慣性系間の相対速度, $v(t)$ はある一つの慣性系から見た粒子の速度で基本的に異なります。

さて, 粒子と一緒に走っている慣性系 S' を考えると, S' 系では粒子は静止しており, ds はローレンツ不変量ですから

$$ds = ds' = icdt' \quad (1.2.32)$$

dt' を $d\tau$ と改め, 固有時間を

$$d\tau = \frac{ds}{ic} \left(= \frac{dt}{\gamma_p} \right) \quad (1.2.33)$$

で定義します。また, 固有時間を $icd\tau$ と定義することもあり, その場合は線素の長さ ds が固有時間となります。いずれにしても, これから後ほど活用する次の関係式が得られます。

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma_p, \quad \left(\because \frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = \gamma_p \frac{d}{dt} \right) \quad (1.2.34)$$

固有時間に対して, 時間座標軸によって特定される時間は座標時間と呼ばれます。

瞬間静止系

粒子が加速度運動している場合を考えます。加速度運動している粒子に貼り付いた座標系は非慣性系です。時刻 t での粒子の速度は $v(t)$, 次の瞬間の $t + \Delta t$ で $v + \Delta v$ となりますが, Δt の間の速度は一定なので, その瞬間は慣性系 S' を設定でき, これを瞬間静止系といいます。加速度運動する粒子は無限小時間 Δt で次々と別の慣性系 (瞬間静止系) S'', S''', \dots に乗り換えていくと考えると固有時間は

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_p} = \frac{dt'}{\gamma_p'} = \frac{dt''}{\gamma_p''} = \dots \quad (1.2.35)$$

と表せます。有限な時間間隔 τ は $t = 0$ で S と S' 系の原点が一致したとすると, 上式を積分して

$$\tau(t) = \int_0^t d\tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma_p} = \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad (1.2.36)$$

と得られます。

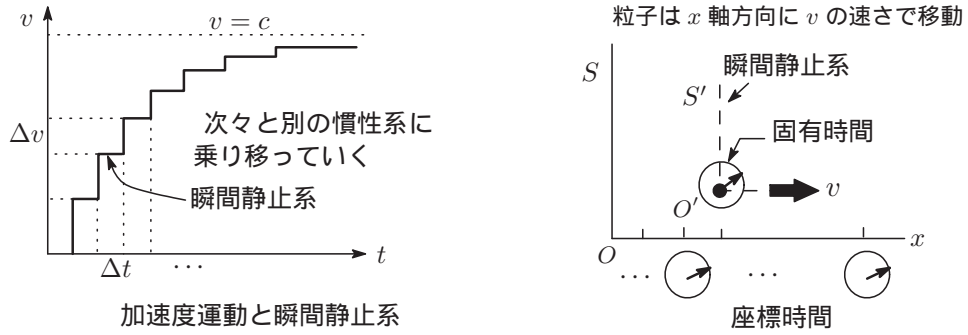


図 1.8: 瞬間静止系と固有時間

(例.4) μ 粒子の寿命

π 中間子や K 中間子が崩壊して生成される 2 次宇宙線 μ 粒子は遥か上空約 6km の高さから光速に近い速度 ($V = 0.999c: c = 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$) で地上に降り注いでいます。ところで μ 粒子の静止寿命は 2.2×10^{-6} 秒と非常に短寿命で、この寿命では $Vt = 659\text{m}$ 程度走行した後に崩壊し地上には届かない? 筈ですが現実には降り注いでいる。これはまさに相対論的效果なのです!

μ 粒子の固有時間は、 μ 粒子と一緒に動く系での時間 (粒子の静止系での時間: (1.2.36) で $v = 0$ とすれば $\Delta\tau = \Delta t$ なので、静止状態での寿命が固有時間となる) $\Delta\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ 秒。一方、速度 v で地上に降り注ぐ μ 粒子の寿命は地上の座標系 (S 系) から観測すればその $\gamma_p (> 1)$ 倍伸びるので $\Delta t = \gamma_p \Delta\tau = \Delta\tau / \sqrt{1 - (v/c)^2} = 4.92 \times 10^{-5}$ 秒となります。したがって、粒子の走行距離は $0.999c \times 4.92 \times 10^{-5} \doteq 14.7\text{km}$ となって崩壊せずに地上に届くこととなります。 //

(5) 4 元速度

4 元速度は (1.2.30) を固有時間で微分した次式で定義されます。

$$u_\mu(\tau) = \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (1.2.37)$$

$\mu = 1, 2, 3$ を空間成分, $\mu = 4$ を時間成分といいます。

ニュートン力学での速度 $\mathbf{v} = (dx_1/dt, dx_2/dt, dx_3/dt)$ との関係は次の通りです。

$$\begin{aligned} \text{空間成分: } u_k(\tau) &= \frac{dx_k(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_k(\tau(t))}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{v_k(t)}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2}} = \gamma_p v_k(t) \\ \text{時間成分: } u_4(\tau) &= \frac{dx_4(\tau)}{d\tau} = ic \frac{dt}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2}} = i\gamma_p c \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

4 元速度を 4 元ベクトル表記すれば

$$u_\mu = \gamma_p(v_1, v_2, v_3, ic) = \gamma_p(\mathbf{v}, ic) \quad (1.2.39)$$

そのスカラー積は

$$\sum_{\mu=1}^4 u_\mu^2 = \gamma_p^2(\mathbf{v}^2 - c^2) = \frac{\mathbf{v}^2 - c^2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}^2} = -c^2, \quad |u_\mu| = c \quad (1.2.40)$$

となるので, (1.2.29) より 4 元速度ベクトルは時間的となります。

4 元速度ベクトルの空間成分は普通速度ベクトルに当たるもので, $\mathbf{v}(t)/c \ll 1$ の場合にはニュートン力学の速度 v_k と一致します。一方, 時間成分の方は単位固有時間あたりの座標時間

の変化を示して“運動する時計は遅れる” ($\Delta\tau = \Delta t/\gamma_p, \gamma_p > 1$) ことを表します。4元速度の大きさは常に一定の光速となります。そのからくりは。。4元速度の2乗は (1.2.40) からわかるように

$$(4 \text{元速度})^2 = (\text{空間成分の速度})^2 - (\text{時間成分の速度})^2 = -(\text{光速})^2$$

と書けますね。4元速度の空間成分は運動によっていろいろな値をとりますが、その速度が速くなれば、それに応じて時間成分の速度も速くなり（時計の遅れが増大）、その結果互いに相殺して一定の値をとるといことです。

【補足.3】4元速度ベクトルのローレンツ変換

$$u'_\mu = a_{\mu\nu} u_\nu \quad \left\{ \begin{array}{l} u'_1 = \frac{dx'_1(\tau)}{d\tau} = \gamma(u_1 + i\beta u_4) \\ u'_2 = \frac{dx'_2(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_2}{d\tau} = u_2 \\ u'_3 = \frac{dx'_3(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_3}{d\tau} = u_3 \\ u'_4 = \frac{dx'_4(\tau)}{d\tau} = \gamma(u_4 - i\beta u_1) \end{array} \right. \quad (1.2.41)$$

(6) 4元加速度

4元加速度は4元速度を固有時間で微分した量として定義されます。

$$a_\mu = \frac{du_\mu(\tau)}{d\tau} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (1.2.42)$$

速度の空間成分を固有時間で微分したものは

$$\frac{du_k(\tau)}{d\tau} = \frac{du_k(\tau)}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_k(t)}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2}} \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

となるので、 $v(t)/c \ll 1$ の場合にはニュートン力学の加速度と一致します。

4元速度と4元加速度は常に直交する

ニュートン力学では等速円運動など一部のケースを除き速度と加速度は直交しませんが、特殊相対論では事情が異なります。

$$\begin{aligned} u_\mu &= \gamma_p(\mathbf{v}, ic) \\ a_\mu &= \left\{ \frac{d}{d\tau}(\gamma_p \mathbf{v}), \frac{d}{d\tau}(i\gamma_p c) \right\} = \left\{ \frac{d}{dt}(\gamma_p \mathbf{v}) \frac{dt}{d\tau}, \frac{d}{dt}(i\gamma_p c) \frac{dt}{d\tau} \right\} \\ &= \left\{ \gamma_p \left(\frac{d\gamma_p}{dt} \mathbf{v} + \gamma_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right), i\gamma_p c \frac{d\gamma_p}{dt} \right\} \end{aligned}$$

この2つの4元ベクトルのスカラー積は

$$\begin{aligned} u_\mu \cdot a_\mu &= \gamma_p^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \frac{d\gamma_p}{dt} + \gamma_p^3 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \gamma_p^2 c^2 \frac{d\gamma_p}{dt} = \gamma_p^3 v \frac{dv}{dt} - \gamma_p^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{d\gamma_p}{dt} \\ &= \gamma_p^3 v \frac{dv}{dt} - c^2 \frac{d\gamma_p}{dt} \end{aligned}$$

一方,

$$\frac{d\gamma_p}{dt} = \frac{d\gamma_p}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dv} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{dv}{dt} = \gamma_p^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt}$$

となり, 上式に入れて

$$u_\mu \cdot a_\mu = 0 \quad (1.2.43)$$

(例.5) 等速円運動 $x = r \cos \omega t, y = r \sin \omega t, z = 0$ に対する 4 元速度, 4 元加速度を求めます。3 次元速度 v と γ_p は

$$v = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t, 0), \quad \gamma_p = 1/\sqrt{1-(v/c)^2} = 1/\sqrt{1-(r\omega/c)^2} = \text{一定}$$

となるので, 4 元速度と 4 元加速度は

$$\begin{aligned} u_\mu &= \gamma_p(-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t, 0, ic) \\ a_\mu &= \left(\gamma_p^2 \frac{dv}{dt}, 0 \right) = -r(\gamma_p \omega)^2 (\cos \omega t, \sin \omega t, 0, 0), \quad \therefore u_\mu \cdot a_\mu = 0 \end{aligned}$$

(7) 瞬間静止系での加速度 (固有加速度)

簡単のため, x 軸方向に相対速度 V で運動する慣性系 S, S' を考えます。それぞれの系から観測した粒子の速度, 加速度の x 成分, x' 成分をそれぞれ u, u', a, a' とすると

$$u = \frac{u' + V}{1 + u'V/c^2}, \quad a = \frac{du}{dt}, \quad a' = \frac{a'}{\{\gamma(1 + u'V/c^2)\}^3} \quad (\gamma = 1/\sqrt{1-(V/c)^2}) \quad (1.2.44)$$

瞬間静止系での加速度 a_0 とすると, $u' = 0, V = v$ としたとき $a' \rightarrow a_0$ となるので (1.2.44) より $\gamma \rightarrow \gamma_p$ として

$$a_0 = a\gamma_p^3, \quad \gamma_p = 1/\sqrt{1-(u/c)^2} \quad (1.2.45)$$

が得られ, この式は瞬間静止系での加速度 a_0 と慣性系 S での加速度 a との関係式です。これは任意の慣性系に対して成り立ち, 慣性系 S' での加速度を a' , 速度を u' , $\gamma_p' = 1/\sqrt{1-(u_x'/c)^2}$ とし, 慣性系 S'' での加速度を a'' , 速度を u'' , $\gamma_p'' = 1/\sqrt{1-(u_x''/c)^2}$, 等々としていくと

$$a_0 = a\gamma_p^3 = a'\gamma_p'^3 = a''\gamma_p''^3 = \dots \quad (1.2.46)$$

が成り立ち, 瞬間静止系を次々と飛び移っていても a_0 は一定。相対論的等加速度運動は a_0 が一定の運動のことをいいます。 a_0 はその粒子固有の加速度という意味で固有加速度と呼ばれます。

(8) 4 元運動量

粒子に固定された座標系で測定した粒子の質量を静止質量いいます。粒子固有の定数で m_0 と表し, 4 元運動量は m_0 を用いて

$$p_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau} = m_0 u_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (1.2.47)$$

と定義します。空間成分と時間成分は以下の通りとなります ($k = 1, 2, 3$)

$$p_\mu = \gamma_p(m_0 v, im_0 c) \left\{ \begin{array}{l} \text{空間成分: } p_k(\tau) = \frac{m_0 v_k(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}} = \gamma_p m_0 v_k(t) \\ \text{時間成分: } p_4(\tau) = \frac{im_0 c}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}} = i\gamma_p m_0 c \end{array} \right. \quad (1.2.48)$$

$v \ll c$ の場合，4 元運動量の空間成分はニュートン力学の運動量 p と一致します。時間成分は何を意味しているのか。。。？ 4 元速度ベクトルと 4 元加速度ベクトルのスカラー積 (1.2.43) の両辺に m_0 を掛けると

$$m_0 u_\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = u_\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{dx_k}{d\tau} \frac{dp_k}{d\tau} + \frac{dx_4}{d\tau} \frac{dp_4}{d\tau} = \gamma_p^2 \left(\frac{dx_k}{dt} \frac{dp_k}{dt} + ic \frac{dp_4}{dt} \right) = 0 \quad (1.2.49)$$

空間成分の時間的变化 dp_k/dt はニュートン力学での粒子に働く力を表すことを考慮すると，上式第 1 項の $(dx_k/dt)(dp_k/dt)$ は力が粒子に対して単位時間になす仕事，すなわち粒子の単位時間あたりのエネルギー増分を表すと考えられます。そこで粒子のエネルギーを E とすれば

$$\frac{dx_k}{dt} \frac{dp_k}{dt} = \frac{dE}{dt} \longleftrightarrow \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dE}{dt} \quad (1.2.50)$$

と書けるので，(1.2.49) に入れて積分すると

$$\frac{dE}{dt} = -ic \frac{dp_4}{dt} \longrightarrow iE/c = p_4 \quad (1.2.51)$$

となって，4 元運動量の時間成分は粒子のエネルギーに関する量であることが分かります。

(1.2.48) をにらみながらニュートンの運動量と形式的に同じ形となるように

$$m(v) = \gamma_p m_0 \quad (1.2.52)$$

とおくと，4 元運動量は

$$\text{空間成分} : p_k = m(v)v_k \quad (k = 1, 2, 3) \longleftrightarrow \mathbf{p} = \gamma_p m_0 \mathbf{v} \quad (1.2.53)$$

$$\text{時間成分} : p_4 = im(v)c$$

と表わせます。ここに登場した $m(v)$ を相対論的質量¹⁰と呼んでいます。(1.2.51) より 4 元運動量の時間成分からはエネルギーと質量を結びつける有名な関係式

$$E = m(v)c^2 \quad (1.2.54)$$

がでてきます。4 元ベクトル p_μ のスカラー積は (1.2.39) より

$$p_\mu p_\mu = m_0^2 u_\mu u_\mu = p^2 - E^2/c^2 = -m_0^2 c^2$$

これから E を求めると

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad (1.2.55)$$

$p^2 \ll m_0^2 c^2$ の場合には右辺をテイラー展開して第 2 項まで求めると

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right)^{1/2} \doteq m_0 c^2 + \frac{1}{2m} p^2 \quad (1.2.56)$$

右辺第 1 項は静止粒子のエネルギー，第 2 項はニュートン力学の運動エネルギーを表しています。特殊相対論では自由運動している粒子のエネルギーは運動エネルギーに加え静止エネルギーをも含んでいるわけです。ニュートン力学ではエネルギーの測定基準を，静止粒子のエネルギーは 0 としていたこととなります。

¹⁰ 相対論的質量は v が関係しているので運動する粒子の質量は増大する？と誤解しないこと。「質量」はあくまで定数で増大することはありません。 γ_p の処理の問題です。

1.2.5 相対論的運動方程式

4元力を定義して、相対論的運動方程式を考えていきます。4元力はニュートンの運動方程式 $F = dp/dt$ を4元ベクトルに拡張して

$$f_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = m_0 \frac{du_\mu}{d\tau} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (1.2.57)$$

と定義します。この運動方程式はローレンツ変換に対して不変（補注参照）で、どんな慣性系においても成り立つ特殊相対論的運動方程式です。

運動方程式の空間成分と時間成分は

$$\begin{cases} \text{空間成分} : f_k = \frac{dp_k}{d\tau} \quad (k = 1, 2, 3) \\ \text{時間成分} : f_4 = \frac{dp_4}{d\tau} = \frac{iE}{c} \end{cases} \quad (1.2.58)$$

と表されます。空間成分は

$$f_k = \frac{dp_k}{d\tau} = \frac{dp_k}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_p \frac{dp_k}{dt} \quad (\because dt/d\tau = \gamma_p) \quad (1.2.59)$$

より

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{f_k}{\gamma_p} \quad (1.2.60)$$

となり、ニュートンの運動方程式 $F = dp/dt$ との関係から

$$f_k = \gamma_p F_k \longleftrightarrow \mathbf{f} = \gamma_p \mathbf{F} \quad (1.2.61)$$

の関係式が成り立ちます。 $v \ll c$ のとき、 $\gamma_p \rightarrow 1$ となるので相対論的力の空間成分はニュートン力学の力と一致します。一方、時間成分の方は

$$f_4 = \frac{dp_4}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(i\gamma_p m_0 c) = \gamma_p \frac{d}{dt}(i\gamma_p m_0 c) = i\gamma_p m_0 c \frac{d\gamma_p}{dt} = \frac{i\gamma_p^4 m_0 v}{c} \frac{dv}{dt}$$

となりますが、 f と v のスカラー積をとると

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= \gamma_p \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \gamma_p \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(\gamma_p m_0 \mathbf{v}) = \gamma_p m_0 \mathbf{v} \cdot \left(\frac{d\gamma_p}{dt} \mathbf{v} + \gamma_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \\ &= \gamma_p m_0 v^2 \frac{d\gamma_p}{dt} + \gamma_p^2 m_0 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma_p m_0 v^2 \frac{\gamma_p^3 v}{c^2} \frac{dv}{dt} + \gamma_p^2 m_0 v \frac{dv}{dt} \\ &= \gamma_p^2 m_0 v \frac{dv}{dt} \left(\frac{\gamma_p^2 v^2}{c^2} + 1 \right) = \gamma_p^4 m_0 v \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

となり、これを上式に入れて

$$f_4 = \frac{i}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{i}{c} \gamma_p \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (1.2.62)$$

また、(1.2.50) より

$$f_4 = \frac{i\gamma_p}{c} \frac{dE}{dt} \quad (1.2.63)$$

したがって、相対論的力の時間成分は単位時間あたりの仕事量と関係していることになります。

補注：相対論的運動方程式のローレンツ不変性

f_μ を4元ベクトルとしての変換 $f'_\mu(\tau) = a_{\mu\nu} f_\nu(\tau)$ をするものとする、(1.2.41) より

$$\left(m_0 \frac{dp'_\mu}{d\tau} - f'_\mu \right) = a_{\mu\nu} \left(m_0 \frac{dp_\nu}{d\tau} - f_\nu \right) \quad (1.2.64)$$

S 系で (1.2.57) が成立すれば、同じ形の運動方程式が別の慣性系 S' でも成立する。別証明としてローレンツ変換 $x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$ を固有時 τ で微分すると

$$\frac{dx'_\mu}{d\tau} = a_{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} \quad \longrightarrow \quad u'_\mu = a_{\mu\nu}u_\nu$$

この式の両辺に m_0 を掛けてもう一度微分すると

$$\frac{dp'_\mu}{d\tau} = a_{\mu\nu}F_\nu$$

一方、4元力のローレンツ変換は

$$F'_\mu = \frac{dp'_\mu}{d\tau} = a_{\mu\nu}F_\nu$$

なので、結局

$$\frac{dp'_\mu}{d\tau} = F'_\mu$$

となり、 S 系での運動方程式と同じ形になる。//

1.2.6 相対論的運動方程式からの帰結

加速度と力の方向は一致しない

ニュートン力学では加速度の方向と力の方向は一致しましたが、相対論的力学では“ 加速度の方向と力の方向は一致しない ”こととなります。相対論的運動方程式 (1.2.57) を空間成分と時間成分に分けて書けば (m を相対論的質量として)

$$\text{空間成分: } \frac{dp_k}{d\tau} = f_k \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (1.2.65)$$

$$\text{時間成分: } \frac{dp_4}{d\tau} = f_4 \quad \longrightarrow \quad c^2 \frac{dm}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (\because p_4 = iE/c, E = mc^2) \quad (1.2.66)$$

(1.2.65) の左辺の微分を実行して

$$\frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

これに (1.2.66) をいれて整理すると

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2}\mathbf{v} \quad (1.2.67)$$

となり、右辺第2項の存在により加速度と力の方向は一致しないことが分かります。なお、 $v \ll c$ のときは $m \simeq m_0$ で、ニュートンの運動方程式が近似的に成立します。

縦質量と横質量

(1.2.67) の右辺は \mathbf{v} と \mathbf{F} のスカラー積を含んでいるので、次の特別な場合が考えられます。

(1) $\mathbf{v} \perp \mathbf{F}$ の場合: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = 0$ となるので、形式的にニュートンの運動方程式が成立する。

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_0\gamma_p\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (1.2.68)$$

ただし、質量が相対論的質量 $\gamma_p m_0$ である点がニュートンの運動方程式と異なる。

(2) $v \parallel F$ の場合 : $v = v(F/F)$ とおくと

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{vF}{c^2} \frac{F}{F} = \frac{F}{\gamma_p^2}, \quad \therefore m_0 \gamma_p^3 \frac{dv}{dt} = F \quad (1.2.69)$$

形式的にニュートンの運動方程式が成立するが質量に当たるものとしては $\gamma_p^3 m_0$ となる。

粒子の運動方向に対して同じ方向あるいは垂直方向に力を加えると粒子の質量はそれぞれ $\gamma_p m_0, \gamma_p^3 m_0$ と増加するように見えます。古い文献には $\gamma_p m_0$ を横質量, $\gamma_p^3 m_0$ を縦質量と名づけていますが, この名称はいまではほとんど使われないようです。

(例.6) 粒子に働く力 F が一定の x 軸方向に運動する一次元相対論的な等加速度運動を考えます。 F は x 方向に働くとすると $F \parallel u$ なので, 運動方程式は (1.2.69) より

$$m_0 \gamma_p^3 \frac{du}{dt} = F$$

左辺の微分を実行すると

$$\frac{d}{dt}(\gamma_p u) = \frac{d\gamma_p}{dt} u + \gamma_p \frac{du}{dt} = \frac{\gamma_p^3 u}{c^2} \frac{du}{dt} v + \gamma_p \frac{du}{dt} = \gamma_p (\gamma_p^2 \beta^2 + 1) \frac{du}{dt} = \gamma_p^3 \frac{du}{dt}$$

となるので, 運動方程式は

$$m_0 \gamma_p^3 \frac{du}{dt} = F \quad (1.2.70)$$

となり, 粒子の加速度は

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{F}{m_0 \gamma_p^3} \quad (1.2.71)$$

と求められます。また, 瞬間静止系での加速度 a_0 は (1.2.45) より

$$a_0 = a \gamma_p^3 = \frac{F}{m_0} \quad (1.2.72)$$

次に, 初期条件として $t = 0$ のとき $x = 0, u = 0$ として運動方程式の解を求めます。(1.2.70) と (1.2.72) より

$$\gamma_p^3 \frac{dv}{dt} = \frac{1}{(\sqrt{1 - (u/c)^2})^3} \frac{du}{dt} = a_0$$

この式を初期条件のもとに解くと

$$\int \frac{1}{(\sqrt{1 - (u/c)^2})^3} du = \frac{u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = a_0 t$$

これから u は

$$u = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}} \quad (1.2.73)$$

と求められます。概略の挙動を掴むために $a_0 = c = 1$ として $t \rightarrow \infty$ での u の極限值を求めると $\lim_{t \rightarrow \infty} u = 1$ となり, 粒子の速度は絶対に光速を超えないことが確かめられます。

さて, (1.2.73) を積分して

$$\int dx = \int \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}} dt, \quad \therefore x = \frac{c^2}{a_0} \sqrt{1 + (a_0 t/c)^2} + C$$

初期条件より積分定数 $C = -c^2/a_0$ となるので

$$x = \frac{c^2}{a_0} \left(\sqrt{1 + (a_0 t/c)^2} - 1 \right) \quad (1.2.74)$$

粒子の世界線は (1.2.74) を変形して

$$\frac{(x + c^2/a_0)^2}{(c^4/a_0)^2} - \frac{(ct)^2}{(c^4/a_0)^2} = 1 \quad (1.2.75)$$

となります。これは $t \geq 0$ の領域で $ct = x + c^2/a_0$ を漸近線とする直角双曲線です。また, $a_0t \ll c$, つまり $u \ll c$ の場合は (1.2.74) より

$$x \doteq \frac{1}{2}a_0t^2 = \frac{1}{2c^2}a_0(ct)^2 \quad (1.2.76)$$

となり, 世界線は放物線を描きます。ニュートン力学での運動をの軌跡を再現していますね。

第2章 一般相対性理論

特殊相対性理論は次の原理を骨子として構築された理論でした。

- 物理法則はすべての慣性系で同じ形であらわされる（特殊相対性原理）。
- 真空中を伝わる光の速さはすべての慣性系で一定である（光速不変の原理）。

ところがニュートンの重力理論（万有引力の法則）は特殊相対論では記述できませんでした。重力理論はガリレイ変換に対して共変¹ですが、ローレンツ変換に対しては共変でない。その原因は、万有引力は瞬間的に遠くの物体に力を及ぼす遠隔相互作用で、重力の信号が光速を超えて伝わることを意味し、特殊相対性理論の基本原則に反するからですね。特殊相対性理論は重力が存在しない（重力が無視できる）場合にのみ成立する理論となると、その理論を拡張し、重力を取り込んだより一般的な理論の構築が求められます。そうして出来上がったのが一般相対性理論です²。一般相対性理論は重力場の（古典）理論です。そこでは特殊相対論の骨子となった原理の上に更に次の2つの原理が加わっています。

- 一般相対性原理：すべての物理法則は慣性系を含むあらゆる座標系の変換に対して方程式の形を変えない、共変である。
- 等価原理：重力は加速度座標系で現れる慣性力と等価で、局所的には加速度運動による見かけの力で重力を打ち消すことができる。

2.1 ニュートンの重力理論

i 番目の質点の質量を m_i 、位置ベクトルを \mathbf{x}_i 、 j 番目の質点の質量を m_j 、位置ベクトルを \mathbf{x}_j とすると、2つの質点の間にはニュートンの万有引力 F_{ij} が働き、 F_{ij} はニュートンの重力の法則によると次式で与えられます。

$$\mathbf{F}_{ij} = Gm_i m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \quad (G: \text{万有引力定数}) \quad (2.1.1)$$

そうすると i 番目の質点の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \quad (2.1.2)$$

と表され、この運動方程式にガリレイ変換 $x' = x - Vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$ を施すと

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}'_i}{dt'^2} = \sum_{i \neq j} Gm_i m_j \frac{\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j}{|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j|^3}$$

となり、ガリレイ変換に対して方程式の形は変わらずいわゆる共変であることが分かります。この共変性は (2.1.2) の右辺 F_{ij} が時間 t に依存せず質点間の位置座標の差だけで決まる形となっているからです。 i 番目の質点に作用する万有引力はそれ以外の多数の質点からの合力で、時間

¹ 変換に対して方程式の形を変えない。

² アインシュタインの天才的な発想を着実に理論化していった10年間の苦闘の末に樹立された理論。

の因子を含まないので、質点の位置変化による力の影響は一瞬にして伝わる。しかし、このことは、いかなる信号も光速を超えないという特殊相対論の要請は満たしません。ということで、具体的に計算するまでもなく (2.1.2) はローレンツ変換不変な方程式ではありません。

ニュートンの重力理論では、位置 x' に質量 M の質点がある場合、位置 x における重力ポテンシャルを $\Phi(x)$ とすると、次式で与えられました。

$$\Phi(x) = -G \frac{M}{|x - x'|} \quad (2.1.3)$$

多数の質点が分布し、任意の位置 r' における質量密度が $\rho(t, x')$ で与えられる場合を考えると、重力ポテンシャルはある瞬間 t におけるすべての位置からの寄与を加え合わせたものになるので

$$\Phi(t, x) = -G \int \frac{\rho(t, x')}{|x' - x|} dV' \quad (2.1.4)$$

この式の両辺にラプラス演算子 $\nabla^2 (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$ を作用させると³

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi(t, x) &= -G \int \rho(t, x') \nabla^2 \frac{1}{|x' - x|} dV' \\ &= 4\pi \int \rho(t, x') \delta(x' - x) dV' \\ &= 4\pi G \rho(t, x) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

となり、ポアソンの方程式がニュートンの重力場の基礎方程式となります。

$$\text{ニュートンの重力場方程式} \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

方程式 (2.1.5) 解釈すると、時刻 t の質量密度 $\rho(t, r')$ が“ 同時刻 t ”の重力場 $\phi(t, r)$ を作り、この場は 2 階の空間微分により次々に伝搬する近接作用の形をとってはいるものの時間微分の項がないため、重力の作用は一瞬にして遠方にまで及ぶという遠隔作用を表しています⁴。特殊相対性理論との相性の悪さがここにあるわけです。

ニュートンの重力理論は特殊相対性理論の枠組には収まらないことを先程述べましたが、特殊相対論をベースに重力が光速を超えないスピードで伝達するメカニズムを取り込んだ理論の構築は可能か？ ニュートンの重力理論を包含した、慣性系はもとより加速度系をも含む座標系において成り立つ理論構築への足掛かりになったのが次に述べる「等価原理」です。

2.2 等価原理

等価原理とは「重たいものも軽いものも同じ加速度で落下する」という観測事実にもとづき、慣性質量と重力質量は等価であるとする原理です。慣性質量とはニュートンの運動第 2 法則 $F = ma$ で定義される質量で、運動に対する抵抗（慣性）の大小を表し、重力質量は万有引力、重さなどにあらわれる質量のことですね。いま、慣性質量を m_I 、重力質量を m_g で表すと、一様重力場での自然落下の運動方程式は

$$m_I a = m_g g \quad (g = GM/r^2: \text{重力加速度})$$

³ 公式 $\delta(x' - x) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|x' - x|}$ を使う。 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数。

⁴ アインシュタインを含む他の物理学者も ∇^2 からダランベール演算子 $\square \equiv (1/c^2)\partial t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2$ に変更するといった方法を試みたが、いずれも失敗に終わったとのこと（吉田伸夫：完全独習相対性理論）

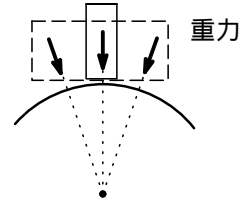
と表わせ、

$$a = (m_g/m_g)g, \quad m_1 = m_g \longrightarrow a = g$$

となるので、重力場中のあらゆる物体は同じ重力加速度で落下することが導かれます。

アインシュタインは加速している系（慣性力が生じる）と重力のある系を較べたとき、二つの力は区別できないことをエレベーターの思考実験を通して見出し、慣性力と重力は原理的に区別できない等価なものであると主張しました。これをアインシュタインの等価原理といいます。

なお、留意しておくべき点は、地球や太陽による重力（真の重力）は場所によっても時間によっても変わるので、慣性力と重力を同じとすることは空間的に限られた狭い領域に対してのみ成り立つということです。重力が作用している座標系から自由落下している加速度座標系に移ることで重力の影響を打ち消すことができますが、この加速座標系は時空全体ではなく限られた狭い領域に限ら



れており、このような局所的な加速度座標系を局所慣性系と呼んでいます。局所慣性系では特殊相対論が成立します。なお、局所慣性系に固定された時計の時間は固有時間です。

2.2.1 エレベーターの思考実験

自由落下しているエレベーター内の観測者を考えます。観測者は自分の重さを感じないし、エレベーター内の物体も同じように自由落下するので、観測者が静かに手離したリングはずっと宙に浮んだままで見えます。これは無重力の空間に浮かんでいるのと区別が付かない。自由落下している観測者は無重力の慣性系にいる観測者と等価なので、そこでは特殊相対性理論が成り立ちます。

次に、無重力の空間で上向きに一定の加速度 g で上昇するエレベーターを考えます。エレベーター内の観測者は下に押しつけられ、重力と同じような下向きの見かけの力（慣性力）を感じます。また、同じ高さからリングとみかんを同時に静かに手放すと、リングもみかんも同時に床に着く。これは、重力加速度 g の地上にいるのと物理的には全く同じで、その区別は付きません。

アインシュタインはこの思考実験から、重力場中の物理を知りたいときには、それと等価な加速度系（局所慣性系）を考えればよく、特殊相対論の成り立つ無重力空間で加速度運動する観測者を考えれば、特殊相対論で扱える物理に置き換えることができることに思い至ります。

2.2.2 重力と時計の遅れ

(1) 重力赤方偏移

重力赤方偏移とは、重力場中の光の波長が長波長側（赤方）にシフトして観測される現象をいいますが、アインシュタインはこの現象を等価原理を用いて説明しました。

エレベーターの外に設定された慣性座標系を S 、エレベーターに固定された加速度座標系を S' とし、 $t=0$ で S と S' 系の原点は一致しているとします。無重力空間に吊るされたエレベーターの床下に光の発信器、対向する天井に受光器が設置されています。 $t=0$ で発信機から振動数 ν_1 の光が発射され、それと同時にエレベーターは加速度 g で上昇をし始めたとします。受光器は光を発射した瞬間の発信器の位置に対して $v = gt$ の相対速度で遠ざかるので、受光器に達する光の

振動数はドップラー効果⁵により

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \doteq \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (\text{ただし } \beta = v/c) \quad (2.2.1)$$

と低振動数側にズレて観測されます。光が受光器に到達するまでの時間は床から天井までに高さ
を H とすると $t = H/c$ なので⁶, $v = gt = gH/c$ を (2.2.1) に入れると

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{gH}{c^2}\right) < \nu \quad (2.2.2)$$

を得ます。なお, S 系にいる人が観測する運動体のドップラー効果による振動数の減少 (赤方偏

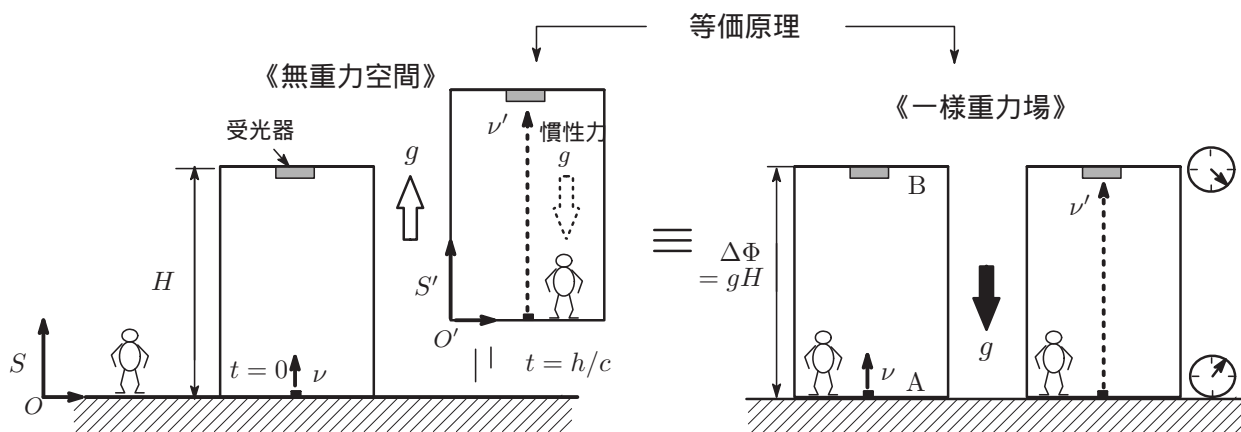


図 2.1: 重力赤方偏移

移) は一般によく知られた現象であって, ここまでは通常の物理の法則に従う普通の現象であり, 不思議でもなんでもありません。しかし, 等価原理を使うと, 同じ現象が光に対する重力の影響を表すものであると解釈できます。というのは, 等価原理によれば無重力空間を加速度 g で上昇するエレベーター内の物理環境は, 一様重力場中に静止しているエレベーター内の物理環境と全く同じことになるわけですね。一様重力場中に静止しているエレベーターの床面を基準とした床と天井間の重力ポテンシャルを $\Delta\Phi$ とすれば $\Delta\Phi = gH$ となるので, (2.2.2) から

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \quad (2.2.3)$$

が得られます。この式は光のドップラー効果と重力ポテンシャルを結びつける重要な式で, 等価原理により導かれた式です。この思考実験を要約すれば, 『ある地点で発射された振動数 ν 光をその地点よりも重力ポテンシャルが $\Delta\Phi$ だけ高い地点で観測すれば (2.2.3) で表される振動数 ν' の光として観測される』ということです。重力ポテンシャルは光の振動数を変化させる! という, なんと途方も無い結論が導かれます。

アインシュタインは (2.2.2) を太陽から発射された光を地球で観測した場合に適用し, 光の波長が 0.0002% 伸びる (重力場による光の赤方偏移) ことを予言しました。詳しく見ると, 質量 M の質点が位置 r に作る重力ポテンシャルは $\Phi(r) = -GM/r$ ですね。いま, 半径 R の太陽の表面から発せられる光を遠く離れた地点 P で観測したとすると, 2 点間の重力ポテンシャルの差は

$$\Delta\Phi = -GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \doteq \frac{GM}{R} \quad (\because r \rightarrow \infty) \quad (2.2.4)$$

⁵ 詳しくは HP の「特殊相対性理論」を参照。

⁶ 厳密に言えば時間 t の間に天井の受光器は元の位置よりも $gt^2/2$ だけ上に移動するが $t \ll 1$ なので無視できる。

地点 P で観測される光の振動数は (2.2.3) より

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{GM}{c^2 R} \right) \quad (2.2.5)$$

これに万有引力定数 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$, 太陽の質量 $M = 2 \times 10^{30} \text{kg}$, 太陽の半径 $R = 7 \times 10^8 \text{m}$, 光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$ を入れると

$$\frac{|\nu' - \nu|}{\nu} \doteq 2 \times 10^{-6} = 0.0002\% \quad (2.2.6)$$

が得られます。重力場による赤方偏移の式 (2.2.3) は正しいことがいろいろな観測データ で裏付けされています。

(2) 重力場により時計の進み方が変わる

“ 重力ポテンシャル Φ が光の振動数を変化させる ”ことを再考します。(2.2.3) の意味するところは、発信器から発射された 1 秒間に ν 個の光の波は $\Delta\Phi$ だけ重力ポテンシャルが高い場所の受光器ではその数が ν' 個に減少したということです。エレベーターは“ 静止 ”しているのでドップラー効果は考えられず、また、 ν 個の波が途中で一部消滅して ν' 個の波になるはずもない。アインシュタインは、この現象は床と天井では時間の進み具合が異なると考えれば説明がつくことに気付いたのです。振動数は 1 秒間あたりの波の数です。天井から見れば床の時間はゆっくり流れる、天井時計で 1 秒と考えている時間が床の時計では 1 秒も経っていない。つまり重力ポテンシャルが天井と床の時計の進み具合を変えたと考えたわけですね (仮に床から 1 秒間に 10 個の光波 (パルス) を発信したとしても天井での 1 秒間は床の 1 秒間より速く進んでいるので受け取る波の数は 10 個より少なくなる)。天井時計の時刻 t' が床の時計の時刻 t に対応するとすると $\nu t = \nu' t' = 1$ より

$$\frac{t'}{t} = \frac{\nu}{\nu'} = \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right)^{-1} \doteq 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}, \quad \therefore t' = \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right) t \quad (2.2.7)$$

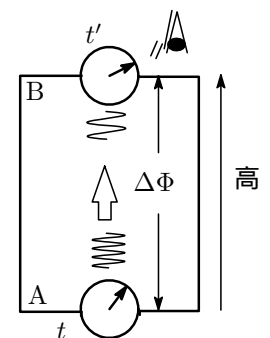
天井から見た床の時計の遅れ を $\Delta t = t' - t$ とすれば、時間遅れの式は

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} \quad (2.2.8)$$

と表されます⁷。この式を解釈するには次元解析が手っ取り早いですね。式の左辺は時間 ÷ 時間で無次元量となるので、右辺も無次元量でなければなりません。重力ポテンシャル $\Delta\Phi$ は単位質量あたりのエネルギーの次元を持つので分母の c^2 は単位質量当たりの静止エネルギー ($E = mc^2$) と考えると、時計の遅れは「エネルギー」と関係すると推定できます。そこで、発射された光を光子エネルギーの視点から考えてみると。。。床から $h\nu$ のエネルギーを持って発射された光子は、重力場中を上方に向かって進みつつ重力に抗して仕事をした分の位置エネルギーを消費するので、天井に届いたときには $h\nu' (< h\nu)$ のエネルギーになっていると考えられます。光子を質量 $m = h\nu/c^2$ の粒子とみなしてエネルギー保存則を適用すれば

$$h\nu' = h\nu - mgH = h\nu \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right), \quad \therefore \nu' = \nu \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right) \quad (2.2.9)$$

$\nu \rightarrow 1$ 秒間あたりの波の数



⁷ 地上では標高の高い所よりも低い所の方が時間の進み方が遅く、100m 低ければ 1 秒間に 10^{-13} 秒ほど時間がゆっくりと流れます。

となって見事に (2.2.3) ができます !!

重力場により時計の進み方が変わるという現象は我々日常カーナビでお世話になっている全地球測位システム (GPS) 衛星の内蔵時計に反映されています。GPS では GPS 衛星が地上へ正確な時間を伝達することで地球上の正確な位置を測定していて、重力ポテンシャルが地上より高い上空 (高度約 2 万 km) を周回している衛星の内蔵時計は地上の時計より早く時間を刻むことを反映して毎秒 100 億分の 4.45 秒だけ遅く進むように調整されています。そのおかげで地球上の正確な位置が測定できているのですね。

(3) 重力場が光を曲げる

無重力真空の空間に固定された慣性座標系を S , 上方に加速度 g の大きさに上昇しているエレベータに固定された加速度座標系を S' とします。外部が一切見えない窓のないエレベータに乗っている人は

- 加速度 g で上昇している加速度系 (S') にいるのか ... A
- 重力 g の作用のもとにある慣性系 (S) にいるのか ... B

A, B いずれの状況にいるのかわかるすべはありません。手に持つリングを静かに手放せばリングは自然落下するので自分は重力場の中の静止したエレベータ内にいると考えても何らおかしくはありません。

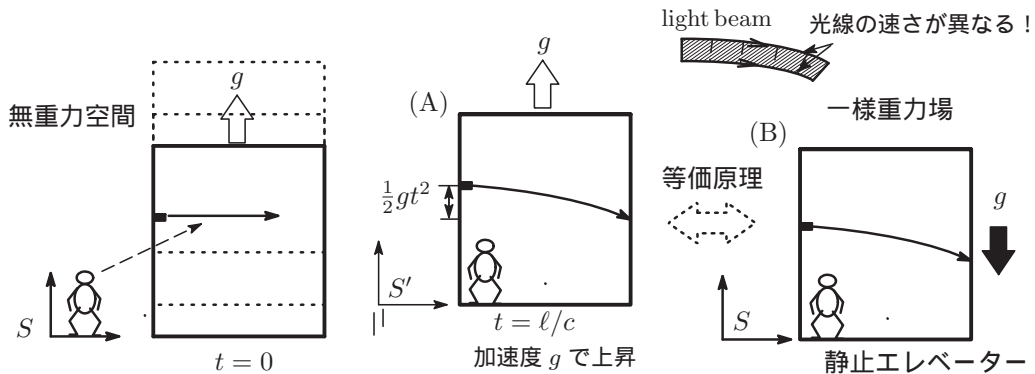


図 2.2: 重力による光線の曲がり

いま, エレベータの一方の壁から $t = 0$ で床に平行に光ビームを発射し, t 秒後に距離 l 離れた対向壁に達したとします。エレベータ外の人から見れば (壁に遮られて見えないが, 見えるとして) 光は直進して見えますが, エレベータ内の人から見れば時間 t の間にエレベータは上の方へ $gt^2/2$ だけ上昇するので, 光は放物線を描くように見えます。これはエレベータが加速度 g で上方に動いているからそう見えて当然だと考えたくありませんが, この系 (A) はアインシュタインの等価原理のよれば, 重力 g が働く空間の中で “静止” しているエレベータ (B) と等価 となります。実は, この思考実験から重力場の中では光が曲がるという結論が導かれます。

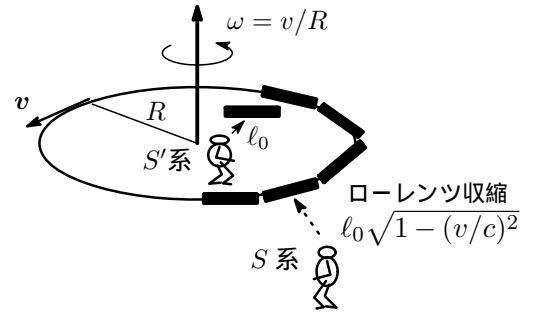
光ビームが曲がるのはビームの上層と下層の速度差によることから, 光速不変の原理は破られている。つまり, 「重力の作用する慣性系では光速不変の原理は成立せず, 特殊相対論が成立しない」ことを意味します。そこでアインシュタインは次のように考えました。

『光は最小時間経路を辿って真っすぐ進んでいるが, 時空が曲がっているから光路が曲がる。 重力とは時空が曲がっていることの発現である。』

。。なんとも, 天才的な発想とはこういうものですね !!

2.2.3 重力と曲がった時空

無重力空間に固定した慣性系を S ，角速度 ω で一様回転する円盤に固定した座標系を S' とします。 S' は回転座標系で慣性系ではありません。回転座標系では慣性力として軸から外に向かって遠心力が働きますが、等価原理によりこの力は重力と見なせるので、円盤は重力場にあると考えられます。さて、円盤上に乗っている S' 系の人



が手元の長さ l_0 の物差し⁸を使って円盤の円周を測ろうと円周に沿って隙間なく物差しを並べ、その数が N 個になったとします。したがって、 S' 系の人

は円周の長さは Nl_0 と判断します。一方、円盤外の S 系の人から見たとき、回転円盤の円周の速さが $v (= R\omega)$ であるとすると、物差しの長さはローレンツ収縮して $l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$ と見えるので円周の長さは $Nl_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$ だと判断します。

S 系は特殊相対論が成り立つ慣性系なので時空の曲がりはなく、その系ではユークリッド幾何学が成立し円周の長さは $2\pi R$ です⁹。観測結果とつぎ合わせれば

$$Nl_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} = 2\pi R \quad (2.2.10)$$

が成立します。このことから S' 系の人

$$Nl_0 > 2\pi R \quad (2.2.11)$$

ということになり、 S' 系の人から見ると円周の長さ Nl_0 は円盤の直径 $2R$ の π 倍よりも大きくなる、いいかえると円周率が π より大きくなります！?

これは普通のユークリッド幾何学では考えられないことで、曲率が負の空間でない(2.2.10)ような関係式を満たせません¹⁰。

この思考実験から、アインシュタインは、重力が存在する S' 系にいる人は空間が曲がったように観測するはずと考えたわけです。

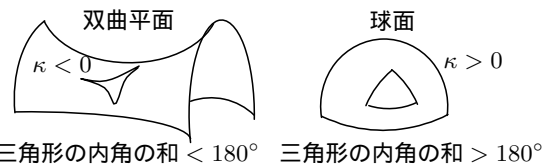


図 2.3: 双曲平面と球面 (κ : ガウス曲率)

このように、重力のある空間は歪んでいて曲率をもつ非ユークリッド空間的なものになります。そのような空間では直交座標を設定することができず、曲線座標を用いなくてはなりません。また、1目盛の長さも場所によって変化することもあり、2つの座標感の角度も 90° とは限らないということになります。

特殊相対論では慣性系から慣性系への座標変換、直線座標系間の変換であるローレンツ変換という比較的単純な一次変換でことが済みました。しかし、重力場が存在する非慣性系をも視野に入れる一般相対論では、上の回転円盤の思考実験からわかるように、場所ごとに伸び縮みして目盛りの間隔が異なる曲がった時空座標がその舞台となり、座標変換は単純な一次変換ではなく一般座標変換というものを考えなければならないことになります。一般座標変換については2.3節：「曲がった時空の表し方」のところで詳しく取り扱います。

⁸ 円盤上の人にとって、円盤上に置かれた物差しは相対的に静止しているのでどの方向に置かれていても長さは同じにみなされるとします。厳密には違って、円盤上に生じている重力場の方向によって物差しが伸び縮みする筈ですが、それは無視しています。

⁹ r は運動方向に対して直角方向なのでローレンツ収縮は起きません。

¹⁰ ユークリッド幾何学が成立しない曲面として双極平面や球面などがります。

【補足.4】円盤内の重力場と時計の遅れ

いま、半径 R 、速さ $v = R\omega$ で回転する円盤の中心 A と円盤の縁 B に時計が置かれています。半径 $r (\leq R)$ の位置には単位質量当たり $g(r) = r\omega^2$ の外向きの遠心力が働きますが、これは等価原理により、位置 r における重力加速度とみなすことができますね。したがって、円盤上にいる人は、円盤は静止していて中心から半径方向に距離 r に比例した重力が作用している場の中にいると判断してもおかしくはない。距離 r における重力ポテンシャルは

$$\Phi(r) = - \int_0^r r\omega^2 dr = -\frac{1}{2}r^2\omega^2$$

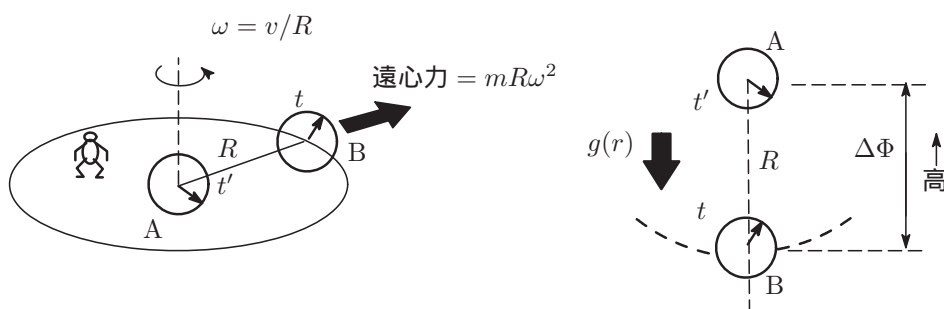
となり、 A と B における重力ポテンシャルの差は

$$\Delta\Phi = \Phi(0) - \Phi(R) = \frac{1}{2}R^2\omega^2$$

中心に置かれた時計の刻みを t' 、縁に置かれた時計の刻みを t とすると (2.2.8) より

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} = \frac{R^2\omega^2}{2c^2} \quad (\Delta t = t' - t)$$

次に特殊相対論の立場から考えると、時計 B は中心から見れば $v = r\omega$ の速さで運動してい



るので時計 A に対して $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ の割合で遅れます。

$$t = t' \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

$v \ll c$ とすると

$$t \doteq t'(1 - v^2/2c^2), \quad \therefore \frac{\Delta t}{t} = \frac{v^2}{2c^2} = \frac{R^2\omega^2}{2c^2} \quad (\Delta t = t' - t)$$

となり、上の結果と一致します。//

2.3 曲がった時空の表し方：リーマン空間とリーマン計量

いよいよ一般相対論の曲がった空間の話になりますが、ここでは物理に重点を置いて見ていくことにします。ユークリッド幾何学が成り立つような直線座標空間（ユークリッド空間、ミンコフスキー空間等）での線素はピタゴラスの定理を活用して

$$\begin{cases} \text{ユークリッド空間} & : ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\ \text{ミンコフスキー空間} & : ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 \quad (x_0 = ct) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

と定義しました。しかし、座標軸が場所によって曲がったり伸び縮みしているとなると、単にピタゴラスの定理を適用するわけにはいきません。そこで、ある点 (x^0, x^1, x^2, x^3) と微小に離れ

た点 $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x_2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ の間の線素の 2 乗を次の 2 次形式で与えます¹¹。

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \\
 &\quad + 2(g_{01}dx^0dx^1 + g_{02}dx^0dx^2 + g_{03}dx^0dx^3 \\
 &\quad + g_{12}dx^1dx^2 + g_{13}dx^1dx^3 + g_{23}dx^2dx^3) \\
 &= g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$$

$g_{\mu\nu}(x)$ は場所によってその値が変わる 4 次元座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) の関数で、リーマン計量とか計量テンソルあるいは単に計量と呼び、対称テンソルです。これが与えられればその空間の幾何学的性質がすべて決まるという大変重要な量です。

| | |
|--------|-------------------------------------|
| リーマン計量 | $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ |
|--------|-------------------------------------|

リーマン計量が与えられた空間をリーマン空間といい、 ds^2 は曲面上の座標の選び方によらずその長さは不変という特長があります。リーマン計量は上で見るように $4 \times 4 = 16$ 個の成分をもちますが、独立な成分はその内の 10 個です¹²。

$$10 \text{ 個} \begin{cases} \mu = \nu \text{ の対角成分: } & g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33} & \text{の 4 個} \\ \mu \neq \nu \text{ の非対角成分: } & g_{01} = g_{10}, g_{02} = g_{20}, g_{03} = g_{30} \\ & g_{12} = g_{21}, g_{13} = g_{31}, g_{23} = g_{32} & \text{の 6 個} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

このように 10 個の $g_{\mu\nu}$ を使って 4 次元時空の長さを定義するというのが、一般相対論の基礎となる 4 次元幾何学で、ニュートン力学では重力場は 1 個の重力ポテンシャル Φ で記述できましたが、一般相対論では 10 個の $g_{\mu\nu}$ を用いて重力場を記述します¹³。重力場は空間の構造から生まれると捉えた途方もない画期的なアイデアですね。

さて、リーマン空間はユークリッド空間や特殊相対論の舞台となるミンコフスキー空間を包含しています。リーマン計量のすべての対角成分が 1 で非対角成分が 0 のときはユークリッド空間、また、 $g_{00} = -1$ 、その他の対角成分がすべて 1 で非対角成分がすべて 0 のときはミンコフスキー空間となります。

$$g_{\mu\nu}^U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu}^M = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

いずれにしても計量成分がすべて座標に依存しない定数となる場合は、 $g_{\mu\nu}$ はいわゆる平坦な空間の計量となります。曲面の曲がり具合を測る尺度を曲率といいます。曲がり具合は経験的に面から外れた外部から眺めないと分からないはずですが、実は曲面上で測定される角度や距離な

¹¹ x^0 というように添字が上付きになっていますが、ここでは気にしないように。

¹² $g_{\mu\nu}$ を 4 行 4 列の対称行列と見なすと独立成分の数は $n = 4$ として $n(n+1)/2 = 10$ 個になります。

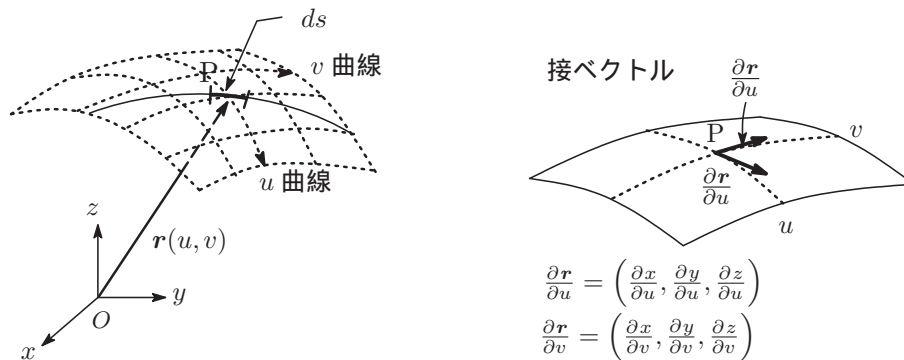
¹³ 吉田伸夫「思考の飛躍・アインシュタインの頭脳」には『10 個の成分を持つテンソル $g_{\mu\nu}$ を使って重力場を表せばよいと気づいたことは、一般相対論を建設する過程において、最大級の出来事である』と書かれています。

どの量(内在量)だけでそれがわかるんだ, ということガウスは発見しました¹⁴。リーマン計量 $g_{\mu\nu}$ は曲面の骨組みのようなものですから, 曲率はリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ で決まるということですね。リーマン計量 $g_{\mu\nu}$ と 4次元時空間の曲がり具合の関係はザックリと次のように表現することができます¹⁵。

$$\begin{cases} g_{00} & : \text{時間軸}(x_0\text{軸})\text{方向の伸縮(マイナスの値になる)} \\ g_{01}, g_{02}, g_{03} & : \text{それぞれ } x_1\text{軸}, x_2\text{軸}, x_3\text{軸と } x_0\text{軸の間のよじれ} \\ g_{11}, g_{22}, g_{33} & : \text{それぞれ } x_1, x_2, x_3\text{軸方向の伸縮} \\ g_{12}, g_{23}, g_{31} & : \text{それぞれ } x_1\text{軸と } x_2\text{軸}, x_2\text{軸と } x_3\text{軸}, x_3\text{軸と } x_1\text{軸の間のよじれ} \end{cases}$$

【補足.5】ガウスの曲面論

4次元空間は図に書けないので, 3次元ユークリッド空間内の曲面を考えます。曲面上の点P



を指定する位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とします。 x, y, z はそれぞれ曲面座標 u, v の関数として $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ と表されるので, パラメーター u, v を使って位置ベクトルを $\mathbf{r}(u, v)$ と表すと

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$$

ここで $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は P 点における接ベクトル¹⁶です。曲面上の線素 ds の 2 乗は $d\mathbf{r}$ の内積で与えられるので

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dudv + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

ここで接ベクトルの内積を

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2, \quad F = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right), \quad G = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2 \quad (2.3.5)$$

とおくと, 線素の 2 乗は

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.3.6)$$

と表せます。この形で表したものを第 1 基本形式といい, E, G, F を第 1 基本量といいます。 E, F, G は曲面の内在的性質を表す量です。ここで $x^1 \equiv u, x^2 \equiv v, g_{11} = E, g_{12} = g_{21} \equiv F, g_{22} \equiv G$ とおけば, 第 1 基本形式は

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.3.7)$$

と表され, この式の形は (2.3.2) に対応していることがわかります。曲率(ガウス曲率)は曲面の

¹⁴ 「驚愕の定理」ともいわれます。

¹⁵ 吉田伸夫「思考の飛躍・アインシュタインの頭脳」新潮選書, 2010。

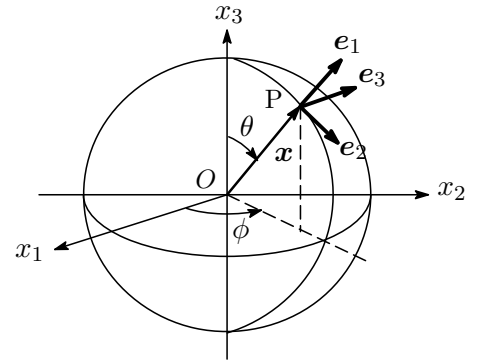
¹⁶ 微分幾何で自然標構とか自然基底と呼ばれます。 $x^1 \equiv u, x^2 \equiv v$ として $\mathbf{e}_1 \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}, \mathbf{e}_2 \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}$ と置けば $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j (i, j = 1, 2)$ と書けます。

内在的性質量 E, F, G だけで表せることをガウスは見いだしたことは先述のとおりです。また、線素は曲面上の座標の選び方によらない不変量で、 $ds'^2 = ds^2$ という重要な結論も得られます。//

(例.7) 球面座標の計量と線素の2乗¹⁷

点 P の位置 x と球面座標での位置 u をそれぞれ $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u = (u_1, u_2, u_3) \equiv (r, \theta, \phi)$ とすると

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2, u_3) = r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= x_2(u_1, u_2, u_3) = r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= x_3(u_1, u_2, u_3) = r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.3.8)$$



点 P 点での球面座標の (自然) 基底 e_1, e_2, e_3 を次式で定義します。

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial x}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ e_2 &= \frac{\partial x}{\partial u_2} = \frac{\partial x}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta) \\ e_3 &= \frac{\partial x}{\partial u_3} = \frac{\partial x}{\partial \phi} = (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0) \end{aligned}$$

P 点での微小変位を dx とすると

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i = e_i du_i \quad (= e_1 du_1 + e_2 du_2 + e_3 du_3)$$

基底 e_i, e_j の内積を g_{ij} とすれば

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

線素の2乗は

$$ds^2 = dx \cdot x = du_i e_i \cdot du_j e_j = (e_i \cdot e_j) du_i du_j$$

$$\therefore ds^2 = g_{ij} du_i du_j$$

となり、これから各 g_{ij} は

$$g_{11} = e_1 \cdot e_1 = 1, \quad g_{22} = e_2 \cdot e_2 = r^2, \quad g_{33} = e_3 \cdot e_3 = r^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{12} = e_1 \cdot e_2 = 0, \quad g_{23} = e_2 \cdot e_3 = 0, \quad g_{31} = e_3 \cdot e_1 = 0$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

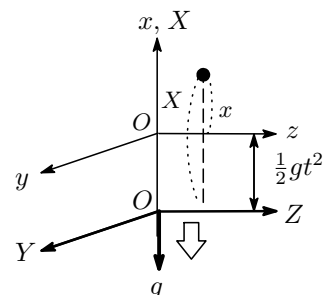
線素の2乗は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.3.10)$$

(例.8) 弱い重力場と空間の曲がり

弱い重力場として地表近くの重力場を考えます。地上に固定した x, y, z 座標系で鉛直上方に x 軸、水平方向に y, z 軸をとり、 $t = 0$ で原点を一致させた加速度 g で自由落下するエレベータに固定された X, Y, Z 座標系の X 軸を鉛直上方に、水平方向に Y, Z 軸をとります。エレベータに固定された座標系は重力の作用が消えた局所慣性系となるので特殊相対論が成り立ちます。

簡単のため t が十分に小さい、落下し始めの状態を考えます。この



¹⁷ 詳細は数学のコーナーの「テンソル談義第6話」を参照されたし。

とき落下速度は十分小さいのでガリレイ変換が成立するとすると

$$T = t, \quad X = x + \frac{1}{2}gt^2, \quad Y = y, \quad Z = z \quad (2.3.11)$$

エレベータの局所慣性系では特殊相対論が成り立ち、線素の2乗は

$$\begin{aligned} ds^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 - c^2 dT^2 \\ &= (dx - gtdt)^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\frac{gt}{c}dx \cdot cdt - \left(1 - \frac{g^2t^2}{c^2}\right)(cdt)^2 \\ &= -\left(1 - \frac{g^2t^2}{c^2}\right)(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + 2\frac{gt}{c}dx^0 dx^1 \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

与えられます。これから、計量 $g_{\mu\nu}$ の中で0でない成分をとりだすと

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{g^2t^2}{c^2}\right), \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{01} = g_{10} = \frac{gt}{c}$$

となります(ただし、 x, y, z, ct を改めて x^1, x^2, x^3, x^0 とした)

自由落下直後の $T = t$ が十分小さいときの原点 $X = 0$ の近傍においては

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 (\leq 0), \quad \therefore t = \sqrt{-\frac{2x}{g}}$$

重力ポテンシャルを $\Phi = gx (\leq 0)$ とすれば(2.3.12)は

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dx_0^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + 2\sqrt{\frac{-2\Phi}{c^2}}dx^1 dx^0 \quad (2.3.13)$$

と表され、重力ポテンシャルと $g_{\mu\nu}$ の関係式として

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right), \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{01} = g_{10} = \frac{\sqrt{-2\Phi}}{c} \quad (2.3.14)$$

を得ます。重力ポテンシャルは計量の中に組み込まれている¹⁸ことが分かりますね。平坦なミンコフスキー空間では $g_{00} = -1$ でしたが、重力ポテンシャルが存在することで -1 からズレ、 $X = 0$ の近傍の空間は平坦でないこととなります。

2.3.1 固有時間と座標時間

特殊相対論で固有時間 τ は次式で定義されました。

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (2.3.15)$$

一般座標系の曲がった時空間が舞台となる一般相対論でも ds^2 は不変量となるので、固有時間を

$$\boxed{-c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (2.3.16)$$

で定義すると、固有時間 τ と座標時間 t との関係は

$$d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} / c = \frac{dt}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} \quad (2.3.17)$$

¹⁸ $g_{\mu\nu}$ は一般相対論における重力ポテンシャルと考えることができます。

となります。特殊相対論での両時間の関係は

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma} dt \quad (2.3.18)$$

となったので、 $v = 0$ のとき $d\tau = dt$ で両時間は一致しましたが、一般相対論では

$$d\tau = \frac{dt}{c} \sqrt{-g_{00} \left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2} = \sqrt{-g_{00}} dt \quad (2.3.19)$$

となるので必ずしも一致せず、重力場の中では $v = 0$ と静止していても固有時間はゆっくり進むということですね。上の自由落下のエレベーターの例では

$$d\tau = dt \sqrt{1 + \frac{2gx}{c^2}} = dt \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}$$

となります。

2.4 重力場の中の粒子の運動方程式

2.4.1 一般座標変換で慣性系から非慣性系へ

特殊相対論が成立する局所慣性系を (X, Y, Z, T) とし、その座標系で静止している粒子を考えます。粒子は空間を歪ませる重力源となり、源が静止しているので重力場の時間変動はなく静的です。粒子の局所慣性系での運動方程式は τ を固有時間として

$$m \frac{d^2 X^\mu(\tau)}{d\tau^2} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.4.1)$$

で与えられます。この運動方程式を非局所系座標での運動方程式に変換していきます。

局所慣性系座標 X^μ と任意の 4 次元座標 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ の間には一般に

$$X^\mu = X^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x^\nu = x^\nu(X^0, X^1, X^2, X^3) \quad (2.4.2)$$

の関係があり、 $X^\mu \rightarrow x^\mu$ への座標変換を一般座標変換¹⁹といいます。物理的にはこの変換により、ある慣性系から重力のある非慣性系へと舞台が移り変わることとなります。 X^μ, x^ν それぞれの微小変位は

$$\begin{aligned} dX^\mu &= \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \left(\equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^3} dx^3 \right) \\ dx^\nu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\sigma} dX^\sigma \quad (\rho, \sigma = 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

で与えられ、また、微分演算子は次のように変換されます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^\mu} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\equiv \frac{\partial x^0}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial x^1}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial X^\nu} \left(\equiv \frac{\partial X^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial X^0} + \frac{\partial X^1}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial X^1} + \frac{\partial X^2}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial X^2} + \frac{\partial X^3}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial X^3} \right) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

(2.4.3) の 2 つの式を組み合わせれば

$$dX^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\nu} dX^\nu, \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\sigma} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.4.5)$$

¹⁹ 一般座標変換はローレンツ変換などの 1 次変換とは異なり一般に非線形変換で、変換された成分が元の時空の関数となっている、つまりある一つの座標点 (世界点) を異なる座標系で表したものとします。

を得ます。\$dX^\mu\$ と \$dx^\nu\$ は任意であるので、上の等式が成立する条件は次の通りです。

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\sigma} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \begin{cases} 1 & : \mu = \nu \\ 0 & : \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.4.6)$$

次に、(2.4.2) を固有時間 \$\tau\$ で微分すると（合成関数の微分法を使って）

$$\frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho(\tau)}{d\tau}$$

さらにもう一度微分して (2.4.1) を使えば

$$\frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \cdot \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

となります。これに \$\partial x^\lambda / \partial X^\mu\$ を掛け、(2.4.6) を使えば、一般座標系における粒子の運動方程式が得られます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \cdot \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} \cdot \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu} + \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \cdot \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \cdot \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu} &= 0 \\ \therefore \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu} \cdot \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \cdot \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$

ここでクリストッフェル記号²⁰と呼ばれる

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu} \cdot \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (\text{但し } \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda = \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda) \quad (2.4.7)$$

を導入すると、自由粒子の運動方程式は簡潔に表されて

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (2.4.8)$$

となります。ところで、この方程式には (2.4.3) で存在しない第 2 項が登場しましたが、この項は一般座標系で書き表したことにより現れた項なので、局所慣性系では消えていた重力に関するモノを表していると予想されますね。このあたりのことを次に詳しく見ていくことにします。

2.4.2 ニュートン運動方程式との比較

局所慣性系では等価原理により重力を消し去った (2.4.1) が自由粒子の運動方程式でした。一般座標系では重力が存在し、重力ポテンシャルを \$\Phi(x)\$ とした場合のニュートンの運動方程式は

$$m \frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} = -m \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4.9)$$

となります。ここで (2.4.8) の 2 項目を右辺に移行した方程式

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (2.4.10)$$

と (2.4.9) と見比べると、右辺は重力ポテンシャルに相当するものではないかと考えられますね。そうであるなら \$\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda\$ はリーマン計量 \$g_{\mu\nu}\$ で表わされるはずなので、以下にこのあたりを調べていきます。

²⁰ 第 2 種クリストッフェル記号

粒子近傍の局所慣性系の線素の2乗は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{00}(dX^0)^2 + \eta_{11}(dX^1)^2 + \eta_{22}(dX^2)^2 + \eta_{33}(dX^3)^2$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & : \mu = \nu = 0 \\ 0 & : \mu \neq \nu \\ 1 & : \mu = \nu = 1, 2, 3 \end{cases} \longleftrightarrow \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.11)$$

で与えられ, $\eta_{\mu\nu}$ は局所慣性系におけるミンコフスキー計量です。線素の2乗は座標変換不変量ということを使って一般座標系に書き換えると, 一般座標でのリーマン計量は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\rho dx^\sigma = g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma$$

$$\therefore \boxed{g_{\rho\sigma}(x) = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma}} \quad (2.4.12)$$

となります。(2.4.12) を x^τ で微分すると

$$\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} = \eta_{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\rho} \cdot \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \cdot \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} \right] \quad (2.4.13)$$

となり, 添え字の $\rho \leftrightarrow \tau$ を入れ替えて

$$\frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^\rho} = \eta_{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\tau} \cdot \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\tau} \cdot \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right] \quad (2.4.14)$$

を得ます。また, (2.4.13) で $\tau \leftrightarrow \sigma$ の入れ替えると

$$\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} = \eta_{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \cdot \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\tau} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \cdot \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \right] \quad (2.4.15)$$

となりますね。ここで, (2.4.13) + (2.4.15) - (2.4.14) を計算します。なお, 煩雑な計算なので次のように記号化しておくとも計算が楽です (自己流のため真似るは必要ナシ)。

$$\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} \rightarrow [\sigma\rho, \tau] = [\rho\sigma, \tau], \quad \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\rho} \rightarrow (\mu, \tau, \rho) = (\mu, \rho, \tau), \quad \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma} \rightarrow (\nu, \sigma), \text{ etc}$$

この記法を使えば

$$\begin{aligned} [\rho\sigma, \tau] + [\rho\tau, \sigma] - [\tau\sigma, \rho] &= (\mu, \tau, \rho)(\nu, \sigma) + (\mu, \rho)(\nu, \tau, \sigma) + (\mu, \sigma, \rho)(\nu, \tau) \\ &\quad + (\mu, \rho)(\nu, \sigma, \tau) - (\mu, \rho, \tau)(\nu, \sigma) - (\mu, \tau)(\nu, \rho, \sigma) \\ &= 2(\mu, \rho)(\nu, \sigma, \tau) \end{aligned}$$

となり, 元に戻せば

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^\rho} \right) \quad (2.4.16)$$

となります。添字を上付きにした定数 $\eta^{\mu\nu}$ を (2.4.11) 同様に

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & : \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & : \mu \neq \nu \\ -1 & : \mu = \nu = 0 \end{cases}$$

と定義すれば次の関係が得られます。

$$\eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (2.4.17)$$

(2.4.12) の微係数の X と x の上下を反対にしたものを

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta}$$

で定義すると, (2.4.6) より

$$g^{\mu\nu}(x)g_{\rho\nu}(x) = \delta^\mu_\rho \quad (2.4.18)$$

の関係²¹が得られます。さて, いよいよ最後の計算です。(2.4.16) に $g^{\lambda\rho}$ を掛けて整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^\rho} \right] \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\eta_{\mu\nu} [(\mu, \tau, \rho)(\nu, \sigma) + (\mu, \rho)(\nu, \tau, \sigma) + (\mu, \sigma, \rho)(\nu, \tau) \\ & \quad + (\mu, \rho)(\nu, \sigma, \tau) - (\mu, \rho, \tau)(\nu, \sigma) - (\mu, \tau)(\nu, \rho, \sigma)] \\ &= g^{\lambda\rho}\eta_{\mu\nu}(\mu, \rho)(\nu, \tau, \sigma) = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \cdot \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} \\ &= \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} \cdot \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\beta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} \delta_\nu^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \delta_\beta^\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\nu} \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} = \Gamma_{\tau\sigma}^\lambda \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

となり, これでクリストッフエル記号をリーマン計量で表すことができました。そして, 重力場における粒子の運動方程式²²として次式が得られます。

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \\ & \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} \left[\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right] \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

クリストッフエル記号 $\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda$ は式からわかるようには 下付き添字の交換に対して対称 です。

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda = \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \quad (2.4.21)$$

なお, リーマン計量 $g_{\mu\nu}$ が定数である場合 (曲りのない平坦な空間), すべてのクリストッフエル記号 Γ_{jk}^i は 0 になることが分かります。

補注 クリストッフエル記号の独立成分数について

λ, ρ, σ がそれぞれ 0 から 3 までの 4 つの値をとるので, クリストッフエル記号は全部で $4^3 = 64$ 個の成分からなります。しかし, 下付き添え字の交換対称性から独立した項の数はもっと少なくなり, 合計で 40 個になります。

∴ 下添え字の組み合わせは次の 4 行 4 列の対称行列で表せます。対称行列の場合, 独立成分は下線で引いた成分で, いまの場合 10 個ですね。したがって, クリストッフエル記号の独立した項の数は $4 \times 1 = 40$ 個となります。

$$\lambda = 0, 1, 2, 3 \times (\rho\sigma) = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 02 & 03 \\ 10 & \underline{11} & \underline{12} & \underline{13} \\ 20 & 21 & \underline{22} & \underline{23} \\ 30 & 31 & 32 & \underline{33} \end{pmatrix} \quad //$$

²¹ $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ は逆行列の関係。

²² 測地線の方程式とも呼ばれる。

2.4.3 弱い重力場での運動方程式

再度ニュートンポテンシャル Φ とリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ の関係を見ていきます。弱い重力場ではリーマン計量は (2.3.4) のミンコフスキー計量よりからわずかにズレたものと考えられるので

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}(x)| \ll 1 \quad (2.4.22)$$

と置きます。これを (2.4.20) に入れ、 $h_{\mu\nu}$ の 1 次までの項をとると

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} &= \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\alpha} + h^{\lambda\alpha}) \left[\frac{\partial(\eta_{\alpha\rho} + h_{\alpha\rho})}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial(\eta_{\alpha\sigma} + h_{\alpha\sigma})}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma})}{\partial x^{\alpha}} \right] \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\alpha} + h^{\lambda\alpha}) \left(\frac{\partial h_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial h_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

となります。次に、運動方程式 (2.4.20) の空間成分を考えます。 $\lambda = i (i = 1, 2, 3)$ として $\Gamma_{\rho\sigma}^i$ の下付き添え字 $\rho\sigma$ の組み合わせを調べると、 ρ と σ の対称性より

$$\begin{aligned} (\rho\sigma) &\rightarrow (0,0), (01), (02), (03), (10), (20), (30) \implies (00), 2(0,\ell) \\ &(11), (12), (13), (21), (22), (23), (31), (32), (33) \implies (mn) \end{aligned}$$

となるので、空間成分は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^i \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \\ = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + 2\Gamma_{0\ell}^i \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^{\ell}}{d\tau} + \Gamma_{mn}^i \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} = 0 \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

となります。重力場が弱い場合、特殊相対論の関係式が成立するとして粒子の速さを $v (\ll c)$ とすると、(1.2.38) より

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \gamma_p \frac{dx^0}{dt} = \gamma_p c \simeq c, \quad \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma_p \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \quad (\because \gamma_p \sim 1, x^0 = ct) \quad (2.4.25)$$

(2.4.24) の右辺第 3,4 項は第 2 項より十分小さいので無視すると、 $d\tau = dt/\gamma_p \simeq dt$ として

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + c^2 \Gamma_{00}^i = 0 \quad (2.4.26)$$

と近似できます。いま、重力場は静的で空間の曲がり具合の時間的変動はないので

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^0} = \frac{\partial h_{\mu\nu}(x)}{\partial x^0} = 0$$

を満たします。したがって (2.4.23) より

$$\Gamma_{00}^i \simeq \frac{1}{2}\eta^{i\alpha} \left(\frac{\partial h_{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\alpha}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4.27)$$

これを (2.4.26) に入れると

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad (2.4.28)$$

が得られます。この式が弱い重力場における一般相対論の運動方程式²³です。ニュートンの運動

²³ ニュートンの重力理論が成立するのは、重力場が十分に弱く光速に近い速度にまで加速しない場合で、そこでは一般相対論の重力理論と同じ結果を与えます。

第3章 リーマン空間におけるテンソル解析

3.1 斜交座標とテンソル

3.1.1 反変ベクトルと共変ベクトル

簡単のため2次元ユークリッド空間を考えます。基底を e_1, e_2 ($e_1 \cdot e_2 \neq 0$) とし、それぞれの長さは1でもなく、また互いに等しくもないとします。斜交座標系では普段見慣れた直交座標系とは異なり、一つのベクトルに対し2種類の成分が登場します。詳しく見ていきます。斜交座標系を Σ 系とすれば、図 3.1 に示すように任意のベクトル A の x, y 座標軸に平行な成分を肩付き添字の A^1, A^2 として A は平行四辺形のルールより

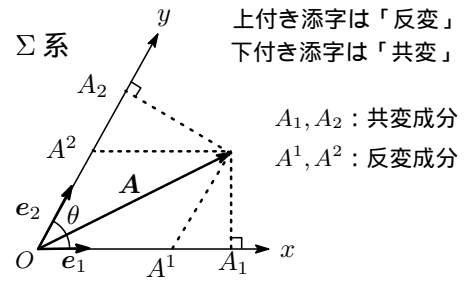


図 3.1: Σ 系斜交座標

$$A = A^1 e_1 + A^2 e_2 \tag{3.1.1}$$

と表されます。この成分 (A^1, A^2) を反変成分といい、それを成分とするベクトルを反変ベクトルといいます。そして下付き添字の基底 e_i を共変基底と呼んでいます。“反変”というネーミングは (3.1.1) から分かるように、 A を一定として e_i の単位スケールを大きくするとそれに反比例して成分 A_i は小さくなり、逆も同じになることからきています。

次に、ベクトル A の x, y 軸へ垂直射影した大きさ A_1, A_2 を成分とするベクトルを共変ベクトルといい、下付き添字で表します。なお、図 3.1 からわかるように共変成分は A と e_i の内積で与えられますね。

$$A_1 = A \cdot e_1 \quad A_2 = A \cdot e_2 \tag{3.1.2}$$

“共変”の意味は、基底 e_i の単位スケールを大きくすればそれと共に成分 A_i も大きくなることからきています (蛇足の補足も参照)。共変ベクトルと共変基底 e_i の間では平行四辺形のルールが成り立たないので (3.1.1) のような形は成立しません。

$$A \neq A_1 e_1 + A_2 e_2$$

そこで、

$$A = A_1 e^1 + A_2 e^2 \tag{3.1.3}$$

となるような上付き添字の基底 e^i を設定し、これを反変基底と呼ぶことにします。反変基底は図 3.2 に示すように Σ 系の y 軸と直交する x' 軸、 x 軸と直交する y' からなる新たな斜交座標系 Σ' の基底で、共変基底との間には以下に示すように正規直交関係が成立します。これら 2 対の基底を双対基底と呼んでいます。

$$e^i \cdot e_j = \delta_j^i \begin{cases} e^1 \cdot e_1 = 1 & e^1 \cdot e_2 = 0 \\ e^2 \cdot e_1 = 0 & e^2 \cdot e_2 = 1 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

反変基底 e^i の定義は、紙面垂直に手前に向かう長さ 1 の基底を e_3 とし、次式で定義されます。

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}, \quad e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}$$

なお、ベクトル A 自体はどちらの座標系から見ても変わらないので

$$A = A^1 e_1 + A^2 e_2 = A_1 e^1 + A_2 e^2 \quad (3.1.5)$$

が成立します。

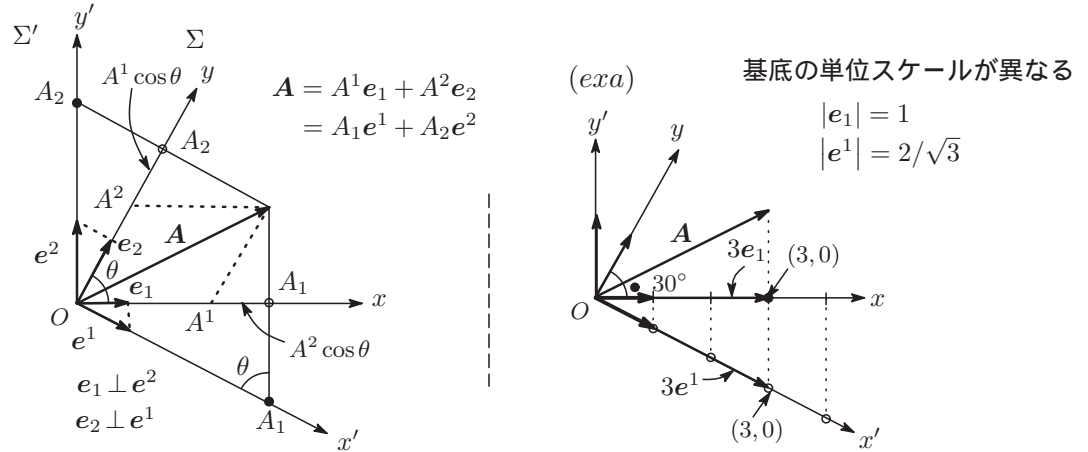


図 3.2: Σ, Σ' 系斜交座標

反変・共変各基底の長さの間には相反関係があります。(3.1.4) より

$$\begin{aligned} e^1 \cdot e_1 &= |e^1| |e_1| \cos(\pi/2 - \theta) = |e^1| |e_1| \sin \theta = 1 \\ e^2 \cdot e_2 &= |e^2| |e_2| \cos(\pi/2 - \theta) = |e^2| |e_2| \sin \theta = 1 \\ \therefore |e^1| &= 1/|e_1| \sin \theta, \quad |e^2| = 1/|e_2| \sin \theta \end{aligned}$$

$|e_1| = |e_2| = 1$ とすると $|e^1| = |e^2| = 1/\sin \theta > 1$ となり、双対基底の長さは異なります。また、(3.1.2) に (3.1.1) を入れると

$$\begin{aligned} (a) \quad A_1 &= A \cdot e_1 = (A^1 e_1 + A^2 e_2) \cdot e_1 = A^1 + A^2 \cos \theta \\ (b) \quad A_2 &= A \cdot e_2 = (A^1 e_1 + A^2 e_2) \cdot e_2 = A^1 \cos \theta + A^2 \end{aligned}$$

となり (a) は x 軸上の座標点、(b) は y 軸上の座標点になっています (図 3.2 参照)。

3.1.2 計量テンソル

共変基底 e_i の内積からなる

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = g_{ji} \quad (i, j = 1, 2) \longrightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

を計量とか計量テンソルといいます。定義より $g_{ii} = |e_i|^2$ なので、斜交座標軸の単位スケールは $|e_i| = \sqrt{g_{ii}}$ で決まり、軸の斜交角は $\cos \theta = g_{12}/\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}$ から決まるなど、計量は斜交座標の骨組みを決める重要な量ですね。

計量行列の行列式は $\det(g_{ij}) = (|e_1| |e_2|)^2 (1 - \cos^2 \theta) \neq 0$ となるので逆行列が存在し、それを

上付き添字の g^{ij} で表すと次式が成立します。

$$g^{ij} = e^i \cdot e^j = (g_{ij})^{-1} \longrightarrow g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.7)$$

計量を使ってベクトル成分を表すと

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = (A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_i = A^j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i$$

$$= g_{i1} A^1 + g_{i2} A^2 = g_{ij} A^j$$

$$\therefore \boxed{A_i = g_{ij} A^j, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}} \quad (3.1.8)$$

$$A^i = g^{i1} A_1 + g^{i2} A_2 = g^{ij} A_j$$

$$\therefore \boxed{A^i = g^{ij} A_j, \quad \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}}$$

となります。下付き添え字の g_{ij} あるいは上付き添え字の g^{ij} はベクトルの共変成分と反変成分を互いに結びつけます。下付き添字の g_{ij} を共変計量テンソル，上付き添字の g^{ij} を反変計量テンソルと呼んでいます。ベクトル \mathbf{A} ， \mathbf{B} の内積は計量を用いて

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2) \cdot (B^1 \mathbf{e}_1 + B^2 \mathbf{e}_2)$$

$$= A^1 B^1 g_{11} + A^1 B^2 g_{12} + A^2 B^1 g_{21} + A^2 B^2 g_{22} = g_{ij} A^i B^j \quad (3.1.9)$$

同様に

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^1 (B^1 g_{11} + B^2 g_{12}) + A^2 (B^1 g_{21} + B^2 g_{22})$$

$$= (A^1 g_{11} + A^2 g_{21}) B^1 + (A^1 g_{12} + A^2 g_{22}) B^2 = A^i B_i = A_j B^j \quad (3.1.10)$$

と表されます。

| 計 量 | < 添字の上げ下げ > | |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ | $A_i = g_{ij} A^j$ | (反変 → 共変) |
| $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$ | $B^i = g^{ij} B_j$ | (共変 → 反変) |
| $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$ | $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{ij} A^i B^j = A^i B_i = A_j B^j$ (内積) | |

補注 : いろいろな計量の定義

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad (\leftarrow \text{添字の付き方に留意})$$

$$\mathbf{e}^i = \sum_j g^{ij} \mathbf{e}_j \text{ と } \mathbf{e}^k \text{ の内積をとると } \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = \sum_j g^{ij} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k = \sum_j g^{ij} \delta_j^k \text{ より } g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$$

この他 $g_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$, $g^i_j = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$ なども定義できます。 //

3.1.3 斜交座標の座標変換

(1) ベクトルの座標変換

Σ, Σ' 座標系の基底の座標変換は次の1次変換で表されます。

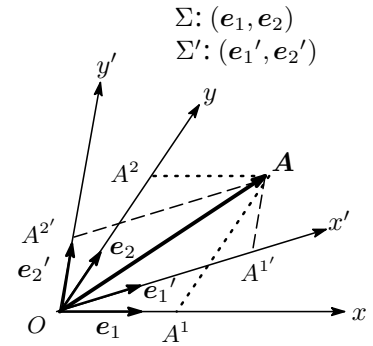
$$\begin{cases} \text{共変基底: } e_i = a^k{}_i e_{k'}, & e_{k'} = b^j{}_k e_j \\ \text{反変基底: } e^i = b^i{}_k e^{k'}, & e^{k'} = a^k{}_j e^j \end{cases} \quad (3.1.11)$$

ベクトル A 自体は座標系で変わらないので

$$A = A^i e_i = A^{j'} e_{j'} \quad (\leftarrow \text{アインシュタイン規約})$$

これに各基底の変換式を入れると反変ベクトルの変換式は

$$\begin{aligned} A &= A^i e_i = A^i (a^k{}_i e_{k'}) = A^{k'} e_{k'} \\ \therefore A^{k'} &= a^k{}_i A^i \\ A &= A^{j'} e_{j'} = A^{j'} (b^i{}_j e_i) = A^i e_i \\ \therefore A^i &= b^i{}_j A^{j'} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$



となります。各係数の間には次の関係が成立します。

$$a^k{}_i b^i{}_j = \delta^k{}_j, \quad b^i{}_j a^j{}_k = \delta^i{}_k \quad (3.1.13)$$

また、内積 $A \cdot B = A_i B^i = A_{k'} B^{k'}$ に上の変換式を入れると

$$\begin{aligned} A_i B^i &= A_{k'} B^{k'} = A_{k'} a^k{}_i B^i, \quad A_{k'} B^{k'} = A_{k'} a^k{}_i B^i = A_i B^i \\ \therefore (A_i - \sum_k A_{k'} a^k{}_i) B^i &= 0, \quad (A_{k'} - \sum_j A_j b^j{}_{k'}) B^{k'} = 0 \end{aligned}$$

となり、 B^i は任意なのでその係数は0。これから共変ベクトルの変換式が得られます。

$$A_i = a^k{}_i A_{k'}, \quad A_{k'} = b^j{}_{k'} A_j \quad (3.1.14)$$

| ベクトルの座標変換 | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| ・反変ベクトル $A^{k'} = a^k{}_i A^i$ | ・共変ベクトル $A_{k'} = b^j{}_{k'} A_j$ | ・係数の関係 $a^k{}_i b^i{}_j = \delta^k{}_j$ $b^i{}_j a^j{}_k = \delta^i{}_k$ |

【蛇足の補足：反変・共変について】

座標変換に対してベクトルと基底は異なる変換をします。反変ベクトルは元の座標の基底（共変基底）と逆に変換されるから“反変”，共変ベクトルは元の座標に基底（反変）と同様に変換されるから“共変”というわけですね。ベクトルの添字と基底の添字の付き方に注視！

$$\begin{cases} \text{反変ベクトル: } A^{i'} = a^i{}_j A^j \longleftrightarrow e_i = b^j{}_i e_{j'} \\ \text{共変ベクトル: } A_i = b^j{}_i A_j \longleftrightarrow e^i = a^i{}_j e^j \end{cases}$$

(2) テンソルの座標変換

2階テンソルについて説明します。テンソルとは何?という疑問に対しては、『テンソルとはあるベクトル x を新たなベクトル y に変換する線形関数 T ($y = Tx$) のことである』としておきます¹。この T を2階テンソルといいます。当然、3階以上の高階テンソルもあります。そのイメージとしては、例えば n 階テンソルは大きさと空間方向に関しての n 個の情報を持ったものといったところでしょうか。空間方向の情報が0個のものはスカラー、1個のものはベクトルといった調子で、スカラーは0階テンソル、ベクトルは1階テンソルです。

さて話を元に戻して、線形関数 (Linear function) とは任意のベクトル x_1, x_2 に対して次の線形条件を満たす関数のことでした。

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= Tx_1 + Tx_2 \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx \quad (\alpha: \text{スカラー}) \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

2次元で考えると、基底を T で変換した新たなベクトルは線形条件より

$$\begin{aligned} Te_i &= T^1_i e_1 + T^2_i e_2 = T^j_i e_j \\ Te^i &= T^i_1 e^1 + T^i_2 e^2 = T^i_j e^j \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

と表されますね。ベクトルと同様にテンソルにも共変成分、反変成分があり、それに加えて混合成分というのまであります。共変成分は下付き添字の T_{ij} 、反変成分は上付き添字の T^{ij} 、混合成分は上下添字の T^i_j で表します。混合・共変・反変テンソル成分は次式で定義されます。

- 混合成分

$$T^i_j = e^i \cdot Te_j \quad (3.1.17)$$

$$T_i^j = e_i \cdot Te^j \quad (3.1.18)$$

- 共変成分

$$T_{ij} = e_i \cdot Te_j \quad (3.1.19)$$

右辺を展開して

$$\begin{aligned} T_{ij} &= e_i \cdot Te_j = e_i \cdot T^k_j e_k = (e_i \cdot e_k) T^k_j = g_{ik} T^k_j \\ \therefore T_{ij} &= g_{ik} T^k_j \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

混合テンソル成分 T^k_j は上式の両辺に $(g^{\mu i})$ を掛けて

$$\begin{aligned} g^{\mu i} T_{ij} &= g^{\mu i} g_{ik} T^k_j = \delta^{\mu}_k T^k_j \\ \therefore T^k_j &= g^{ki} T_{ij} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

- 反変成分

$$T^{ij} = e^i \cdot Te^j \quad (3.1.22)$$

右辺を展開して

$$\begin{aligned} T^{ij} &= e^i \cdot T^j_k e^k = g^{ik} T^j_k \\ \therefore T^{ij} &= g^{ik} T^j_k = g^{ik} g^{j\ell} T_{\ell k} \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

¹ 詳細は「テンソル談義」のレポートを参照。

次に，テンソルの座標変換ですが，これは基底の変換式

$$\begin{aligned} e_i &= a^k_i e'_k, & e'_k &= b^j_k e_j \\ e^i &= b^i_k e'^k, & e'^k &= a^k_j e^j \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

を入れればいわけで，次のようになります。

$$\begin{aligned} \text{共変テンソル: } T_{ij}' &= e'_i \cdot T e'_j = b^k_i b^\ell_j e_k \cdot T e_\ell = b^k_i b^\ell_j T_{k\ell} \\ \therefore T'_{ij} &= b^k_i b^\ell_j T_{k\ell} \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

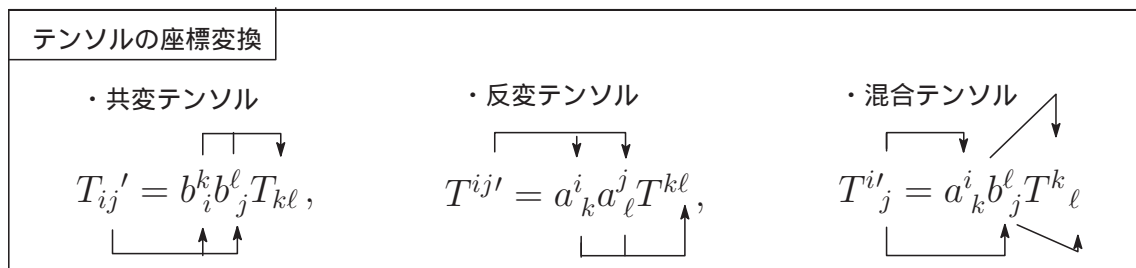
$$\begin{aligned} \text{反変テンソル: } T^{ij}' &= e'^i \cdot T e'^j = a^i_k e^k T a^j_\ell e^\ell = a^i_k a^j_\ell T^{k\ell} \\ \therefore T'^{ij} &= a^i_k a^j_\ell T^{k\ell} \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

$$\begin{aligned} \text{混合テンソル: } T^i_{j'} &= e'^i \cdot T e'_j = a^i_k e^k T b^j_\ell e_\ell = a^i_k b^j_\ell T^k_\ell \\ \therefore T'^i_{j'} &= a^i_k a^j_\ell T^{k\ell} \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

テンソルは添字が多くて目によくないですが，添字の付き方には規則があるので，高階テンソルの座標変換式もこのルールに注意すれば容易に作れる筈です（ 習うより慣れるといったところ）。例えば3階テンソルでは次のようになります。

$$T^{ijk\ell} = a^i_\ell a^j_m a^k_n T^{\ell mn}, \quad T^i_{j'k'} = a^i_\ell b^m_j b^n_k T^{\ell mn}, \quad T_{ijk}' = b^i_\ell b^m_j b^n_k T_{\ell mn}$$

| |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| テンソルの添字の上下 |
| $T_{ij} = g_{ik} T^k_j, \quad T^k_j = g^{ki} T_{ij}, \quad T^{ij} = g^{ik} T^j_k = g^{ik} g^{j\ell} T_{\ell k}, \quad T_{ij} = g_{ik} g_{j\ell} T^{k\ell}$ |



(3) 計量テンソルの座標変換

計量を計量テンソルと呼んだ理由がここで明らかになります。計量テンソルは2階テンソルとして変換します。

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= e'_i \cdot e'_j = b^k_i b^\ell_j g_{k\ell} & \dots \text{ 共変テンソル} \\ g'^{ij} &= e'^i \cdot e'^j = a^i_k a^j_\ell g^{k\ell} & \dots \text{ 反変テンソル} \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

| |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 計量の座標変換 |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>共変計量テンソル</p> $g'_{ij} = b^k_i b^\ell_j g_{k\ell}$ </div> <div style="text-align: center;"> <p>反変計量テンソル</p> $g'^{ij} = a^i_k a^j_\ell g^{k\ell}$ </div> </div> |

【補足.6】テンソル積

3次元で考えます。2つの共変ベクトル $A = (A_1, A_2, A_3), B = (B_1, B_2, B_3)$ のテンソル積は

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix} \equiv (T_{ij})$$

で定義され、これは2階共変テンソルとなります。∴ 共変ベクトル A, B の成分が座標変換で

$$A_i' = b^k_i A_k, \quad B_j' = b^\ell_j B_\ell$$

と変換されたとすると、2階共変テンソル T_{ij} の座標変換はこれらの積で表されるので

$$T_{ij}' = A_i' B_j' = b^k_i b^\ell_j A_k B_\ell = b^k_i b^\ell_j T_{k\ell} \quad (3.1.29)$$

となります。反変テンソル、混合テンソルの座標変換も同様にして求めることができ、高階テンソルへの拡張も容易ですね。また、異なるタイプのテンソル、例えば A^{ij}_k と $B_{\ell m}$ の積から次の5階混合テンソルを作ることができます。

$$T^{ij}_{k\ell m} = A^{ij}_k B_{\ell m} \quad // \quad (3.1.30)$$

3.2 一般座標変換

一般相対論では座標軸がグニャグニャまがった時空が舞台となります。互いに等速直線運動する慣性系間の変換は、既に見てきたようにローレンツ変換

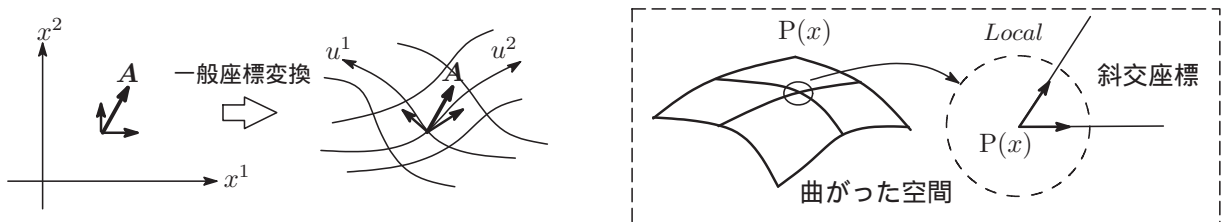
$$x^{\mu'} = a^\mu_{\nu'} x^\nu, \quad x^\mu = b^\mu_{\nu'} x^{\nu'}$$

で記述でき、変換係数 $a^\mu_{\nu'}, b^\mu_{\nu'}$ は定数でした。一方、加速度運動等、任意の運動のケースに拡張するには線形変換ではなく一般座標変換を考えなければならず²、これは一般に非線形座標変換となります。

4次元時空のある曲線座標系 x^μ から別の曲線座標系 $x^{\mu'}$ への一般座標変換を

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow x^{\mu'} : x^{\mu'} &= x^{\mu'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \\ x^{\mu'} \rightarrow x^\mu : x^\mu &= x^\mu(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

と表わします。変換後の座標の成分は元の座標の関数になっていることに注意してください。同一の世界点を異なる座標系で表しているわけです。デカルト的な正規直交座標系はこの変換により曲線座標系になり、 x^μ は4元ベクトルとしての変換は示さず物理的に意味のあることを導くことは難しいのですが、変換座標の近傍に限れば直線斜交座標系の設定は可能で、その近傍領域では線形近似が成立し、微小な2点間の距離 dx^μ は4元ベクトルとしての変換性を示すと考えられます。



² このあたりの考察は文献 [3] に詳しい。

座標の微小変化は (3.2.1) より

$$\begin{aligned}
 dx^{\mu'} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^3} dx^3 \\
 &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu = a^\mu_{\nu'}(x) dx^\nu \quad \left(a^\mu_{\nu'}(x) \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right) \\
 dx^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{0'}} dx^{0'} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{1'}} dx^{1'} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{2'}} dx^{2'} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{3'}} dx^{3'} \\
 &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'} = b^\mu_{\nu'}(x') dx^{\nu'} \quad \left(b^\mu_{\nu'}(x') \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

と表され, dx^μ や $dx^{\mu'}$ は反変ベクトルとして振る舞います。ベクトルやテンソルは座標の関数として定義されるので, このような空間はベクトル場, テンソル場として考えることになります。

注: (3.2.2) を行列で表せば次のようになります。

$$\begin{pmatrix} dx^{0'} \\ dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}, \quad J = \frac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \tag{3.2.3}$$

左辺 4 行 4 列の行列を関数行列とかヤコビ行列, その行列式をヤコビアンと呼び, 創案者 *Jacobi* の頭文字をとって通常 J という記号が使われます。なお, 一般座標変換が成立するための条件は $J \neq 0$ です。//

3.2.1 ベクトル場の変換

空間の任意の点 P において (3.2.2) と同じ変換を示す量を P 点における反変ベクトル といい, 次式で表されます。

$$\begin{aligned}
 A^{\mu'}(x') &= \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right) A^\nu(x) = a^\mu_{\nu'}(x) A^\nu(x), \\
 A^\mu(x) &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \right) A^{\nu'}(x') = b^\mu_{\nu'}(x') A^{\nu'}(x')
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

変換係数 $a^\mu_{\nu'}$, $b^\mu_{\nu'}$ の間には次の関係式が成立します。

$$a^\mu_{\rho'}(x) b^\rho_{\nu'}(x') = \delta^\mu_{\nu'}, \quad b^\mu_{\rho'}(x') a^\rho_{\nu'}(x) = \delta^\mu_{\nu'} \tag{3.2.5}$$

同様に, P 点において

$$A_{\mu'}(x') = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \right) A_\nu(x) = b^\nu_{\mu'}(x') A_\nu(x) \tag{3.2.6}$$

と変換される量を P 点における共変ベクトル といいます。そして, 反変ベクトルと共変ベクトルの内積は一般座標変換に対して不変なスカラーとなることは次のとおりです。

$$\begin{aligned}
 A^{\mu'}(x') B_{\mu'}(x') &= a^\mu_{\nu'}(x) b^\rho_{\mu'}(x') A^\nu(x) B_\rho(x) \\
 &= \delta^\rho_{\nu'} A^\nu(x) B_\rho(x) \\
 &= A^\nu(x) B_\nu(x)
 \end{aligned}$$

また，微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = a^\mu{}_{\nu'}(x') \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}, \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = b^\nu{}_{\mu'}(x') \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (3.2.7)$$

と変換され， $\partial/\partial x^\mu$ をベクトル成分とみなせば，微分演算子はベクトルとして変換されることがわかります。

3.2.2 テンソル場の変換

テンソルも同様に，P 点で (3.1.25) ~ (3.1.27) と同じ変換をするものを P 点における 2 階テンソルといいます。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{反変テンソル} : T^{\mu\nu'}(x') = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \right) \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} \right) T^{\rho\sigma}(x) = a^\mu{}_\rho(x) a^{\nu'}{}_\sigma(x) T^{\rho\sigma}(x) \\ \text{共変テンソル} : T'_{\mu\nu}(x') = \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \right) \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \right) T_{\rho\sigma}(x) = b^\rho{}_{\mu'}(x') b^\sigma{}_{\nu'}(x') T_{\rho\sigma}(x) \\ \text{混合テンソル} : T^{\mu'}{}_{\nu}(x') = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \right) \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \right) T^\rho{}_\sigma(x) = a^{\mu'}{}_\rho(x) b^\sigma{}_{\nu'}(x') T^\rho{}_\sigma(x) \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

| 一般座標変換 | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 反変ベクトル $A^{\mu'}(x') = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right) A^\nu(x)$ | 反変テンソル $T^{\mu\nu'}(x') = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \right) \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} \right) T^{\rho\sigma}(x)$ |
| 共変ベクトル $A_{\mu'}(x') = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \right) A_\nu(x)$ | 共変テンソル $T'_{\mu\nu}(x') = \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \right) \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \right) T_{\rho\sigma}(x)$ |
| | 混合テンソル $T^{\mu'}{}_{\nu}(x') = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \right) \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \right) T^\rho{}_\sigma(x)$ |

【補足.7】

p 階反変 q 階共変の一般テンソルの一般座標変換は次のように表されます。

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p'}_{j_1 j_2 \dots j_q'} = \frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial x^{i_2'}}{\partial x^{r_2}} \dots \frac{\partial x^{i_p'}}{\partial x^{r_p}} * \frac{\partial x^{s_1}}{\partial x^{j_1'}} \frac{\partial x^{s_2}}{\partial x^{j_2'}} \dots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial x^{j_q'}} T^{r_1 r_2 \dots s_1 s_2 \dots s_q} \quad (3.2.9)$$

$$(ex) \left\{ \begin{array}{l} T^{i' k \ell'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r} * \frac{\partial x^s}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{\ell'}} T^{r s t} \\ T^{i j' k \ell m'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^s} * \frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^u}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^v}{\partial x^{m'}} T^{r s t u v}, \text{ etc} \end{array} \right. \quad (3.2.10)$$

添字の付き方に留意ください。

3.3 リーマン計量

一般座標変換で ds が不変に保たれる空間をリーマン空間といい，その計量 $g_{\mu\nu}$ をリーマン計量としました。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}'(x') dx^{\mu'} dx^{\nu'} \quad (\text{添字について対称}) \quad (3.3.1)$$

リーマン計量 $g_{\mu\nu}$ は2階共変テンソルとして振る舞いますが、年のために確認しておきましょう。(3.2.2)の第2式で、 $dx^\alpha = b^\alpha_\nu(x')dx^{\nu'}$ 、 $dx^\beta = b^\beta_\nu(x')dx^{\nu'}$ として(3.3.1)の第1式に入れると

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)b^\alpha_\mu(x')b^\beta_\nu(x')dx^{\mu'}dx^{\nu'} = g_{\mu\nu}'(x')dx^{\mu'}dx^{\nu'}$$

両辺を比較すれば

$$g_{\mu\nu}'(x') = b^\alpha_\mu(x')b^\beta_\nu(x')g_{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\right)g_{\alpha\beta} \quad (3.3.2)$$

となるので、2階共変テンソルの変換則に従っていることが分かります。同様に $g^{\mu\nu}(x)$ は2階反変テンソルとして振る舞うことも分かります。

$$g^{\mu\nu'}(x') = a^\mu_\alpha(x)a^\nu_\beta(x)g^{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta}\right)g^{\alpha\beta} \quad (3.3.3)$$

反変・共変計量の間には

$$g^{\mu\lambda}(x)g_{\lambda\nu}(x) = \delta^\mu_\nu \quad (3.3.4)$$

の直交関係が成立し、また、この計量を用いて反変・共変ベクトルを相互に変換できることは(3.1.8)と同様です()。

$$A_\mu(x) = g_{\mu\nu}(x)A^\nu(x), \quad A^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x)A_\nu(x), \quad g^{\mu\lambda}(x)g_{\lambda\nu}(x) = \delta^\mu_\nu \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} \therefore A_\mu'(x') &= g_{\mu\nu}'(x')A^{\nu'}(x') \\ &= b^\alpha_\mu(x')b^\beta_\nu(x')g_{\alpha\beta}(x)a^\nu_\tau(x)A^\tau(x) \\ &= b^\alpha_\mu(x')\delta^\beta_\tau g_{\alpha\beta}(x)A^\tau(x) \\ &= b^\alpha_\mu(x')g_{\alpha\beta}(x)A^\beta(x) \\ &= b^\alpha_\mu(x')A_\alpha(x) \quad \dots \text{共変ベクトルとしての変換} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\therefore A^{\mu\nu'}(x') = g^{\mu\nu'}(x')A_{\nu'}(x') \longrightarrow a^\mu_\alpha(x)A^\alpha(x) = g^{\mu\nu'}(x')b^\beta_\nu(x')A_\beta(x)$$

$$\text{これから } a^\mu_\alpha(x)g^{\alpha\beta}(x)A_\beta(x) = g^{\mu\nu'}(x')b^\beta_\nu(x')A_\beta(x)$$

この両辺に a^ρ_β を掛けて

$$\begin{aligned} a^\rho_\beta a^\mu_\alpha(x)g^{\alpha\beta}(x)A_\beta(x) \\ &= a^\rho_\beta b^\beta_\nu A_\beta(x)g^{\mu\nu'}(x') \\ &= \delta^\rho_\nu g^{\mu\nu'}(x')A_\beta(x) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\therefore g^{\mu\nu}(x) = a^\mu_\alpha a^\nu_\beta(x)g^{\alpha\beta}(x) \quad \dots \text{反変ベクトルとしての変換}$$

$$\text{また } A^\mu(x) = g^{\mu\lambda}A_\lambda(x) = g^{\mu\lambda}(x)g_{\lambda\nu}(x)A^\nu$$

$$\therefore g^{\mu\lambda}(x)g_{\lambda\nu}(x) = \delta^\mu_\nu$$

| | | |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| リーマン計量 | $g_{\mu\nu}'(x') = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\right)g_{\alpha\beta}$ $g^{\mu\nu'}(x') = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta}\right)g^{\alpha\beta}$ | $g^{\mu\lambda}(x)g_{\lambda\nu}(x) = \delta^\mu_\nu$ |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|

3.3.1 不変体積要素

体積は線素と関係し、したがって計量と関係しますね。この間の関係を見ていきます。

局所慣性系のミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ と一般座標系のリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ は $X \rightarrow x$ の座標変換で (2.4.12) で示した関係式が成立しました。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \quad (3.3.8)$$

$g_{\mu\nu}$ の行列式を g , ヤコビ行列の行列式ヤコビアンを J とすると

$$g = \det[g_{\mu\nu}], \quad J = \det \left[\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \right] \quad (3.3.9)$$

(3.3.8) の両辺の行列式を計算すると $\det[\eta_{\mu\nu}] = -1$ なので計量の行列式の値は負となり

$$g = \det[\eta_{\mu\nu}] J^2 = (-1) \cdot J^2 = -J^2 < 0 \quad (3.3.10)$$

$$\therefore J = \sqrt{-g}$$

であることが分かります。一般に

$$dX^4 = J dx^4 = \sqrt{-g} dx^4 \quad (dX^4 = dX^0 dX^1 dX^2 dX^3, \text{等}) \quad (3.3.11)$$

となるので、 $\sqrt{-g} dx^4$ は座標変換に対して不変体積要素となることが分かりますね。

一般的にやってみましょう。 $x \rightarrow x'$ の座標変換に対して計量は次のように変換されます。

$$g_{\mu\nu}' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu'}} g_{\alpha\beta} \quad (3.3.12)$$

ここで (3.3.12) の両辺の行列式を計算すると

$$g' = J^2 g, \quad J = \det \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\nu'}} \right] \equiv \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\nu'}} \right| \quad (3.3.13)$$

が得られ (補足.7) , g の値は (3.3.10) より負であるので g を明示的に $-g$ とすれば

$$\sqrt{-g'} = J \sqrt{-g} \quad (3.3.14)$$

したがって、4次元時空の体積要素 $dx^4, dx^{4'}$ は

$$dx^4 = J dx^{4'} = \frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}} dx^{4'}, \quad \therefore \sqrt{-g} dx^4 = \sqrt{-g'} dx^{4'} \quad (3.3.15)$$

と表されます。

【補足.8】

(3.3.12) を行列表示し、その後行列式を計算します。具体的な計算の手順は次の通りです。2階共変テンソルの座標変換公式

$$\begin{cases} \text{成分表示} : A_{ij}' = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl} = Q_{ik} A_{kl} (Q^T)_{lj} = (Q \cdot A \cdot Q^T)_{ij} \\ \text{行列表示} : A' = Q A Q^T \end{cases} \quad (3.3.16)$$

を使います。肩の T は転置を意味します。この公式を (3.3.12) に適用すると

$$g_{\mu\nu}' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu'}} g_{\alpha\beta} = Q_{\mu\alpha} Q_{\nu\beta} g_{\alpha\beta}$$

$$= Q_{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} (Q^t)_{\beta\nu}, \quad \left(Q_{\mu\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu'}}, \quad Q_{\nu\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu'}} \right)$$

となりますね。Q を行列表示すると

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{0'}} \\ \frac{\partial x^0}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^0}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^0}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix} \equiv J^T, \quad Q^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{0'}} \\ \frac{\partial x^0}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^0}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^0}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix} \equiv J$$

Q^T はヤコビ行列 J で、行列 Q はヤコビの転置行列 $Q = J^T$ です。したがって、(3.3.12) は

$$g_{\mu\nu}' = J^T g_{\alpha\beta} J$$

と表わせ、両辺の行列式を計算すると

$$g' = {}^t J g J = J^2 g \quad (\because {}^t J = J) \quad //$$

3.4 一般相対性原理とテンソル方程式

ニュートン力学での物理法則はベクトル方程式で表され、等方的で様な空間における平行移動や回転といった座標変換に対して不変でした。しかし、加速度座標系に移ると見かけの力が生じるなどニュートンの運動方程式は共変でなくなります。

一般相対論は一般座標変換に対して方程式の不変性（共変）を要求するのでテンソル方程式で表されることが要請されます。いま、物理法則があるテンソル方程式

$$B_{\mu\nu} = 0 \tag{3.4.1}$$

を満たすとき、一般座標変換で $B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu}'$ と変換されたとすると

$$B_{\mu\nu}' = b^\alpha{}_\mu(x') b^\beta{}_\nu(x') B_{\alpha\beta}(x) = 0 \tag{3.4.2}$$

となり、変換後も同形の $B_{\mu\nu}' = 0$ が成立し、一般相対論の共変性という要請を満たすことが分かります。テンソル方程式や等式がある座標系で成立すれば、その方程式や等式は形を変えずにすべての座標系で成立する。いいかえると「一般座標変換によって物理法則は不変である」。これを一般共変性原理と呼んでいます。また、テンソル方程式や等式を共変形式といいます。

さて、スカラー $\phi(x)$ は座標変換 $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ に対して $\phi'(x') = \phi(x)$ と不変に保たれるので、スカラーを空間微分したものは

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \longrightarrow \frac{\partial \phi(x')}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} = b^\nu{}_{\mu'}(x') \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \tag{3.4.3}$$

と共変ベクトルとして変換します。微分演算子は座標変換で $\frac{\partial}{\partial x^\nu} \rightarrow \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}$ とベクトルとして振る舞うことは既に述べました。したがってベクトル $A_\mu(x)$ を空間微分したものはテンソルとして振る舞うと予想されます。。が、やってみるとそうはならない！微分を実行すると

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \longrightarrow \frac{\partial A_{\mu'}(x')}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} A_\rho(x) \right) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} A_\rho(x)$$

となって右辺第2項に2次の偏導関数がでてくるのでテンソルとしての変換はしない。う～ん、いきなり壁にぶつかった感じですが、方程式の共変性を満たすべく微分の定義を見直したものが次の共変微分で、これは座標軸の曲りの影響を正確に取り込んだものになっています。

3.5 共変微分

3.5.1 ベクトルの共変微分

共変ベクトル $A_\mu(x)$ の微分の定義式は，すでによくご存知のように

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_\mu(x + \Delta x) - A_\mu(x)}{\Delta x^\nu} \quad (3.5.1)$$

です。右辺の分子は2つのベクトルの微小差で，ベクトル $A_\mu(x + \Delta x)$ からベクトル $A_\mu(x)$ を元の位置から $x + \Delta x$ の位置へ平行移動させその差をとったものです (図 3.3 左参照)。

平行移動してから引き算する
 $dA_\mu(x) = A_\mu(x + \Delta x) - A_\mu(x)$

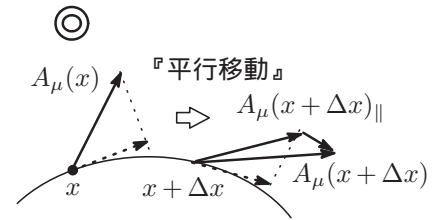
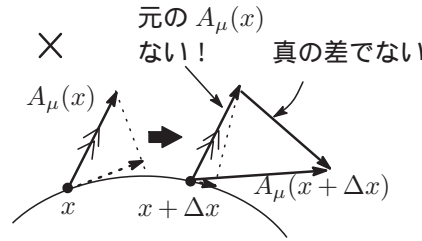
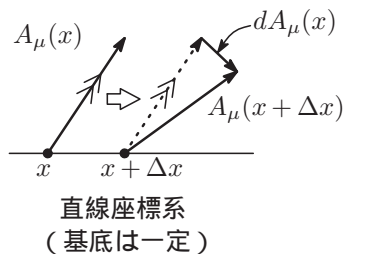


図 3.3: 共変微分

ところで，曲線座標系では自然基底が各座標点で異なるために $A_\mu(x)$ を x から $x + \Delta x$ へ (通常の) 平行移動をすると，移動先 $x + \Delta x$ での $A_\mu(x)$ の成分は元の成分と異なったものになります。したがって，ベクトルの差は真の差とはなりません。これが (3.4) の第 2 項がでてくる理由です。そこで， $A_\mu(x)$ を $x + \Delta x$ の位置まで，その成分を保持したまま「平行移動」させたものを $A_\mu(x + \Delta x)_||$ とすれば，これを用いることで正しい差が得られます。このとき「平行移動」させたベクトルと元のベクトルの長さは変わらず (3.5.2 節)，また， $A_\mu(x + \Delta x)_||$ が $x + \Delta x$ の地点で共変ベクトルとしての変換性を保持するものとします。このようにして，曲線座標を正しく反映した微分を ∇_ν と書けば，その定義式は

$$\nabla_\nu A_\mu(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_\mu(x + \Delta x) - A_\mu(x + \Delta x)_||}{\Delta x^\nu} \quad (3.5.2)$$

で与えられ，これを共変微分と呼んでいます。 $A_\mu(x + \Delta x)_||$ と $A_\mu(x)$ との差は Δx^ν に比例し，また A_μ の大きさにも比例すると考えられるので， $A_\mu(x + \Delta x)_||$ は A_μ と Δx に関して次の線形関係が成り立つと仮定します。この線形関係をアフィン接続といい，比例係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$ は接続係数 (クリストッフェル記号)³とかアフィン係数と呼ばれます。

$$A_\mu(x + \Delta x)_|| = A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\nu \quad (\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (3.5.3)$$

(3.5.3) を行列表記すれば

$$A_{||} = \begin{pmatrix} A_1(x + \Delta x)_|| \\ A_2(x + \Delta x)_|| \\ A_3(x + \Delta x)_|| \\ A_4(x + \Delta x)_|| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ A_3(x) \\ A_4(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_{1\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\nu \\ \Gamma_{2\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\nu \\ \Gamma_{3\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\nu \\ \Gamma_{4\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\nu \end{pmatrix} \quad (3.5.4)$$

となります。 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は，右辺第 2 項はベクトル A の x^ν 方向への平行移動に伴うすべての方向に

³ 曲がった空間でベクトルを平行移動したとき，その中身を変えずに移動先のベクトルとうまく繋がる (接続) ように $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ の補正をしてやるといったところでしょうか。

対するベクトル成分の変化分で，例えば ν 方向への平行移動により成分 A_1 は A_λ にといた調子で，1つの成分に対してなんと $4 \times 4 = 16$ もの補正項が付加されます。いずれにしても，これを (3.5.2) に入れると共変ベクトルの共変微分式として下記を得ます。

$$\nabla_\nu A_\mu(x) = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda(x) \equiv \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda(x) \quad (\partial/\partial x^\nu \equiv \partial_\nu) \quad (3.5.5)$$

さて，共変ベクトルの共変微分 $\nabla_\nu A_\mu(x)$ はテンソルかどうか。。。？ テンソルでないと相対論の方程式には使えないので大変重要なポイントと思います。結論を先にいえば 2 階共変テンソルです。詳しく見ていきます。

2 階共変テンソルの変換則を機械的に適用すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{\mu'}(x')}{\partial x^{\nu'}} &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\sigma} \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') A_{\lambda'}(x') &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \Gamma_{\rho\sigma}^\tau(x) A_\tau(x) \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

これが成立するか否かを見ていきます。上式から

$$\frac{\partial A_{\mu'}(x')}{\partial x^{\nu'}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') A_{\lambda'}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^\tau(x) A_\tau(x) \right) \quad (3.5.7)$$

を得ます。この式に (3.4) を入れると

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma'}(x') \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\sigma'}} A_\lambda(x) \\ = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \Gamma_{\rho\sigma}^\tau(x) A_\tau(x) \end{aligned}$$

両辺の第 1 項は同じになるので消去して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\sigma'}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma'}(x') A_\lambda(x) &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \Gamma_{\rho\sigma}^\tau(x) A_\tau(x) + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} A_\rho(x) \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} A_\lambda(x) \end{aligned}$$

なお，第 2 式は A の添字記号を左辺の記号に合わせました。 $A_\lambda(x)$ は任意なので $A_\lambda(x)$ の係数を 0 とおいて

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\sigma'}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma'}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(x) + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \quad (3.5.8)$$

を得ます。次に，両辺に $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\lambda}$ を掛けて

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\sigma'}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma'}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(x) + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\lambda} \quad (3.5.9)$$

ここで $k \rightarrow \lambda$ と書き換えると左辺は

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\sigma'}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma'}(x') \longrightarrow \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\sigma'}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma'}(x') = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x')$$

となります。(3.5.9) の右辺は添字が重ならないように適当に書き換えてやると

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\tau} \Gamma_{\rho\sigma}^\tau(x) + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\sigma}$$

したがって Γ の座標変換は次式で与えられます。なお，第 1 項はテンソルですが， Γ に無関係な

第2項が存在するので Γ 自体はテンソルではありません。

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\tau} \Gamma^{\tau\rho\sigma}(x) + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\sigma} \quad (3.5.10)$$

以上で(3.5.7)が成立することから,(3.5.5)は2階テンソルとなります(補足.10も参照)。

次に,反変ベクトルの共変微分を定義していきます。その前に次のことを要請しておきます。

- スカラーに対する共変微分は普通の微分と同じである。 $\nabla_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x)$
- 積に対する共変微分は分配法則(ライプニッツ則)が成り立つ。

$$\nabla_\mu (AB) = (\nabla_\mu A)B + A(\nabla_\mu B)$$

共変ベクトル,反変ベクトルをそれぞれ $A_\mu(x), B^\lambda(x)$ とすると,その内積 $A_\lambda(x)B^\lambda(x)$ はスカラーですから,共変微分は普通の微分ルールに従って

$$\nabla_\mu (A_\lambda(x)B^\lambda(x)) = \partial_\mu (A_\lambda(x)B^\lambda(x)) = (\partial_\mu A_\lambda(x))B^\lambda(x) + A_\lambda(x)(\partial_\mu B^\lambda(x))$$

一方,左辺は分配則より

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (A_\lambda(x)B^\lambda(x)) &= (\nabla_\mu A_\lambda(x))B^\lambda(x) + A_\lambda(x)(\nabla_\mu B^\lambda(x)) \\ &= (\partial_\mu A_\lambda(x) - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} A_\nu(x))B^\lambda(x) + A_\lambda(x)(\nabla_\mu B^\lambda(x)) \end{aligned}$$

この両式から

$$A_\lambda(x)\nabla_\mu B^\lambda(x) = A_\lambda(x)\partial_\mu B^\lambda(x) + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} A_\nu(x)B^\lambda(x) \quad (3.5.11)$$

を得ます。ここで右辺第2項の添え字を

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} A_\nu(x)B^\lambda(x) \longrightarrow \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} A_\lambda(x)B^\sigma(x) \quad (3.5.12)$$

と書き換えてやると(補注)上式は

$$A_\lambda(x) \left[\nabla_\mu B^\lambda(x) - \partial_\mu B^\lambda(x) - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} B^\sigma(x) \right] = 0$$

$A_\lambda(x)$ は任意なので,以下に示す反変ベクトルに対する共変微分の定義式を得ます。

$$\nabla_\mu B^\lambda(x) = \partial_\mu B^\lambda(x) + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} B^\sigma(x) \quad (3.5.13)$$

詳細は略しますが,反変ベクトルの共変微分は2階混合テンソルとなります⁴。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{共変ベクトルの共変微分: } \nabla_\mu A_\lambda \implies \text{2階共変テンソル: } T_{\lambda\mu} \\ \text{反変ベクトルの共変微分: } \nabla_\mu B^\lambda \implies \text{2階混合テンソル: } T^\lambda_\mu \end{array} \right.$$

平行移動によってベクトルの内積は値を変えないことは以下に示すとおりです。

$$\begin{aligned} A^\mu_{\parallel} B_{\mu\parallel} &= (A^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda \Delta x^\nu)(B_\mu + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} B_\rho \Delta x^\sigma) \\ &\simeq A^\mu B_\mu - (\Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda B_\mu - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} B_\rho A^\mu) \Delta x^\nu \end{aligned}$$

カッコ内の2項目の添え字を $\rho \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \lambda, \sigma \rightarrow \nu$ と書き換えてやるとカッコ内は0となるので

$$A^\mu_{\parallel} B_{\mu\parallel} = A^\mu B_\mu$$

つまり,2つのベクトルのなす角は平行移動によって変わらないということですね。

⁴ 「テンソル談義」のレポート参照。

共変・反変ベクトルの平行移動の差分公式を載せておきます。

$$\begin{aligned} dA_\mu &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda dx^\nu \\ dB^\lambda &= -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} B^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

なお，反変の公式は次式から導けます。内積 $A_\mu B^\mu$ はスカラーなので

$$\begin{aligned} d(A_\mu B^\mu) &= (dA_\mu)B^\mu + A_\mu(dB^\mu) = (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda dx^\nu)B^\mu + A_\mu(dB^\mu) \\ &= A_\lambda(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} B^\mu dx^\nu + dB^\lambda) = 0 \rightarrow A_\lambda \text{は任意なのでカッコ内は } 0 \end{aligned}$$

| |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 共変・反変ベクトルの共変微分 |
| $\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda$ (2階共変テンソル: $T_{\mu\nu} = \nabla_\nu A_\mu$) |
| $\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda$ (2階混合テンソル: $T^\mu_\nu = \nabla_\nu A^\mu$) |

【補足.9】共変微分を定義するのに自然基底を用いた議論はしなかったので簡潔に示しておきます。要は，基底ベクトルが場所によって変わらない直線座標系とは異なり，曲線座標系においては，基底ベクトルは場所の関数となるので，基底ベクトルの微分を考慮しなければだめだということです。詳しく知りたい方は須藤靖「一般相対論入門」を参照してください。

座標点 x における反変・共変基底をそれぞれ $e^\mu(x)$, $e_\lambda(x)$ とするとその共変微分は

$$\nabla_\nu e^\mu = -e^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \quad (3.5.15)$$

$$\nabla_\mu e_\lambda = e_\sigma \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \quad (3.5.16)$$

ちなみに (3.5.16) の $\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}$ は基底 e_λ を e_μ 方向に微分したときの e_σ 成分を表します。共変ベクトルの場合

$$\begin{aligned} \nabla_\nu A &= \nabla_\nu(A_\mu e^\mu) = (\partial_\nu A_\mu) e^\mu + A_\mu \nabla_\nu e^\mu \\ &= (\partial_\nu A_\mu) e^\mu - A_\mu e^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \\ &= (\partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda) e^\mu \quad \dots \text{添字を書き換えた} \end{aligned}$$

e^μ 成分を取り出せば

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \quad (3.5.17)$$

全く同様にして反変ベクトルの場合

$$\begin{aligned} \nabla_\mu B &= \nabla_\mu(B^\lambda e_\lambda) = (\partial_\mu B^\lambda) e_\lambda + B^\lambda \nabla_\mu e_\lambda \\ &= (\partial_\mu B^\lambda) e_\lambda + B^\lambda e_\sigma \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \\ &= (\partial_\mu B^\lambda + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} B^\sigma) e_\lambda \end{aligned}$$

成分を取り出せば

$$\nabla_\mu B^\lambda = \partial_\mu B^\lambda + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} B^\sigma \quad (3.5.18)$$

このように，共変微分とは結局第2項基底ベクトルの微分（場所によって変化）を忘れずにベクトルの成分の偏微分と足し合わせたものということです。//

【補足.10】ベクトルの単なる微分は (3.4) で示したように，右辺の第2項が零の場合に限り2階の混合テンソルとして変換しますが，一般に2階テンソルにはなりません。

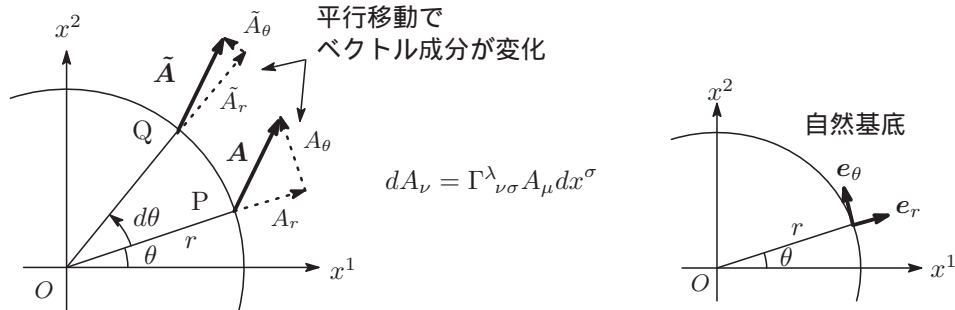
$$\frac{\partial A_\mu'(x')}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} A_\rho(x) \right) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} A_\rho(x) \quad (3.5.19)$$

これに対して，共変微分 $\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda$ を変換すると，(3.5.10)

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\tau} \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}(x) + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\sigma} \quad (3.5.20)$$

の非テンソル項が上式のそれを打ち消すので $\nabla_\nu A_\mu$ は 2 階テンソルとなるわけです。//

(例.9) 平行移動に伴うベクトル成分のズレを 2 次元極座標で調べます (直交座標系なので反変・共変の区別はない)。



P 点でのベクトルを A とし，点 Q でそれと平行に引いたベクトルを \tilde{A} とします。自然基底は位置によって変わるので，ベクトル A は P 点，Q 点で同じとはいえ成分には異なりが生じます。そのズレの大きさは， dr や $d\theta$ と A の大きさに比例すると考えられ，比例項としては $A_r dr$ ， $A_r d\theta$ ， $A_\theta dr$ ， $A_\theta d\theta$ の 4 つが考えられます。ベクトル成分のズレを Γ^j_{rk} を比例係数として上の 4 個の比例項の線形和で表せるとすると

$$\tilde{A}_i - A_i = \Gamma^j_{ik} A_j du^k \longrightarrow \begin{cases} \tilde{A}_r - A_r = \Gamma^r_{rr} A_r dr + \Gamma^r_{r\theta} A_r d\theta + \Gamma^{\theta}_{rr} A_\theta dr + \Gamma^{\theta}_{r\theta} A_\theta d\theta \\ \tilde{A}_\theta - A_\theta = \Gamma^r_{\theta r} A_r dr + \Gamma^r_{\theta\theta} A_r d\theta + \Gamma^{\theta}_{\theta r} A_\theta dr + \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} A_\theta d\theta \end{cases} \quad (3.5.21)$$

と書けます。基底と計量は

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}$$

となるので，これらを用いてクリストッフェル記号を計算すると，0 にならない成分として

$$\Gamma^h_{li} = \frac{1}{2} g^{jh} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} \right) \longrightarrow \Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r$$

が得られ，これを (3.5.21) に入れて

$$\tilde{A}_r - A_r = (1/r) A_\theta d\theta$$

$$\tilde{A}_\theta - A_\theta = -r A_r d\theta + (1/r) A_\theta dr = -A_r r d\theta$$

補注：ダミーインデックス

(3.5.12) でそんなに都合よく書き換えていいの？最初に当惑する疑問ではないでしょうか。相対論ではこのような計算が頻繁に登場します。一つの項で 2 度同じ添え字が使われるとその添え字については和をとる約束 (アインシュタインの規約) で，この添字は自由に書き換えても問題ありません。この事情を参考までに 2 次元で確認しておきます。なお，このような添字をダミーインデックスといい，そうでない添字をフリーインデックスといいます。フリーインデックスには意味があり勝手に書き換えるわけにはいきません。

(3.5.12) で具体的に和を取ると各項は次のようになります。

$$A_\lambda \nabla_\mu B^\lambda = A_1 \nabla_\mu B^1 + A_2 \nabla_\mu B^2, \quad A_\lambda \partial_\mu B^\lambda = A_1 \partial_\mu B^1 + A_2 \partial_\mu B^2$$

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} A_\nu B^\lambda = \Gamma^1_{1\mu} A_1 B^1 + \Gamma^2_{1\mu} A_2 B^1 + \Gamma^1_{2\mu} A_1 B^2 + \Gamma^2_{2\mu} A_2 B^2$$

これを (3.5.11) に入れて整理すると

$$A_1 (\nabla_\mu B^1 - \partial_\mu B^1 - \Gamma^1_{1\mu} B^1 - \Gamma^1_{2\mu} B^2) + A_2 (\nabla_\mu B^2 - \partial_\mu B^2 - \Gamma^2_{1\mu} B^1 - \Gamma^2_{2\mu} B^2)$$

$$= A_1 (\nabla_\mu B^1 - \partial_\mu B^1 - \Gamma^1_{\sigma\mu} B^\sigma) + A_2 (\nabla_\mu B^2 - \partial_\mu B^2 - \Gamma^2_{\sigma\mu} B^\sigma) = 0$$

A_1, A_2 は一次独立なので上の等式が成立する条件は各係数項が 0 になることです。これから

$$\begin{aligned} \nabla_\mu B^1 &= \partial_\mu B^1 + \Gamma^1_{\sigma\mu} B^\sigma \\ \nabla_\mu B^2 &= \partial_\mu B^2 + \Gamma^2_{\sigma\mu} B^\sigma \end{aligned} \longrightarrow \nabla_\mu B^\lambda = \partial_\mu B^\lambda + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} B^\sigma \quad //$$

3.5.2 テンソルの共変微分

テンソルの共変微分は上でやったベクトルの場合を一般化してやればいいので，例えば 2 階テンソルの共変微分は次のように定義できます。

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} T^{\mu\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} T^{\sigma\nu} \quad (3.5.22)$$

$$\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \partial_\lambda T_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} T_{\sigma\nu} \quad (3.5.23)$$

$$\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu = \partial_\lambda T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} T^{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T^\mu{}_\sigma \quad (3.5.24)$$

$$\nabla_\lambda T^\mu{}_{\alpha\beta} = \partial_\lambda T^\mu{}_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} T^{\rho\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} T^\mu{}_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\lambda} T^\mu{}_{\alpha\rho} \quad (3.5.25)$$

導出は以下のとおり（最後の式は各自挑戦！）。 A^μ, B^ν をベクトルとしてテンソル積をとると $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ となるので，共変微分の分配則を適用します。

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda T^{\mu\nu} &= \nabla_\lambda (A^\mu B^\nu) = (\nabla_\lambda A^\mu) B^\nu + A^\mu (\nabla_\lambda B^\nu) \\ &= (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^\sigma) B^\nu + A^\mu (\partial_\lambda B^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} B^\sigma) \\ &= \partial_\lambda (A^\mu B^\nu) + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^\sigma B^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} A^\mu B^\sigma \\ &= \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} T^{\mu\sigma} \\ \nabla_\lambda T_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda (A_\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A_\mu) B_\nu + A_\mu (\nabla_\lambda B_\nu) \\ &= (\partial_\lambda A_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} A_\sigma) B_\nu + A_\mu (\partial_\lambda B_\nu - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} B_\sigma) \\ &= \partial_\lambda (A_\mu B_\nu) - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} A_\sigma B_\nu - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A_\mu B_\sigma \\ &= \partial_\lambda T_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} T_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T_{\mu\sigma} \\ \nabla_\lambda T^\mu{}_\nu &= \nabla_\lambda (A^\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A^\mu) B_\nu + A^\mu (\nabla_\lambda B_\nu) \\ &= \partial_\lambda (A^\mu B_\nu) + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^\sigma B_\nu - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A^\mu B_\sigma \\ &= \partial_\lambda T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} T^{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T^\mu{}_\sigma \quad // \end{aligned}$$

テンソルの共変微分はテンソルですが，テンソルの種類（反変・共変・混合テンソル）によって階数の異なるテンソルになります。

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ 階共変テンソルの共変微分} \implies 3 \text{ 階テンソル} \\ 2 \text{ 階反変テンソルの共変微分} \implies 2 \text{ 階反変 1 階共変の混合テンソル} \\ 2 \text{ 階混合テンソルの共変微分} \implies 1 \text{ 階反変 2 階共変の混合テンソル} \end{array} \right.$$

要するに共変微分でテンソルの 共変成分の階数が1つ上がる ということですね。

共変・反変テンソルの共変微分

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} T^{\mu\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} T^{\sigma\nu}$$

$$\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \partial_\lambda T_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} T_{\sigma\nu}$$

$$\nabla_\lambda T^\mu_\nu = \partial_\lambda T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} T^{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T^\mu_\sigma$$

$$\nabla_\lambda T^\mu_{\alpha\beta} = \partial_\lambda T^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} T^{\rho\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} T^\mu_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\lambda} T^\mu_{\alpha\rho}$$

3.5.3 接続係数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ とリーマン計量 $g_{\mu\nu}$

接続係数をリーマン計量で表します。平行移動前後のベクトルの大きさは変わらないと仮定したので

$$g_{\mu\nu}(x + \Delta x) A^\mu(x + \Delta x)_{\parallel} A^\nu(x + \Delta x)_{\parallel} = g_{\mu\nu}(x) A^\mu(x) A^\nu(x) \quad (3.5.26)$$

この式をベースに展開していきます。まず前処理から

$$g_{\mu\nu}(x + \Delta x) \doteq g_{\mu\nu}(x) + \partial_k g_{\mu\nu} \Delta x^k \quad (\text{テイラー展開})$$

$$A^\mu(x + \Delta x)_{\parallel} = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\ell k} A^\ell(x) \Delta x^k$$

$$A^\nu(x + \Delta x)_{\parallel} = A^\nu(x) - \Gamma^\nu_{\ell k} A^\ell(x) \Delta x^k$$

これを上式に入れて Δx の1次の項までとれば

$$\begin{aligned} & g_{\mu\nu}(x + \Delta x) A^\mu(x + \Delta x)_{\parallel} A^\nu(x + \Delta x)_{\parallel} \\ &= (g_{\mu\nu} + \partial_k g_{\mu\nu} \Delta x^k) (A^\mu - \Gamma^\mu_{\ell k} A^\ell \Delta x^k) (A^\nu - \Gamma^\nu_{\ell k} A^\ell \Delta x^k) \\ &\doteq (g_{\mu\nu} + \partial_k g_{\mu\nu} \Delta x^k) (A^\mu A^\nu - \Gamma^\mu_{\ell k} A^\nu A^\ell \Delta x^k - \Gamma^\nu_{\ell k} A^\mu A^\ell \Delta x^k) \\ &= g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + (\partial_k g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu - g_{\mu\nu} A^\mu A^\ell \Gamma^\nu_{\ell k} - g_{\mu\nu} A^\ell A^\nu \Gamma^\mu_{\ell k}) \Delta x^k \\ &= g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu - g_{\mu\nu} (\Gamma^\mu_{\ell k} A^\ell A^\nu + \Gamma^\nu_{\ell k} A^\mu A^\ell) \Delta x^k - \partial_k g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \Delta x^k \\ &= g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \quad (3.5.26) \text{ の右辺} \end{aligned}$$

$$\therefore \partial_k g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\ell k} A^\ell A^\nu + g_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{\ell k} A^\mu A^\ell$$

ここで右辺の添え字 (ダミーインデックス) を

$$g_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\ell k} A^\nu A^\ell \rightarrow g_{\ell\nu} \Gamma^\ell_{\mu k} A^\mu A^\nu, \quad g_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{\ell k} A^\mu A^\ell \rightarrow g_{\mu\ell} \Gamma^\ell_{\nu k} A^\mu A^\nu$$

と書き換えると

$$(\partial_k g_{\mu\nu} - g_{\ell\nu} \Gamma^\ell_{\mu k} - g_{\mu\ell} \Gamma^\ell_{\nu k}) A^\mu A^\nu = 0 \quad (3.5.27)$$

A^μ は任意なのでその係数は0ということから

$$\partial_k g_{\mu\nu} = g_{\ell\nu} \Gamma^\ell_{\mu k} + g_{\mu\ell} \Gamma^\ell_{\nu k} \quad (3.5.28)$$

ここで, $\Gamma_{\nu\mu k} = g_{\nu\ell} \Gamma^\ell_{\mu k}$ と表して, 添字をサイクリックに変えていくと次式を得ます。

$$\begin{aligned} \partial_k g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\nu\mu k} + \Gamma_{\mu\nu k} \\ \partial_\nu g_{\mu k} &= \Gamma_{k\mu\nu} + \Gamma_{\mu k\nu} \\ \partial_\mu g_{k\nu} &= \Gamma_{\nu k\mu} + \Gamma_{k\nu\mu} \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

$\Gamma_{\mu\nu k} = \Gamma_{\mu k\nu}$ に注意して上の 3 式の和を取り整理すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu k} &= \frac{1}{2}(\partial_k g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu k} - \partial_\mu g_{k\nu}) \\ \therefore g_{\mu\ell} \Gamma_{\nu k}^\ell &= \frac{1}{2}(\partial_k g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu k} - \partial_\mu g_{k\nu})\end{aligned}\quad (3.5.30)$$

この両辺に $g^{\rho\mu}$ を掛け $g^{\rho\mu} g_{\mu\ell} = \delta_\ell^\rho$ を利用すれば接続係数とリーマン計量は次式で与えられます。

$$\Gamma_{\nu k}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (\partial_k g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu k} - \partial_\mu g_{\nu k}) \quad (3.5.31)$$

次に，行列式で表したリーマン計量 $g = \det[g_{ij}]$ と接続係数の関係を見ていきます。行列式 $g = \det[g_{ij}]$ の i 行 j 列を除いた小行列式（余因子）を G_{ij} ，逆行列を g^{ij} とすると

$$\begin{aligned}g^{ij} &= \frac{G_{ji}}{g} \longrightarrow G_{ij} = g g^{ij} \quad (\because G_{ij} = G_{ji}) \\ g &= \sum_j g_{ij} G_{ij} \quad (\text{余因子展開})\end{aligned}\quad (3.5.32)$$

が成立します。ここで計算の要領をつかむために 3 行 3 列の行列式で考えてみます。 g_{ij} の行列式を

$$\det[g_{ij}] = g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

とにおいて g を x_k で微分すると，行列式の微分公式より

$$\partial_k g = \begin{vmatrix} \partial_k g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \partial_k g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \partial_k g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & \partial_k g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & \partial_k g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & \partial_k g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \partial_k g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & \partial_k g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & \partial_k g_{33} \end{vmatrix} \quad (3.5.33)$$

右辺を余因子展開すると

$$\begin{aligned}\partial_k g &= (\partial_k g_{11} G^{11} + \partial_k g_{21} G^{21} + \partial_k g_{31} G^{31}) + (\partial_k g_{12} G^{12} + \partial_k g_{22} G^{22} + \partial_k g_{32} G^{32}) \\ &\quad + (\partial_k g_{13} G^{13} + \partial_k g_{23} G^{23} + \partial_k g_{33} G^{33}) \\ &= (\partial_k g_{11} G^{11} + \partial_k g_{12} G^{12} + \partial_k g_{13} G^{13}) + (\partial_k g_{21} G^{21} + \partial_k g_{22} G^{22} + \partial_k g_{23} G^{23}) \\ &\quad + (\partial_k g_{31} G^{31} + \partial_k g_{32} G^{32} + \partial_k g_{33} G^{33}) \\ &= (\partial_k g_{ij}) G^{ij} = g g^{ij} \partial_k g_{ij}\end{aligned}$$

となり，これから

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (\ln(-g)) = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \quad \because g < 0 \right) \quad (3.5.34)$$

が得られ，この式は 4 次元に拡張してもそのまま成立します。

次に (3.5.31) の接続係数の上下添え字の縮約をとると

$$(\text{縮約}) \quad \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{i\ell} (\partial_i g_{\ell k} + \partial_k g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ki}) \quad (3.5.35)$$

となります。添え字の i, ℓ はダミーインデックスで，かつ g_{ij} が対称であることから右辺第 1 項と第 3 項は相殺することが分かりますが，具体的な計算で確認しておきましょう。要領をつかむため再び 3 次元で考えます。右辺第 1 項と第 3 項を具体的に和の形で書くと次のようになり， g_{ij} の対称性からこの 2 項の差は以下に示すように相殺し合って 0 になることが分かります。

$$\begin{aligned}
g^{i\ell}\partial_i g_{\ell k} &= \overline{g^{11}}\partial_1 g_{1k} + \overline{g^{21}}\partial_2 g_{1k} + \overline{g^{31}}\partial_3 g_{1k} \\
&+ \overline{g^{12}}\partial_1 g_{2k} + \overline{g^{22}}\partial_2 g_{2k} + \overline{g^{32}}\partial_3 g_{2k} \\
&+ \overline{g^{13}}\partial_1 g_{3k} + \overline{g^{23}}\partial_2 g_{3k} + \overline{g^{33}}\partial_3 g_{3k} \\
g^{i\ell}\partial_\ell g_{ki} &= \overline{g^{11}}\partial_1 g_{k1} + \overline{g^{21}}\partial_2 g_{k2} + \overline{g^{31}}\partial_3 g_{k3} \\
&+ \overline{g^{12}}\partial_2 g_{k1} + \overline{g^{22}}\partial_2 g_{k2} + \overline{g^{32}}\partial_2 g_{k3} \\
&+ \overline{g^{13}}\partial_3 g_{k1} + \overline{g^{23}}\partial_3 g_{k2} + \overline{g^{33}}\partial_3 g_{k3}
\end{aligned}
\quad \therefore g^{i\ell}\partial_i g_{\ell k} - g^{i\ell}\partial_\ell g_{ki} = 0$$

この結果を踏まえて4次元に拡張すれば

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{i\ell}\partial_k g_{\ell i} \quad (3.5.36)$$

となるので, (3.5.35) は次のようになります。

$$\boxed{\text{(縮約)} \quad \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{i\ell}\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\ln\sqrt{|g|})} \quad (3.5.37)$$

補注：縮約　テンソルの成分の上付き添字と下付き添字を同じにしてそれらについて和をとる操作。縮約によって添字が2つ消えるのでテンソルの階数は2階下がります。いま, 3階テンソル T^i_{jk} を $i=j$ で縮約して $S_k = T^i_{ik}$, $i=k$ で縮約して $U_j = T^i_{ji}$ とすると, S_k, U_k は座標変換で共変ベクトル(1階テンソル)として振る舞います。

$$\text{縮約} \begin{cases} i=j: T^i_{ik'} = S_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}} T^r_{st} = \delta^s_r \frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}} T^r_{st} = \frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}} T^s_{st} = \frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}} S_t \\ i=k: T^i_{ji'} = U_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{i'}} T^r_{st} = \delta^t_r \frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}} T^r_{st} = \frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}} T^r_{sr} = \frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}} U_s \end{cases}$$

なお, テンソル積と縮約の組み合わせたのをテンソルの内積といい, 次のように定義されます。

$$\text{テンソル積: } T^{ij}_{klm} = A^{ij}_k B_{\ell m} \rightarrow (j=m \text{で縮約}) \rightarrow \text{内積: } T^i_{kl} = T^{ij}_{klj} = A^{ij}_k B_{\ell j}$$

3.5.4 リーマン計量の共変微分 (計量条件)

リーマン計量は2階テンソルなのでその共変微分は(3.5.28)より

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\sigma\nu} = 0 \quad (3.5.38)$$

また, $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$ の両辺の共変微分をとると

$$(\nabla_\gamma g_{\mu\nu})g^{\nu\lambda} + g_{\mu\nu}(\nabla_\gamma g^{\nu\lambda}) = g_{\mu\nu}(\nabla_\gamma g^{\nu\lambda}) = \nabla_\gamma \delta_\mu^\lambda = 0 \quad (3.5.39)$$

$g^{\nu\lambda}$ を掛けて

$$g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu}(\nabla_\gamma g^{\nu\lambda}) = \nabla_\gamma g^{\mu\mu} = 0 \quad (3.5.40)$$

添字を書き換えて

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0 \quad (3.5.41)$$

以上のことから $g_{\mu\nu}$ の共変微分は常に0, リーマン計量は共変微分に対して定数になる⁵ことが分かります。これを計量に関する計量条件と呼んでいます。

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0} \quad (3.5.42)$$

⁵ 共変微分の演算とテンソルの添え字を上げ下げする計量テンソルとは可換。この可換性は4.2節でアインシュタインテンソルを導くときに利用します。(ex) $\nabla_k T^i_j = \nabla_k(g^{i\ell}T_{\ell j}) = g^{i\ell}\nabla_k T_{\ell j}$

計量条件は共変微分の際の平行移動でベクトル大きさは変わらないことを表しています⁶。

(例.10) 球面座標の接続係数を求める：リーマン計量 g_{ij} とその逆行列 g^{ij} は (2.3.9) より

$$\begin{cases} g_{11} = 1 & g_{22} = r^2 & g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \\ g^{11} = 1 & g^{22} = 1/r^2 & g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (\text{非対角成分は } 0) \quad (3.5.43)$$

これを (3.5.31) に入れて計算するわけですが，計量の非対角成分は 0 なので， g^{11}, g^{22}, g^{33} の項を計算すればよいわけです。0 でない接続係数 Γ^{ρ}_{jk} は次の通りです。

$$\begin{cases} \Gamma^{1}_{22} = \Gamma^r_{\theta\theta} = -r & \Gamma^{1}_{33} = \Gamma^r_{\phi\phi} = -r \sin^2 \theta \\ \Gamma^{2}_{21} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \Gamma^{\theta}_{r\theta} = 1/r & \Gamma^{2}_{33} = \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^{3}_{31} = \Gamma^{\phi}_{\phi r} = \Gamma^{\phi}_{r\phi} = 1/r & \Gamma^{3}_{32} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \cos \theta / \sin \theta \end{cases} \quad (3.5.44)$$

| $g^{\rho i}$ | ρ | i | j | k | $\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}$ | Calc | Γ^{ρ}_{jk} |
|--------------------------------|--------|-----|-----|-----|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|
| $g^{11} = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}$ | $\partial_1 g_{11} = 0$ | 0 |
| | | | 1 | 2 | $\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{12}$ | $\partial_2 g_{11} = 0$ | 0 |
| | | | 1 | 3 | $\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{13} - \partial_1 g_{13}$ | $\partial_3 g_{11} = 0$ | 0 |
| | | | 2 | 2 | $\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}$ | $\partial_1 g_{22} = 2r$ | $-r$ |
| | | | 3 | 3 | $\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}$ | $\partial_1 g_{33} = 2r \sin^2 \theta$ | $-r \sin^2 \theta$ |
| $g^{22} = 1/r^2$ | 2 | 2 | 2 | 1 | $\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{21}$ | $\partial_1 g_{22} = 2r$ | $1/r$ |
| | | | 2 | 2 | $\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}$ | $\partial_2 g_{22} = 0$ | 0 |
| | | | 2 | 3 | $\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{23}$ | $\partial_3 g_{22} = 0$ | 0 |
| | | | 1 | 1 | $\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}$ | $\partial_2 g_{11} = 0$ | 0 |
| | | | 3 | 3 | $\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}$ | $\partial_2 g_{33} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta$ | $-\sin \theta \cos \theta$ |
| $g^{33} = 1/r^2 \sin^2 \theta$ | 3 | 3 | 3 | 1 | $\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{31}$ | $\partial_1 g_{33} = 2r \sin^2 \theta$ | $1/r$ |
| | | | 3 | 2 | $\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{32}$ | $\partial_2 g_{33} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta$ | $\cos \theta / \sin \theta$ |
| | | | 3 | 3 | $\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}$ | $\partial_3 g_{33} = 0$ | 0 |
| | | | 1 | 1 | $\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}$ | $\partial_3 g_{11} = 0$ | 0 |
| | | | 2 | 2 | $\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}$ | $\partial_3 g_{22} = 0$ | 0 |

3.5.5 局所慣性系

平坦な空間ではすべての点で $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = 0$ ，また計量はミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ で与えられました。一方，曲がった空間では座標系をどのように選んでも全空間にわたって $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = 0$ とすることはできません，が，無限小領域内で $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ となる座標系を設定することはできます。等価原理はこのような局所慣性系（直線座標系）の存在を指摘したものと いえます。

以下に，局所慣性系の存在を確かめていきます。次の（非線形）座標変換を考えます。

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \frac{1}{2} G^{\mu}_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} \quad (\text{ただし } G^{\mu}_{\alpha\beta} = G^{\mu}_{\beta\alpha}) \quad (3.5.45)$$

上式を逆変換すると

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= x^{\mu'} - \frac{1}{2} G^{\mu}_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} \\ &= x^{\mu'} - \frac{1}{2} G^{\mu}_{\alpha\beta} \left(x^{\alpha'} - \frac{1}{2} G^{\alpha}_{pq} x^p x^q \right) \left(x^{\beta'} - \frac{1}{2} G^{\beta}_{rs} x^r x^s \right) \\ &= x^{\mu'} - \frac{1}{2} G^{\mu}_{\alpha\beta} x^{\alpha'} x^{\beta'} + \dots \end{aligned} \quad (3.5.46)$$

⁶ (3.5.27) 参照。

となります。ここで x の 3 次以上の項は省略しました（この後すぐ分かりますが計算の過程で消える）。座標変換した新たな座標系で $\Gamma'(x') = 0$ になれば、その座標系は重力が消えた慣性系だと判断できるわけですね。ということで、最初にクリストッフェル記号 Γ' の中にでてくる各種の偏微分を計算し、原点 $x^\mu = x^{\mu'} = 0$ における値を求めておきます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(x^{\mu'} - \frac{1}{2} G^\mu_{\ell m} x^{\ell'} x^{m'} \right) \Big|_{x=0} = \delta^\mu_\rho - \frac{1}{2} (G^\mu_{\rho m} x^{m'} + G^\mu_{\ell \rho} x^{\ell'}) \Big|_{x=0} \\ &= \delta^\mu_\rho \\ \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\alpha'}} \Big|_{x=0} &= \delta^\lambda_\alpha \end{aligned} \tag{3.5.47}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \Big|_{x'=0} &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\beta'}} \right) \Big|_{x'=0} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\delta^\gamma_\beta - \frac{1}{2} (G^\mu_{\beta q} x^q + G^\mu_{p \beta} x^p) \right) \Big|_{x'=0} \\ &= -G^\mu_{\alpha \beta} \end{aligned}$$

次にこれらの結果をクリストッフェル記号の座標変換公式

$$\Gamma^\mu_{\alpha \beta'} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho_{\lambda \sigma} + \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \tag{3.5.48}$$

に入れると

$$\Gamma^\mu_{\alpha \beta'} \Big|_{x=0} = \delta^\lambda_\alpha \delta^\sigma_\beta \delta^\mu_\rho \Gamma^\rho_{\lambda \rho} \Big|_{x=0} + \delta^\mu_\gamma (-G^\gamma_{\alpha \beta}) = \Gamma^\mu_{\alpha \beta} \Big|_{x=0} - G^\mu_{\alpha \beta}$$

となります。さて、変換後の Γ が 0 になる条件は

$$\Gamma^\mu_{\alpha \beta'}(x') \Big|_{x'=0} = \Gamma^\mu_{\alpha \beta} \Big|_{x=0} - G^\mu_{\alpha \beta} = 0 \tag{3.5.49}$$

より変換係数を

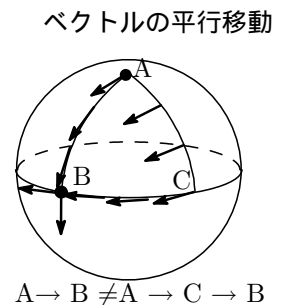
$$G^\mu_{\alpha \beta} = \Gamma^\mu_{\alpha \beta} \Big|_{x=0}$$

とすればよいこととなります。原点とした x' は任意なので曲がった空間のいたるところに局所慣性系を設定できます。等価原理を幾何学的に表現すると、任意の時空点で局所的に慣性系を設定することができるということにあたりますね。ただし、留意しておくべきことは接続係数 Γ を 0 にすることはできますが、その微分を 0 にすることはできません。というのは、その点からわずかに離れば空間は曲がっているのですから。

3.6 曲率テンソル

空間の曲がり具合をどのように捉えるか。例えば 2 つのベクトルをそれぞれ異なる経路を通ってある 1 点にまで平行移動させたとき、空間が平面であれば 2 つのベクトルは完全に重なり合いますが、空間が曲がっていればズレが生じるということに注目します。

例として球面上のベクトルの平行移動を考えます。仮に、A 点を北極点とし、B、C は赤道上の点とします。A 点のベクトルを子午線に沿って B 点まで平行移動したベクトルと、A 点から C 点を経由して B 点に到達したベクトルは、右図から分かるように異なる

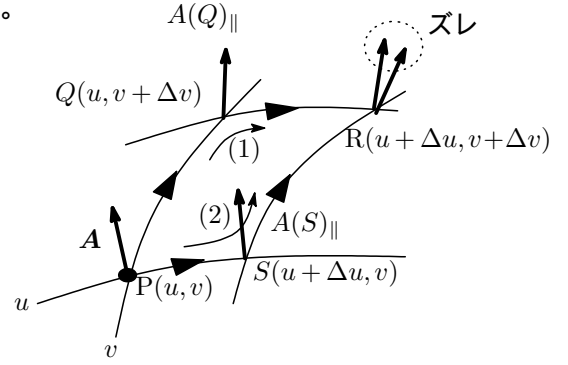


ベクトルになりますね。A, B, C が同一平面上にあれば移動の経路にかかわらず同じベクトルになるので、このことは球面が曲がっていることが原因です。

これを一般的にいえば、曲面上のある1点から別の1点にベクトルを平行移動したとき、その経路により異なるベクトルになる、その違いを比較することで曲面の曲がり具合の指標を引き出すことができるというわけです（補足.11）。いま、反変ベクトルで考えると、曲がった空間でのベクトルの平行移動は

$$A^\mu(x + \Delta x)_{\parallel} = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(x)A^\lambda(x)\Delta x^\nu$$

で与えられました。これを使って4次元時空の曲がり具合をあたえる曲率を求めていきます。



3.6.1 リーマンの曲率テンソル

4次元時空の微小な領域に異なる4点P, Q, S, Rを考え、点Pでのベクトル $A^\mu(P)$ を図に示すような(1)の経路と(2)の経路に沿ってRまで平行移動したとします。経路(1)でv方向にQ点まで平行移動させたときのベクトルは

$$A^\mu(Q)_{\parallel} = A^\mu(P) - \Gamma^\mu_{\lambda\beta}(P)A^\lambda(P)\Delta v^\beta \quad (3.6.1)$$

と表せます。続いてQ点からu方向にR点まで平行移動させると

$$\begin{aligned} A^\mu(R)_{\parallel}^{(1)} &= A^\mu(Q)_{\parallel} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(Q)A^\lambda(Q)_{\parallel}\Delta u^\gamma \\ &= A^\mu(P) - \Gamma^\mu_{\lambda\beta}(P)A^\lambda(P)\Delta v^\beta - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(Q)A^\lambda(Q)_{\parallel}\Delta u^\gamma \\ &= A^\mu(P) - \Gamma^\mu_{\lambda\beta}(P)A^\lambda(P)\Delta v^\beta - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(Q)\left(A^\lambda(P) - \Gamma^\lambda_{\delta\beta}(P)A^\delta(P)\Delta v^\beta\right)\Delta u^\gamma \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

となりますね。ただし、

$$\Delta v^\beta \equiv \frac{\partial x^\beta}{\partial v}\Delta v, \quad \Delta u^\gamma \equiv \frac{\partial x^\gamma}{\partial u}\Delta u$$

です。ここで(3.6.2)の右辺第3項の $\Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(Q)$ をテイラー展開し、その1次の項までとると

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(Q) &= \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(u, v + \Delta v) \doteq \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(u, v) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(u, v)}{\partial v}\Delta v \\ &= \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(u, v) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(u, v)}{\partial x^\beta}\Delta v^\beta = \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(P) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}(P)}{\partial x^\beta}\Delta v^\beta \end{aligned}$$

となるので、これを(3.6.2)に入れて整理するとP点では

$$\begin{aligned} A^\mu(R)_{\parallel}^{(1)} &\doteq A^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\beta}A^\lambda\Delta v^\beta - \left(\Gamma^\mu_{\lambda\gamma} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta}\Delta v^\beta\right)\left(A^\lambda - \Gamma^\lambda_{\delta\beta}A^\delta\Delta v^\beta\right)\Delta u^\gamma \\ &= A^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\beta}A^\lambda(\Delta u^\beta + \Delta v^\beta) - \left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)A^\alpha\Delta v^\beta\Delta u^\gamma \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

となります。同様に経路(2)では(3.6.4)で $u \leftrightarrow v$ の置き換えをすれば良いので

$$A^\mu(R)_{\parallel}^{(2)} \doteq A^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\beta}A^\lambda(\Delta v^\beta + \Delta u^\beta) - \left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)A^\alpha\Delta u^\gamma\Delta v^\beta \quad (3.6.4)$$

ここで右辺第3項の添字 β と γ はダミーの添字なので入れ替えています。

(1), (2) の2つの経路を通して点 R に到達した2つのベクトルの差を $\Delta A^\mu(R)_{\parallel}$ とすれば

$$\begin{aligned}\Delta A^\mu(R)_{\parallel} &= A^\mu(R)_{\parallel}^{(1)} - A^\mu(R)_{\parallel}^{(2)} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} \right) A^\alpha \Delta u^\gamma \Delta v^\beta \\ &= R^\mu_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha \Delta u^\gamma \Delta v^\beta\end{aligned}$$

となります。ここで

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \quad (3.6.5)$$

です (添字を書き換えています)。右辺の項を並べ替えて

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - (\partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) \quad (3.6.6)$$

と書くと、右辺カッコ内の項は前の2項の β と γ の添字を交換したものと同じ形となるので、次のようにも表すことができます。

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - (\beta\gamma \text{を交換した項}) \quad (3.6.7)$$

$R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ は計量テンソルの2階微分を含むので空間の曲がり具合の情報を持ち、空間の曲率に対応するものです。 $R^\mu_{\alpha\gamma\beta}$ のことをリーマンの曲率テンソル、あるいは単にリーマンテンソルといい、4階の混合テンソルです。なお、これがテンソルであることは上の表式からはすぐにはわかりませんが、このことは補足.9を参照ください。なお、 $\Gamma = 0$ となる局所慣性系でもリーマンテンソルは0にはならないことに留意して下さい。近傍は平坦に見えても少し遠ざかると曲がっているということですね。

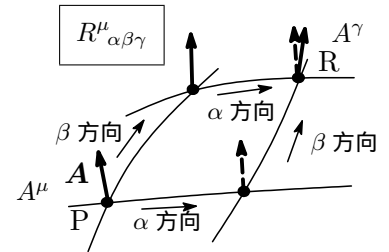
(蛇足) : $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ の記号 : 上付き添え字 μ は対象とする任意のベクトルの成分を表し、下付き添え字の α, β は2つの経路 $\beta \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \beta, \gamma$ は結果としてのベクトル成分を表すと理解しておけば分かりやすい!?

【補足.11】共変微分の積の差からリーマンテンソルを導く

共変微分の積はベクトルを或る方向に微小距離平行移動し、続いて別の方向に微小距離平行移動したときの成分変化を表します。

共変微分は一般に非可換なので、その差がリーマンテンソルで与えられるということですね。このことを使って共変微分の積の差からリーマンテンソルを導きます。

曲面上の座標を u, v とし、 u 方向の共変微分 ∇_j と v 方向の共変微分 ∇_k の順序を変えて、ベクトル A_i に作用させることを考えます。なお、 $\nabla_j A_i$ は共変テンソルなので $T_{ji} \equiv \nabla_j A_i$ とおいて公式 (3.5.23) が使えます。



(1) u 方向に平行移動し、続いて v 方向に平行移動

$$\nabla_k (\nabla_j A_i) = \partial_k (\partial_j A_i) - \Gamma^r_{ik} (\partial_j A_r) - \Gamma^r_{jk} (\partial_r A_i) \quad (3.6.8)$$

ここで A_i の共変微分公式 $\nabla_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma^s_{ij} A_s$ を上式に入れて展開すると

$$\begin{aligned}\nabla_k (\nabla_j A_i) &= \partial_k (\partial_j A_i - \Gamma^s_{ij} A_s) - \Gamma^r_{ik} (\partial_j A_r - \Gamma^s_{rj} A_s) - \Gamma^r_{jk} (\partial_r A_i - \Gamma^s_{ir} A_s) \\ &= \partial_k \partial_j A_i - \partial_k \Gamma^s_{ij} A_s - \Gamma^s_{ij} \partial_k A_s - \Gamma^r_{ik} \partial_j A_r \\ &\quad + \Gamma^r_{ik} \Gamma^s_{rj} A_s - \Gamma^r_{jk} \partial_r A_i + \Gamma^r_{jk} \Gamma^s_{ir} A_s\end{aligned} \quad (3.6.9)$$

(2) v 方向に平行移動し, 続いて u 方向に平行移動: j と k を入れ替えればよいので

$$\begin{aligned}\nabla_j(\nabla_k A_i) &= \partial_j \partial_k A_i - \partial_j \Gamma_{ik}^s A_s - \Gamma_{ik}^s \partial_j A_s - \Gamma_{ij}^r \partial_k A_r \\ &\quad + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s A_s - \Gamma_{kj}^r \partial_r A_i + \Gamma_{kj}^r \Gamma_{ir}^s A_s\end{aligned}\quad (3.6.10)$$

(3) ベクトルの差: 最後に両式を引き算します。この際, ダミーインデックスに注意すれば (3.6.9) の第 1, 第 3, 第 4, 第 6, 第 7 項と (3.6.10) の第 1, 第 4, 第 3, 第 6, 第 7 項とはそれぞれ相殺することがわかるので

$$\begin{aligned}\nabla_k(\nabla_j A_i) - \nabla_j(\nabla_k A_i) &= (\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k) A_i \\ &= (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_k \Gamma_{ij}^s + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s - \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s) A_s \\ &= R_{ijk}^s A_s\end{aligned}$$

$$\boxed{(\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k) A_i = R_{ijk}^s A_s} \quad (3.6.11)$$

同様にして反変ベクトルの場合は

$$\boxed{(\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k) A^i = R^i_{skj} A^s} \quad (3.6.12)$$

なお, 左辺がテンソルなので右辺 R^i_{skj} はテンソルの商定理⁷より 4 階のテンソルとなります。混合テンソルの場合の公式を証明抜き⁸で上げておきます。

$$\boxed{(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k) T^i_j = R^i_{sk\ell} T^s_j - R^s_{jkl} T^i_s} \quad (3.6.13)$$

ビアンキの恒等式

リーマンテンソルはいろいろな対称性をもっていますが, 詳しいことは後で触れることにして (3.6.7) から分かるように後の 2 つの添字 (β, γ) に対して反対称であることが分かります。

$$\boxed{R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = -R^\mu_{\alpha\gamma\beta}} \quad (3.6.14)$$

また, (3.6.7) で 3 つの添字をサイクリックに置換したものの和をとると 0 になります。

$$\begin{aligned}R^\mu_{\alpha\beta\gamma} &= \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \\ R^\mu_{\beta\gamma\alpha} &= \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\beta\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\gamma} + \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} - \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \\ R^\mu_{\gamma\alpha\beta} &= \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\gamma\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} \Gamma^\lambda_{\gamma\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\gamma\alpha}\end{aligned}$$

$$\boxed{R^\mu_{\alpha\beta\gamma} + R^\mu_{\beta\gamma\alpha} + R^\mu_{\gamma\alpha\beta} = 0} \quad (3.6.15)$$

これはビアンキの第 1 恒等式と呼ばれます。また, 次の恒等式

$$\boxed{\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R^\mu_{\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R^\mu_{\nu\gamma\alpha} = 0} \quad (3.6.16)$$

をビアンキの第 2 恒等式といい, 一般相対論にとって大変重要な役割を果たします。大変大事な恒等式なのでその証明をしておきたいのですが, 真正面から取り組むと圧倒的な労力が必要 (!?) となるのでやめておき, 次の A), B) 2 つの証明方法の紹介にとどめておくことにします。

A) 局所慣性系を活用: テンソル式なのである点において $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) = 0$ となる座標系 (局所慣性

⁷ 任意の反変ベクトル A^k に対して $R^\mu_{\alpha\beta\gamma} A^k$ がテンソル成分であるとき, $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ はテンソルである。

⁸ 気になる方は混合テンソルの共変微分公式を使えば手間がかかりますができますので挑戦してみてください。

系) で成立すれば，一般座標系でも成立する。

B) ヤコビの恒等式を活用：混合テンソルの共変微分の公式 (3.6.13) を使います。

A) $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ の共変微分をとり $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) = 0$ を使う。局所慣性系では共変微分は普通の微分になる ($\nabla_\nu \rightarrow \partial_\nu$) ことに留意すれば

$$\begin{aligned} R^\mu_{\alpha\beta\gamma} &= \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \\ \nabla_\nu R^\mu_{\alpha\beta\gamma} &= \partial_\nu (\partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) \\ &= \partial_\nu (\partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta}) + (\partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\beta}) \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} (\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}) + \dots \\ &= \partial_\nu (\partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta}) + 0 \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

添え字を適当に書き換えて和をとると

$$\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R^\mu_{\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R^\mu_{\nu\gamma\alpha} = 0 \quad // \quad (3.6.18)$$

B) 次のヤコビの恒等式⁹に A^α を乗じ，公式 (3.6.12) と (3.6.13) を使って展開していく。

$$\text{ヤコビ恒等式： } ([\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]]) = 0 \quad (3.6.19)$$

まず，(3.6.12) より

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} A^\beta$$

$\nabla_j A^i$ は 2 階の混合テンソルなので，(3.6.13) で $T^i_j = \nabla_j A^i$ とおいて次の各項を計算していくと

$$\begin{aligned} [\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] A^\alpha &= \nabla_\lambda ([\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha) - [\nabla_\mu, \nabla_\nu] (\nabla_\lambda A^\alpha) \\ &= \nabla_\lambda (R^\alpha_{\beta\mu\nu} A^\beta) - [\nabla_\mu, \nabla_\nu] (\nabla_\lambda A^\alpha) \\ &= \nabla_\lambda (R^\alpha_{\beta\mu\nu} A^\beta) - R^\alpha_{\beta\mu\nu} \nabla_\lambda A^\beta + R^\beta_{\lambda\mu\nu} A^\alpha_\beta \\ &= (\nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu}) A^\beta + R^\alpha_{\beta\mu\nu} (\nabla_\lambda A^\beta) - R^\alpha_{\beta\mu\nu} (\nabla_\lambda A^\beta) + R^\beta_{\lambda\mu\nu} (\nabla_\beta A^\alpha) \\ &= (\nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu}) A^\beta + R^\beta_{\lambda\mu\nu} (\nabla_\beta A^\alpha) \\ &= (\nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu}) A^\beta + R^\rho_{\lambda\mu\nu} (\nabla_\rho A^\alpha) \\ [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]] A^\alpha &= (\nabla_\mu R^\alpha_{\rho\nu\lambda}) A^\beta + R^\rho_{\mu\nu\lambda} (\nabla_\rho A^\alpha) \\ [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]] A^\alpha &= (\nabla_\nu R^\alpha_{\beta\lambda\mu}) A^\beta + R^\rho_{\nu\lambda\mu} (\nabla_\rho A^\alpha) \end{aligned}$$

ヤコビの恒等式 (3.6.19) に A^α を掛け，上で得られた結果を代入すると

$$\begin{aligned} &([\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]]) A^\alpha \\ &= (\nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\lambda\mu}) A^\beta \\ &\quad + (R^\rho_{\lambda\mu\nu} + R^\rho_{\mu\nu\lambda} + R^\rho_{\nu\lambda\mu}) (\nabla_\rho A^\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

ここで $A^\beta, \nabla_\rho A^\alpha$ は任意であるので上の恒等式が成り立つ条件は

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\lambda\mu} &= 0 \\ R^\rho_{\lambda\mu\nu} + R^\rho_{\mu\nu\lambda} + R^\rho_{\nu\lambda\mu} &= 0 \end{aligned} \quad //$$

さて，リーマンテンソルの対称性ですが，計量テンソルを使って添字をすべて下付きにした共変曲率テンソルに書き換え（(3.1.20) 参照）てやるとその対称性が見やすくなります。

$$\boxed{R_{\mu\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\mu\sigma} R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}} \quad (3.6.21)$$

⁹ 素直に反交換関係の括弧を展開すれば成立することが分かります

リーマンテンソルの対称性をまとめておきます。

$$(\mu, \alpha) \text{ について反対称 : } R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma} \quad (3.6.22)$$

$$(\beta, \gamma) \text{ について反対称 : } R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\mu\alpha\gamma\beta} \quad (3.6.23)$$

$$(\mu\alpha, \beta\gamma) \text{ について対称 : } R_{\mu\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\mu\alpha} \quad (3.6.24)$$

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ の循環和は } 0 : R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (3.6.25)$$

(3.6.24), (3.6.23) より $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ の前方 2 つの添え字 μ, α が同じ場合, あるいは後方 2 つの添え字 β, γ が同じ場合は 0 になることが分かります。

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \alpha \\ \beta = \gamma \end{array} \right\} \longrightarrow R_{\mu\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (3.6.26)$$

リーマンテンソルは ${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$ 個の成分を持ちますが, 添字の入れ替えに対していろいろな対称性があるので, 独立な成分は 20 個 になります (補足.12)。この独立成分がすべて 0 のときは時空は平坦であることを意味します (逆も同じ)。

【補足.12】リーマンテンソルの独立成分の数について

いろいろなやり方があるようですが, ここでは内山龍雄「相対性理論」(岩波全書)に載っている方法を紹介します。 $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ は $4^4 = 256$ 成分ありますが, 独立成分は添え字の対称性

$$\mu\alpha \cdot \beta\gamma = -\alpha\mu \cdot \beta\gamma \quad (\mu, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4) \quad (3.6.27)$$

$$\mu\alpha \cdot \beta\gamma = -\mu\alpha \cdot \gamma\beta \quad (3.6.28)$$

$$\mu\alpha \cdot \beta\gamma = \beta\gamma \cdot \mu\alpha \quad (3.6.29)$$

から, $(\mu\alpha), (\beta\gamma)$ の対は反対称なので $(\mu\alpha), (\beta\gamma)$ のそれぞれについては ${}_4C_2 = 6$ 通りあり, 以下に示すように独立成分の数はこの組み合わせを相乗した $({}_4C_2)^2 = 36$ 成分となります。なお, $256 - 36 = 220$ 個の成分は添え字の対称性を使い適当に置換することで全て独立成分のいずれかに一致します。

$(\mu\alpha) \times (\beta\gamma) = \{(12), (13), (14), (34), (42), (23)\} \times \{(12), (13), (14), (34), (42), (23)\} = 36$ 成分
いま簡単のために $(\mu\alpha)$ を A , $(\beta\gamma)$ を B と書くと $R_{\mu\alpha\beta\gamma} = R_{AB}$ と書けるので, (3.6.29) は

$$R_{AB} = R_{BA}$$

と表せます。そうすると 36 成分の組み合わせは, 縦の並びを $A \equiv \mu\alpha$, 横の並びを $B \equiv \beta\gamma$ とする次の 6 行 6 列の対称行列で表すことができます。

| | 12 | 13 | 14 | 34 | 42 | 23 |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|
| 12 | 1212 | 1213 | 1214 | <u>1234</u> | 1242 | 1223 |
| 13 | 1312 | 1313 | 1314 | 1334 | <u>1342</u> | 1323 |
| 14 | 1412 | 1413 | 1414 | 1434 | 1442 | <u>1423</u> |
| 34 | 3412 | 3413 | 3414 | 3434 | 3442 | 3423 |
| 42 | 4212 | 4213 | 4214 | 4234 | 4242 | 4223 |
| 23 | 2312 | 2313 | 2314 | 2334 | 2342 | 2323 |

対称行列の独立成分は対角で上下ブロックに分けた斜線以外の要素の数になるので, その合計は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6(6+1)}{2} = 21 \text{ 個}$$

また, (3.6.25) の

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (3.6.30)$$

という関係式を使うと, 4 個の添え字の内どれか 2 個が等しければ対称性のために $0=0$ という無内容な関係式に, 例えば以下の通り

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha\alpha\gamma} + R_{\mu\alpha\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\alpha} &= R_{\mu\alpha\alpha\gamma} - R_{\mu\alpha\alpha\gamma} + 0 = 0 \\ R_{\alpha\alpha\beta\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma\alpha} + R_{\alpha\gamma\alpha\beta} &= 0 + R_{\alpha\beta\gamma\alpha} - R_{\alpha\beta\gamma\alpha} = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ということで, 結局 (3.6.30) はただ一個の

$$R_{1234} + R_{1342} + R_{1423} = 0 \quad (3.6.31)$$

という関係式を与えるにすぎません。この関係のために最終的に $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ の独立な成分は 1 個減って 20 成分となります。

ついでに n 次元 ($\mu, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n$) も同様に考えていくと, 成分の数は n^4 個ですがこの内独立な成分の数は $(nC_2)^2$ 個。これを縦, 横 $nC_2 = n(n-1)/2$ 個の要素からなる対称行列で表せば独立な成分の数は

$$1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n^2-2+2)}{8} \quad (3.6.32)$$

次に 4 個の添え字の内どれか 2 個が等しければ対称性のために $0=0$ という無内容な関係式になり, 結局意味のある関係式の数は

$$nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \quad (3.6.33)$$

したがって, $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ の独立な成分数は (3.6.32) から (3.6.33) を引いた

$$\frac{n(n-1)(n^2-2+2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

となります。 $n=2$ の 2 次元では 1 成分, $n=3$ の 3 次元では 6 成分です。 //

リッチテンソルとスカラー曲率

リーマンテンソル (3.6.5) で $\mu=\beta$ として縮約すると階数が 2 つ下がった 2 階テンソル

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} \longrightarrow R_{\alpha\gamma} \equiv R^\mu_{\alpha\mu\gamma} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\mu} + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \quad (3.6.34)$$

が得られます。これをリッチテンソルと呼んでいます。リッチテンソルは

$$R_{\alpha\gamma} = R_{\gamma\alpha} \quad (3.6.35)$$

の対称性 (補足.12) があるので, 独立成分の数は ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$ 個になります。この数はリーマンテンソルの半分なので空間の曲がり具合を大まかに表すものと考えられます。

$R_{\alpha\gamma}$ に $g^{\alpha\gamma}$ を掛けて α と γ について縮約すると次のスカラーが得られ, これをスカラー曲率といます。

$$R = g^{\alpha\gamma} R^\mu_{\alpha\mu\gamma} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\gamma} \equiv R^\gamma_\gamma \quad (3.6.36)$$

スカラー曲率はリッチテンソルのトレースになり, 座標変換によらない不変量です。リッチテンソルもスカラー曲率も後で登場するアインシュタイン方程式で大活躍します。

【補足.12】リッチテンソルの対称性

リッチテンソルの対称性について確認しておきます。公式 (3.6.21) を使います。

$$\begin{aligned}
 \text{公式 (1)} \quad R_{\mu\alpha\beta\gamma} &= g_{\mu\sigma} R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}, \quad (2) \quad R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = R_{\alpha\beta} \\
 R_{\alpha\beta} &= g^{mn} R_{n\alpha m\beta} = g^{mn} R_{m\beta n\alpha} = g^{mn} g_{mk} R^k_{\beta n\alpha} \\
 &= \delta^n_k R^k_{\beta n\alpha} = R^n_{\beta n\alpha} = R_{\beta\alpha} \\
 \therefore R_{\alpha\beta} &= R_{\beta\alpha} \quad //
 \end{aligned} \tag{3.6.37}$$

有用な公式を挙げておきます。

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\beta} &= g^{mn} R_{n\alpha m\beta} = g^{mn} R_{m\beta n\alpha} = g^{nm} R_{m\beta n\alpha} \\
 g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} &= R, \quad g^{\alpha\beta} R_{\lambda\beta} = R^{\alpha}_{\lambda}, \quad g^{\alpha\beta} R^{\sigma}_{\alpha\lambda\beta} = R^{\sigma}_{\lambda}
 \end{aligned} \tag{3.6.38}$$

また，公式 (1) の両辺に $g^{\lambda\mu}$ を掛けると

$$\begin{aligned}
 g^{\lambda\mu} R_{\mu\alpha\beta\gamma} &= g^{\lambda\mu} g_{\mu\sigma} R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = \delta^{\lambda}_{\sigma} R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} \\
 \therefore \quad &\boxed{R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = g^{\lambda\mu} R_{\mu\alpha\beta\gamma}}
 \end{aligned} \tag{3.6.39}$$

(例.11) 球面座標のリーマンテンソルを求める。

球面上の座標は (θ, ϕ) で決まり，0 でないクリストッフェル記号は

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta$$

2次元球面のリーマンテンソルの独立成分は1個ですね。 $R^{\theta}_{\phi\theta\phi}, R^{\phi}_{\theta\phi\theta}$ を計算すると

$$\begin{aligned}
 R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \partial_{\theta}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} - \partial_{\phi}\Gamma^{\theta}_{\phi\theta} + \Gamma^{\theta}_{\lambda\theta}\Gamma^{\lambda}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\lambda\phi}\Gamma^{\lambda}_{\phi\theta} \\
 &= -\cos 2\theta + 0 + (\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} + \Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}) - (\Gamma^{\theta}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}_{\phi\theta} + \Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}) \\
 &= -\cos 2\theta + \sin\theta \cos\theta \cot\theta = \sin^2\theta \\
 R^{\phi}_{\theta\phi\theta} &= \partial_{\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} - \partial_{\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} + \Gamma^{\phi}_{\lambda\phi}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta} - \Gamma^{\phi}_{\lambda\theta}\Gamma^{\lambda}_{\theta\phi} = \frac{1}{\sin^2\theta} - \cot^2\theta = 1
 \end{aligned}$$

リッチテンソルは

$$\begin{aligned}
 R_{\theta\theta} &= R^{\mu}_{\theta\mu\theta} = R^{\theta}_{\theta\theta\theta} + R^{\phi}_{\theta\phi\theta} = 1 \\
 R_{\theta\phi} &= R^{\mu}_{\theta\mu\phi} = R^{\theta}_{\theta\theta\phi} + R^{\phi}_{\theta\phi\phi} = 0 \quad \longrightarrow (R_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \\
 R_{\phi\phi} &= R^{\mu}_{\phi\mu\phi} = R^{\theta}_{\phi\theta\phi} + R^{\phi}_{\phi\phi\phi} = \sin^2\theta
 \end{aligned}$$

計量テンソルは

$$g^{ij} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

したがって，スカラー曲率は

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\theta\phi} R_{\theta\phi} + g^{\phi\theta} R_{\phi\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{2}{r^2}$$

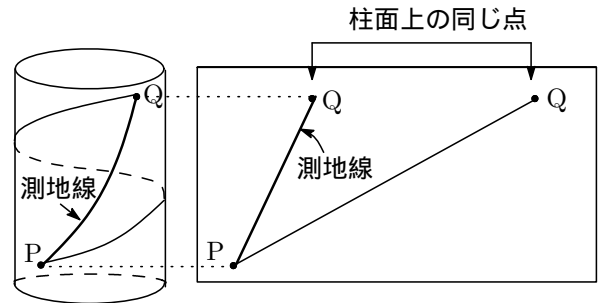
半径 r の球面の平均曲率は $1/r$ ，ガウス曲率は $1/r^2$ ですからスカラー曲率はガウス曲率の2倍になっています。

第4章 重力場の方程式

4.1 測地線方程式

一般に任意の曲面上で2点を結ぶ最短コースというものは必ず存在し、それはただ一つということが知られています。それを測地線と呼んでいます。

平面では直線は2点間を結ぶ最短コースという性質をもちます。曲面上でこの直線に相当するものが測地線です。例えば柱面上の2点P, Qを結ぶ曲線は無数に描けますが、その中の1本が測地線で、柱面を平面に展開するとその様子がよく分かります。球面の場合は球の中心を通る平面で切った切り口に現れる円(大円：赤道や子午線)が測地線となります¹。



時空の2点P, Qを結ぶ最短距離の道筋が測地線となります。ところで曲がった空間の線素(の2乗)は一般座標変換不変量で(3.3.1)で与えられました。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (4.1.1)$$

いま空間上の任意の2点P, Qを結ぶ曲線の長さが最短となる経路の方程式を求めていきます。曲線をパラメータλを使って $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ と表すと、最短経路は

$$I = \int_P^Q ds = \int_P^Q \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (4.1.2)$$

の積分が極値をとる経路となります。この経路は解析力学等でお馴染みの変分原理を使って求められます。求める測地線は

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \quad \dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda, \quad \dot{x}^\nu = dx^\nu/d\lambda \quad (4.1.3)$$

とにおいて、オイラー・ラグランジュ方程式(EL方程式)を満たすものとなります。

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \quad (4.1.4)$$

さて、(4.1.1)より

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \\ \frac{ds}{d\lambda} &= \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ \dot{x}^\mu &= \frac{dx^\mu}{ds} \frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \\ \dot{x}^\nu &= \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

¹ 北極と南極を結ぶ子午線は無数に取れるという例外は不問とします ^^;。

この関係式を使って (4.1.1) の各項を計算すると $g_{\mu\nu,\alpha} \equiv \partial g_{\mu\nu} / \partial \dot{x}^\alpha$ と略記表記すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \left[g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \right] = \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} (2g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu) \\ &= \frac{g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = \frac{g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \end{aligned}$$

したがって EL 方程式は微分を λ から s に変えて

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \frac{ds}{d\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \left\{ \frac{d}{ds} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right\} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 0 \\ \therefore \frac{d}{ds} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \longrightarrow g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

この式に $g^{\sigma\alpha}$ を掛けると

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + g^{\sigma\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (4.1.8)$$

第2項は最後の部分が添え字 μ と ν について対称であることを考えると

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \longrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \right) \quad (4.1.9)$$

と置き換えられるので (4.1.8) は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\ \therefore \boxed{\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

となります。これが求める最短経路の方程式で測地線の方程式と呼ばれます。既に重力場の中の粒子の運動を表す方程式として 2.4 節で登場しましたね。

蛇足：相対論の計算はテンソルの脚に足を絡め捕られたりして、慣れるまで苦労しますね !!

(4.1.6) の微分計算で

$$g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 2g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu$$

としましたが、エッ!? と感じられた方もおられるのでは。。。と老婆心ながら補足しておきます。疑問は手間でも具体的に和の形に戻して微分を実行すると納得・解消しますね。4次元は面倒なので2次元でやってみると

$$\begin{aligned} g_{11} \left(\frac{\partial \dot{x}^1}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^1 + \dot{x}^1 \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) + g_{12} \left(\frac{\partial \dot{x}^1}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^2 + \dot{x}^1 \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) + g_{21} \left(\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^1 + \dot{x}^2 \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) + g_{22} \left(\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^2 + \dot{x}^2 \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \\ \stackrel{\alpha=2}{=} 2(g_{12} \dot{x}^1 + g_{22} \dot{x}^2) = 2g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \end{aligned}$$

となりますね。尚、 $\alpha \rightarrow 1$ の場合は $2g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu$ となります。//

4.2 アインシュタインの重力場の方程式

重力場はニュートンの重力理論では (2.1.5) で示したポアソン方程式

$$\nabla^2\Phi = \Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2: \text{万有引力定数}) \quad (4.2.1)$$

で表され、質量密度 ρ が源となって重力ポテンシャル Φ を決定することを表明していました。

いよいよ、一般相対性理論において (4.2.1) に対応する重力場の方程式を見つけていかなければなりません。まず、その手がかりとして、重力が弱い場合には Φ と $g_{\mu\nu}$ の間の

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \quad (4.2.2)$$

の關係に注目します。(4.2.1) の左辺は Φ の 2 階微分係数であるので、求める方程式は $g_{\mu\nu}$ の 2 階の微分係数を含むと予想されます。 $g_{\mu\nu}$ の独立成分数は 10 個なので、これらを決定する方程式としては 10 個の成分をもつテンソル方程式でなければなりません。質量密度 ρ は、質量とエネルギーの等価性よりエネルギー密度となります。これは無数の粒子からなる連続流体で近似したときの、ある地点で流体と同じ速度で運動する慣性系から見たときのエネルギー密度²で、 $g_{\mu\nu}$ が 2 階対称テンソルであることに対応させて 2 階対称テンソルであることが期待されます。アインシュタインは等価原理の着想以来約 10 年の歳月の中でいろいろな試行錯誤、紆余曲折を経て 1915 年に重力場を決定する方程式として 10 元連立非線形偏微分方程式 (宇宙項は除く)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (4.2.3)$$

を得たと言われています³。これをアインシュタイン方程式と呼んでいます。 $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル、 R はリッチ曲率で、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれる 2 階対称テンソルです。

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (4.2.4)$$

をアインシュタインテンソルといい、リッチテンソルの対称性から分かるように対称テンソルです。 $G_{\mu\nu}$ は $T_{\mu\nu}$ に比例し、比例定数 κ をアインシュタインの重力定数といいます。 κ は理論からは決まらないので、4.2.2 節でニュートンの重力理論との整合性から求めていきます。

物質が存在しない場所では $T_{\mu\nu}(x) = 0$ で、その場所では

$$R_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (4.2.5)$$

となります。もっとも、リッチテンソルが 0 であるからといって時空が平坦であることにはなりません。時空が平坦であるための必要十分条件はリーマンテンソルの 20 個の成分が全て 0 ということで、リッチテンソルの 10 個の成分が全て 0 といっても時空が平坦であるとは言えません。

4.2.1 エネルギー・運動量テンソル

非相対論的流体力学で運動量保存則から運動量流速密度テンソル密度が導出されますが、これを 4 次元化したものをエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ として採用します。

² 長さはローレン収縮されるので、座標変換で不変な固有密度といったものです。

³ 学生時代からの盟友・数学者グロスマンの絶大な協力があっていわれています。アインシュタインはアインシュタインテンソルを見つけるのに 3 年もの月日を費やしたらしいです (吉田伸夫「思考の飛躍」)。アインシュタインの思考プロセスをフォローするのは当方の遥かに及ぶところではないので天下り的な説明となります。

非相対論的流体力学での完全流体は連続の式（質量保存則）とオイラーの方程式が成立します。

$$\begin{aligned} \text{連続の式: } \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \text{オイラーの式: } \quad & \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla P \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

詳細は略しますが，運動量流速密度テンソルはこれらの式から導出されます⁴。\$P\$ をいま考えている領域 \$V\$ の外側からの流体の圧力とし，体積力である外力が作用しないとすると運動量保存則は

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) = 0 \quad (4.2.7)$$

と表されます。ここで $\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial P}{\partial x_k}$ とおいて上式を書き換えると

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial J_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (4.2.8)$$

となり，\$J_{ik}\$ は運動量流速密度テンソルと呼ばれる 2 階対称テンソルです。全成分表示すれば

$$J_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik} P = \begin{pmatrix} \rho v_x^2 + P & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x + P & \rho v_y^2 + P & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x + P & \rho v_z v_y & \rho v_z^2 + P \end{pmatrix} \quad (4.2.9)$$

となります。\$J_{ik}\$ は \$i\$ 方向の運動量の \$k\$ 方向への単位面積当たりのフラックス（流束）を表します。（4.2.9）の右辺第 1 項は流体内に固定した領域 \$V\$ の運動量の時間変化で，\$J_{ik}\$ の発散と運動量の時間変化がバランスしているというのが運動量保存則ということになります。

さて，4 次元のエネルギー・運動量テンソルは一般に次式で定義されます。

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + P) \frac{u^\mu u^\nu}{c} + P g^{\mu\nu} \quad (4.2.10)$$

\$\rho c^2\$ と \$P\$ は先ほどいった慣性系でのエネルギー密度と圧力，\$u^\mu = dx^\mu/d\tau\$ は 4 元速度です。簡単化のために非相対論的近似をすると \$g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu}\$，\$P \ll \rho c^2\$，\$u^\mu \simeq (c, v^i)\$ が成り立つ（\$\gamma = 1\$）ので，テンソル成分は

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\rho c^2 + P) + P g^{00} \doteq \rho c^2 \\ T^{01} &= (\rho c^2 + P) \frac{v_x}{c} + P g^{01} \doteq \rho c v_x \\ &\vdots \\ T^{11} &= (\rho c^2 + P) \frac{v_x v_x}{c} + P g^{11} \doteq \rho v_x v_x + P, \text{ etc} \end{aligned}$$

と近似でき，全成分表示すると

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho c v_x & \rho v_x^2 + P & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho c v_y & \rho v_x v_y & \rho v_y^2 + P & \rho v_y v_z \\ \rho c v_z & \rho v_x v_z & \rho v_y v_z & \rho v_z^2 + P \end{pmatrix} \quad (4.2.11)$$

を得ます。この空間成分は上述の運動量流速テンソル密度 \$J_{ik}\$ と一致します。ここで \$T^{\mu\nu}\$ の次元をチェックしておきます（物理量の把握には次元解析が有効）。密度，速度，圧力の次元はそれぞれ \$[\rho] = [M][L]^{-3}\$，\$[v] = LT^{-1}\$，\$[P] = ML^{-1}T^{-2}\$ ですから \$T^{\mu\nu}\$ の次元は

$$[T^{\mu\nu}] = ML^{-1}T^{-2} \quad (4.2.12)$$

⁴ 詳しくは「流体力学講話・つまみ喰い（その 2）」を参照

$$\begin{array}{cc}
\text{エネルギー密度} & \text{エネルギーフラックス} \\
& \left(\begin{array}{cccc}
T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\
T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\
T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\
T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33}
\end{array} \right) \\
& \begin{array}{cc}
\text{運動量密度} & \text{運動量フラックス}
\end{array}
\end{array}$$

となり、確かにこれは運動量流速密度（エネルギー密度）の次元⁵をもちますね。 $T^{\mu\nu}$ の各成分の物理的な意味は次の通りです。

- T^{00} （時間・時間成分）: エネルギー密度
- T^{0j} （時間・空間成分）: x^j 軸に垂直な単位面積を通る単位時間当たりのエネルギーフラックスの第 j 成分
- T^{i0} （空間・空間成分）: 運動量密度の第 i 成分
- T^{ij} （空間成分）: x^j 軸に垂直な単位面積を通る単位時間当たりの運動量フラックスの第 i 成分。

1 行目のエネルギー成分 $T^{\mu 0}$ の共変微分（慣性系にいたので偏微分で OK）をとってやると

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu} T^{\mu 0} &= \nabla_0 T^{00} + \nabla_x T^{x0} + \nabla_y T^{y0} + \nabla_z T^{z0} \\
&= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho c v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho c v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho c v_z) \\
&= c \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

となり、連続の式より エネルギー保存則 が成立していることが分かります。次に、2 から 4 行目の運動量密度と運動量フラックス成分 $T^{\mu\nu}$ を共変微分すると

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu} T^{\mu x} &= \nabla_0 T^{0x} + \nabla_x T^{xx} + \nabla_y T^{xy} + \nabla_z T^{xz} \\
&= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c v_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_x v_k) + \frac{\partial}{\partial x} P = 0
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu} T^{\mu y} &= \nabla_0 T^{0y} + \nabla_x T^{yx} + \nabla_y T^{yy} + \nabla_z T^{yz} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_y v_k) + \frac{\partial}{\partial y} P = 0, \text{ etc}
\end{aligned}$$

となり、運動量保存則 が成立しています。以上のことからアインシュタイン方程式 (4.2.3) の右辺に現れるエネルギー・運動量テンソルはエネルギー・運動量保存則を満たします。

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 \tag{4.2.15}$$

したがってアインシュタイン方程式 (4.2.3) の左辺も

$$\nabla_{\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \tag{4.2.16}$$

を満たさなければなりませんね。次にこのことを確認していきます。

⁵ 運動量流速密度の単位は Pa で次元は $ML^{-1}T^{-2}$ 。

ビアンキの第2恒等式 (3.6.16) で $\mu = \beta$ として縮約すると

$$\nabla_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\mu} + \nabla_\alpha R^\mu{}_{\nu\mu\gamma} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} = -\nabla_\gamma R_{\nu\alpha} + \nabla_\alpha R_{\nu\gamma} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} = 0$$

これに $g^{\gamma\nu}$ を掛けます。このとき、計量テンソルは共変微分に対して定数として振る舞うので ∇ の内側にもってこることができ、公式 (3.6.38) に留意すると

$$\nabla_\gamma(g^{\gamma\nu}R_{\nu\alpha}) - \nabla_\alpha(g^{\gamma\nu}R_{\nu\gamma}) - \nabla_\mu(g^{\gamma\nu}R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha}) = \nabla_\gamma R^\gamma{}_\alpha - \nabla_\alpha R + \nabla_\mu R^\mu{}_\alpha = 0$$

となります。第1項と第3項の添え字の表記を γ で合わせ、第2項は $\nabla_\gamma(\delta^\gamma{}_\alpha)$ と書けるので、全体を整理すると

$$\nabla_\gamma \left(R^\gamma{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\gamma{}_\alpha R \right) = 0 \quad (4.2.17)$$

が得られます。添え字を下付きにするには2階混合テンソル $G^\beta{}_\alpha$ を

$$G^\beta{}_\alpha = R^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\beta{}_\alpha R$$

とにおいて両辺に $g_{\gamma\beta}$ を掛けると

$$G_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} G^\beta{}_\alpha = g_{\gamma\beta} \left(R^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\beta{}_\alpha R \right) = R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2} g_{\gamma\alpha} R \quad (4.2.18)$$

となりますね。これで (4.2.16) が確認できました。

4.2.2 アインシュタインの重力定数を求める

先程保留にしていたアインシュタインの重力定数 κ を求めていきます。この定数は理論から決まらないことは既に述べました。そこで、弱い重力場ではニュートンの重力理論が成立するとして、一般相対論からの結果が一致するように κ を決めていくわけです。

弱い重力場ではリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ よりからわずかにズレたものと考えられるので、「2.4 弱い重力場での運動方程」のところでやったように

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}(x)| \ll 1 \quad (4.2.19)$$

と線形近似します。アインシュタイン方程式 (4.2.3) の両辺に $g^{\mu\nu}$ を掛けて整理すると

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= -\kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ R - 2R &= -\kappa T \quad (\because g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R, g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\mu = 4, g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T) \\ \therefore R &= \kappa T \end{aligned}$$

が得られます。これからアインシュタイン方程式は

$$\boxed{R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)} \quad (4.2.20)$$

と表せますが、まだ κ は具体化していません。いま、重力源として単一の静止している物体を考えているので、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の成分は

$$T^{00} \simeq \rho c^2, \quad \text{それ以外の成分は } T^{\mu\nu} \simeq 0$$

これを共変テンソルに変換するには共変計量 $g_{\mu\nu}$ を2回掛ければいので

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} \simeq \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} \longrightarrow T_{00} \simeq \eta_{00} \eta_{00} T^{00} = \rho c^2 \quad (4.2.21)$$

したがって、(4.2.20)の右辺カッコ内は

$$T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \simeq T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}(\eta^{00}T_{00}) = \frac{1}{2}T_{00} \simeq \frac{1}{2}\rho c^2 \quad (4.2.22)$$

となります。リッチテンソルの R_{00} は

$$R_{00} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^\mu_{\lambda 0} \Gamma^\lambda_{0\mu} \quad (4.2.23)$$

で、いま計量は時間に依存しないことから右辺第2項の時間微分は0、また、第3項と第4項は計量の1階微分の2次式で、十分小さくなるので落とすことができます。(2.4.27)より

$$\Gamma^\mu_{00} \simeq -\frac{1}{2}\partial_\mu h_{00}$$

となるので、リッチテンソルの00成分は

$$R_{00} \simeq -\partial_\mu \Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\Delta h_{00} \quad \left(\Delta \equiv \sum_{\mu=1}^3 \partial_\mu^2 \right) \quad (4.2.24)$$

と求められます。以上のことから

$$R_{00} = -\kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) \simeq -\frac{1}{2}\kappa \rho c^2 = \frac{1}{2}\Delta h_{00} \quad (4.2.25)$$

$$\therefore \Delta h_{00} \simeq -\kappa \rho c^2$$

が得られます。計量テンソルの h_{00} 成分とニュートンの重力ポテンシャル Φ は(2.4.29)で示したように $h_{00} = -(2/c^2)\Phi$ の関係があるので(4.2.25)より

$$\Delta \Phi \simeq \frac{1}{2}\kappa \rho c^4 \quad (4.2.26)$$

また、(4.2.1)より

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (4.2.27)$$

なので、

$$\kappa = 8\pi G/c^4 \quad (4.2.28)$$

とおけば(4.2.26)は(4.2.27)を満たします。これで κ が決まりました。アインシュタイン方程式は

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4.2.29)$$

となります。

余禄 ちょっと息抜きまでに。。

細谷暁夫「時空の力学」(岩波書店、2003)には、アインシュタインが重力方程式を見つけるまでの試行錯誤が簡潔に書かれています。天才アインシュタインといえども苦闘の連続だったのですね。少し長いですがそこから引用してみましょう。

『アインシュタインは1914年にプランクの招きでベルリンに移る。そのときに研究計画として重力場の方程式を求めると、プランクに語ったという。

ポアソンの方程式にあたるものを、一般相対性原理を満たすように書くためには、両辺が2階テンソルであることを見抜く必要がある。実際、質量密度は、エネルギー密度と相対論的に読みかえて、2階のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の00成分 T^{00} である。推定としては

$$\Delta g^{00} = 8\pi G T^{00}$$

を成分 $\mu\nu$ すべてに拡張したもの

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

であるはずだ。左辺の $G^{\mu\nu}$ を決めるために妥当と思われる 3 つの要請を置いてみよう。

- (1) 一般相対性原理から $G^{\mu\nu}$ は 2 階テンソルである。
- (2) エネルギー運動量の保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ を自動的に満たす。 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ を恒等的に満たす。
- (3) 弱い静的な重力の場合にポアソン方程式を再現する。

3 番目は定数 G の物理的な定義を与えるものと見なすべきなので、本質的には上の 2 つが重要である。証明は長いので省略するが、要請 (1) と (2) を満たす $G^{\mu\nu}$ は、定数倍を除いてリッチテンソルと計量テンソルの組み合わせ

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$$

に限ることを示すことができる。まとめるとアインシュタイン方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

左辺の組み合わせで、保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ がビアンキの恒等式によって保証される事が分かる。(中略)

アインシュタインが重力場の方程式として正しい表式にたどり着くには 1 週間の激しい試行錯誤があったことは有名である。1915 年の 11 月 11 日までは $R_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}$ と書き、18 日にはこれにもとづいて、彗星の近日点移動が 100 年間で 43.03 秒であることを得ている。近日点移動に関しては、近似的にシュヴァルツシルド解が得られればよいので右辺は関係なく、答えは一致する。しかし、ニュートン極限は 2 倍間違える。アインシュタインは当時ビアンキの恒等式には気付いていなかったらしく、保存則を課して方程式の形を決定していたらしい。25 日に正しい表式に到達した。物質のないところでは、 $T_{\mu\nu} = 0$ でアインシュタイン方程式は $R_{\mu\nu} = 0$ となる。この球対称解がシュヴァルツシルド解である。』 //

4.3 シュヴァルツシルドの解

いよいよアインシュタイン方程式の解を見つけていきます。ここではアインシュタイン方程式の厳密解の一つであるシュヴァルツシルドの解を見ていきます。余談ですが、若いころ神童と呼ばれたドイツの天体物理学者シュヴァルツシルド (Karl Schwarzschild : 1873 - 1916) は早い時期から一般相対論に注目していた一人で、自ら志願した第 1 次世界大戦の従軍中、一般相対性理論が公表された直後の 1915 年にアインシュタイン方程式の静的・球対称な厳密解を発見しています。アインシュタインは自ら提案した方程式が例え球対称性を仮定しても厳密に解けるとは考えてもいなかったらしく、シュヴァルツシルドから送られてきた論文を見て非常に驚き「厳密な解がこれほど簡単な形に表されるとは思ってもいませんでした」と彼に返信したといわれています。シュヴァルツシルドは従軍中に罹患した病のため、厳密解を発見した翌年、42 歳の若さで夭折しています。ご子息のマーティン・シュヴァルツシルト (Martin Schwarzschild, 1912 - 1997) はアメリカの天体物理学者となり、主に恒星進化論の分野で大きな貢献を果たしたとのこと。さて、余談はこれくらいにして本論に入ります。

シュヴァルツシルドは原点を中心とするある有限の領域に球対称に物質が静的に分布しているとき、物質分布の外側では (4.2.5) の $R_{\mu\nu} = 0$ が成立するとしてこの方程式の厳密解⁶を求めました。このとき $g_{\mu\nu}$ は時間に依らず、また空間的な方向にもよりません⁷。そして、原点から十分に遠く離れていくと平坦なミンコフスキー空間になるとします (漸近的平坦な空間)。

⁶ シュヴァルツシルドの外部解ともいいます。

⁷ 「球対称な重力場では、物質が時間に依存した動径方向に運動 (球対称な拍動) をしていても、物質の存在しない領域での時空は $g_{\mu\nu}$ が時間に依存しない静的な形に選べる」というパーコフの定理というのがあります。

4.3.1 静的球対称な時空の計量テンソル

4次元のリーマン時空間での座標系として，空間座標は3次元の球面座標をとり，

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi) \quad (4.3.1)$$

とします。線素・不変距離 ds の2乗は，下付き添え字を $(0, 1, 2, 3) \rightarrow (t, r, \theta, \phi)$ と変えると（この方が意味が掴みやすい）次のように表せます。

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{tt}(dx^0)^2 + g_{rr}(dr)^2 + g_{\theta\theta}(d\theta)^2 + g_{\phi\phi}(d\phi)^2 \\ &\quad + 2g_{tr}dx^0 dr + 2g_{t\theta}dx^0 d\theta + 2g_{t\phi}dx^0 d\phi + 2g_{r\theta}dr d\theta + 2g_{r\phi}dr d\phi + 2g_{\theta\phi}d\theta d\phi \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

沢山の項からなりますが，いま，静的重力場でかつ球対称であることから，幸いこれらの項の大半は消し去ることができます。具体的に見ていきましょう。

まず，計量は時間に依存しませんね。時間反転 $dx^0 \rightarrow -dx^0$ に関して線素は不変なので，

$$g_{tr}dx^0 dr = g_{tr}(-dx^0)dr, \therefore g_{tr} = 0, \quad \text{同様にして } g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$$

したがって，1次の dx^0 の掛かっている係数は0となります。

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt}(dx^0)^2 + g_{rr}(dr)^2 + g_{\theta\theta}(d\theta)^2 + g_{\phi\phi}(d\phi)^2 \\ &\quad + \cancel{2g_{tr}dx^0 dr} + \cancel{2g_{t\theta}dx^0 d\theta} + \cancel{2g_{t\phi}dx^0 d\phi} + 2g_{r\theta}dr d\theta + 2g_{r\phi}dr d\phi + 2g_{\theta\phi}d\theta d\phi \end{aligned}$$

また，角度の反転 ($d\theta \rightarrow -d\theta$, or $d\phi \rightarrow -d\phi$) に対して線素は不変なので，上の論法から

$$g_{r\theta} = g_{r\phi} = g_{\theta\phi} = 0$$

と結論できそうですが，ここは注意が必要で，これらの計量が動径 r だけの関数でなく角度依存性をもっていれば一意的に0になるとはいえません。そのあたりを調べてみます。2点 (x^0, r, θ, ϕ) と $(x^0, r + \delta r, \theta + \delta\theta, \phi)$ の線素の2乗をとると

$$ds^2 = g_{rr}(\delta r)^2 + g_{\theta\theta}(\delta\theta)^2 + 2g_{r\theta}\delta r \delta\theta$$

一方，変位角を反転 ($\delta\theta \rightarrow -\delta\theta$) させた場合の線素の2乗は

$$ds^2 = g_{rr}(\delta r)^2 + g_{\theta\theta}(-\delta\theta)^2 - 2g_{r\theta}\delta r \delta\theta$$

これらは相等しいので $2g_{r\theta}\delta r \delta\theta = -2g_{r\theta}\delta r \delta\theta$ 。ところで， $\delta r, \delta\theta$ は任意なので，等式が成り立つ条件は $g_{r\theta} = 0$ です。同様のことをおこなえば

$$g_{r\phi} = g_{\theta\phi} = 0$$

となることが確認でき，以上のことを踏まえて (4.3.2) を整理すると ds^2 は計量テンソルの対角成分だけで表されることがわかります。

$$ds^2 = g_{tt}(dx^0)^2 + g_{rr}(dr)^2 + g_{\theta\theta}(d\theta)^2 + g_{\phi\phi}(d\phi)^2 \quad (4.3.3)$$

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

次に, g_{tt}, g_{rr} と r, θ, ϕ の関数関係について調べていきます。時空の 2 点 $(x^0, r, \theta, \phi), (x^0 + \delta x^0, r, \theta, \phi)$ 間の線素の 2 乗は

$$ds^2 = g_{tt}(r, \theta, \phi)(\delta x^0)^2$$

一方, $\theta \rightarrow \theta'$ とした 2 点 $(x^0, r, \theta', \phi), (x^0 + \delta x^0, r, \theta', \phi)$ 間の線素の 2 乗は

$$ds^2 = g_{tt}(r, \theta', \phi)(\delta x^0)^2$$

球対称性よりこの 2 式は等しいので

$$g_{tt}(r, \theta, \phi)(\delta x^0)^2 = g_{tt}(r, \theta', \phi)(\delta x^0)^2$$

ところで, この等式が任意の θ, θ' について成り立つためには g_{tt} は θ の関数ではないことが分かります。同様に $\phi \rightarrow \phi'$ として同じことをやれば ϕ も含まず, 結局 g_{tt} は r のみの関数であることが分かります。

$$g_{tt} = g_{tt}(r)$$

g_{rr} も同様に球対称性から

$$ds^2 = g_{rr}(r, \theta, \phi)(\delta r)^2 = g_{rr}(r, \theta', \phi)(\delta r)^2 = g_{rr}(r, \theta, \phi')(\delta r)^2$$

となり, r のみの関数であることが分かります。

$$g_{rr} = g_{rr}(r)$$

随分スッキリしました。(4.3.3) の右辺最後の 2 項が残っていますが, いま仮に $d\theta, d\phi$ の係数が独立に選べるとしたら ds^2 は角度に依存する量となってしまうので, $g_{\theta\theta}$ と $g_{\phi\phi}$ の間には球対称性を保持する関係性があるはずで。ここで球面上の線素の 2 乗は (2.3.10) より

$$d\ell^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

で与えられることを思いだすと, 角度成分に関する残りの 2 項はこれに対応する形になると考えられますね。ということで

$$g_{tt} = -A(r), \quad g_{rr} = B(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (4.3.4)$$

とおくと, 線素の 2 乗は未知の動径関数 $A(r), B(r)$ の 2 つを含む

$$ds^2 = -A(r)(dx^0)^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.3.5)$$

で表せます。いま, 漸近的平坦な時空を考えているので原点から十分に遠いところではミンコフスキー時空の線素

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.3.6)$$

に移行します。未知関数 $A(r), B(r)$ は r の任意の関数なので

$$A(r) = e^{\nu(r)}, \quad B(r) = e^{\lambda(r)} \quad (4.3.7)$$

とおくと, (4.3.5) は

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}(dx^0)^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.3.8)$$

と表され、これより計量テンソルは次の通りとなります（ $g_{\mu\nu}$ は対角行列となるので反変・共変成分は互いに逆数の関係になる）。(4.3.14) も参照のこと。

| 共変計量 | 反変計量 | (4.3.9) |
|------------------------------|----------------------------------|---------|
| $g_{00} = -e^{\nu(r)}$ | $g^{00} = -e^{-\nu(r)}$ | |
| $g_{11} = e^{\lambda(r)}$ | $g^{11} = e^{-\lambda(r)}$ | |
| $g_{22} = r^2$ | $g^{22} = 1/r^2$ | |
| $g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$ | $g^{33} = 1/(r^2 \sin^2 \theta)$ | |

4.3.2 クリストッフエル記号の計算

アインシュタイン方程式を解くにはリッチテンソルとスカラー曲率を求めなければなりません。それらの構成要素であるクリストッフエル記号をまず求めておきます。クリストッフエル記号は次式で表されました（偏微分記号をコンマに変えた）。

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})\end{aligned}\tag{4.3.10}$$

$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ は $4^3 = 64$ 個の項からなりますが、下付き添え字の対称性から実際は 40 個になります。さらに、計量の非対角成分は 0 ($g_{\mu\nu} = 0 ; \mu \neq \nu$) であることに注意すると Γ の計算量はかなり減り、0 でないクリストッフエル記号は次のようになります。

- $\alpha = 0 \rightarrow \beta = 0$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{00}(g_{0\mu,\nu} + g_{0\nu,\mu} - g_{\mu\nu,0}) \\ \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{00}(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) = 0 \\ \Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2}g^{00}(g_{01,0} + g_{00,1} - g_{10,0}) = \frac{1}{2}g^{00} \cdot g_{00,1} = \frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr} = \frac{1}{2}\nu'\end{aligned}$$

- $\alpha = 1 \rightarrow \beta = 1$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{1\mu,\nu} + g_{1\nu,\mu} - g_{\mu\nu,1}) \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) = -\frac{1}{2}g^{11} \cdot g_{00,1} = \frac{1}{2}\nu'e^{\nu-\lambda} \\ \Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = \frac{1}{2}g^{11} \cdot g_{11,1} = \frac{1}{2}\lambda' \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2}g^{11} \cdot g_{22,1} = -re^{-\lambda} \\ \Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1}) = -\frac{1}{2}g^{11} \cdot g_{33,1} = -re^{-\lambda} \sin^2 \theta\end{aligned}$$

- $\alpha = 2 \rightarrow \beta = 2$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{2\mu,\nu} + g_{2\nu,\mu} - g_{\mu\nu,2}) \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2}g^{22} \cdot g_{22,1} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{23,3} + g_{23,3} - g_{33,2}) = \frac{1}{2}g^{22} \cdot g_{33,2} = -\sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

- $\alpha = 3 \rightarrow \beta = 3$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{3\mu,\nu} + g_{3\nu,\mu} - g_{\mu\nu,3}) \\ \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{31,3} + g_{33,1} - g_{13,3}) = \frac{1}{2}g^{33} \cdot g_{33,1} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{23,3}) = \frac{1}{2}g^{33} \cdot g_{33,2} = \cot \theta\end{aligned}$$

以上,まとめると

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2}\nu' \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}\nu'e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda', \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \cot\theta\end{aligned}\tag{4.3.11}$$

4.3.3 リッチテンソルの計算

次にリッチテンソルを計算します。

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}$$

リッチテンソルの独立成分数は次の10個。

$$\begin{aligned}R_{00} &= \Gamma^\sigma_{00,\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\sigma,0} + \Gamma^\lambda_{00}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 0} \\ R_{01} &= \Gamma^\sigma_{01,\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\sigma,1} + \Gamma^\lambda_{01}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 1} \\ R_{02} &= \Gamma^\sigma_{02,\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\sigma,2} + \Gamma^\lambda_{02}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 2} \\ R_{03} &= \Gamma^\sigma_{03,\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\sigma,3} + \Gamma^\lambda_{03}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 3} \\ R_{11} &= \Gamma^\sigma_{11,\sigma} - \Gamma^\sigma_{1\sigma,1} + \Gamma^\lambda_{11}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 1} \\ R_{12} &= \Gamma^\sigma_{12,\sigma} - \Gamma^\sigma_{1\sigma,2} + \Gamma^\lambda_{12}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 2} \\ R_{13} &= \Gamma^\sigma_{13,\sigma} - \Gamma^\sigma_{1\sigma,3} + \Gamma^\lambda_{13}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 3} \\ R_{22} &= \Gamma^\sigma_{22,\sigma} - \Gamma^\sigma_{2\sigma,2} + \Gamma^\lambda_{22}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 2} \\ R_{23} &= \Gamma^\sigma_{23,\sigma} - \Gamma^\sigma_{2\sigma,3} + \Gamma^\lambda_{23}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 3} \\ R_{33} &= \Gamma^\sigma_{33,\sigma} - \Gamma^\sigma_{3\sigma,3} + \Gamma^\lambda_{33}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 3}\end{aligned}$$

非対角成分は恒等的に0になるので残るのは $R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}$ の4個。

$$\begin{aligned}R_{00} &= \Gamma^1_{00,1} + \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{00}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{00}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\nu'\right)e^{\nu-\lambda} \\ \Gamma^1_{00,1} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dr}(\nu'e^{\nu-\lambda}) = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda') \\ \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{4}\nu'\lambda'e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma^1_{00}\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2r}\nu'e^{\nu-\lambda} \\ \Gamma^1_{00}\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2r}\nu'e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} = \frac{1}{4}\nu'^2e^{\nu-\lambda}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Gamma^1_{11,1} + \Gamma^0_{10,1} - \Gamma^1_{11,1} - \Gamma^2_{12,1} - \Gamma^3_{13,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} \\
&\quad + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\
&= -\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{\lambda'}{r} \\
R_{22} &= \Gamma^1_{22}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\
&= 1 - e^{-\lambda} - \frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda} + \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda} \\
R_{33} &= \Gamma^1_{33,1} + \Gamma^2_{33,2} + \Gamma^1_{33}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} \\
&\quad - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} \\
&= \left(1 - e^{-\lambda} - \frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda} + \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda}\right) \sin^2\theta = R_{22} \sin^2\theta
\end{aligned}$$

以上，煩雑で面倒臭い計算でした (^^); 結果をまとめておきます。

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = \left(-\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\nu'\right) e^{\nu-\lambda} \\ R_{11} = -\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{\lambda'}{r} \\ R_{22} = 1 - e^{-\lambda} - \frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda} + \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda} \\ R_{33} = R_{22} \sin^2\theta = \left(1 - e^{-\lambda} - \frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda} + \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda}\right) \sin^2\theta \end{array} \right. \quad (4.3.12)$$

4.3.4 シュヴァルツシルドの解を求める

解くべき連立微分方程式は

$$R_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_{00} = \left(-\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\nu'\right) e^{\nu-\lambda} = 0 \\ R_{11} = -\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{\lambda'}{r} = 0 \\ R_{22} = 1 - e^{-\lambda} - \frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda} + \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda} = 0 \\ R_{33} = R_{22} \sin^2\theta = \left(1 - e^{-\lambda} - \frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda} + \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda}\right) \sin^2\theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.3.13)$$

ですが，第3，第4式は一つの関係式で結ばれていますね。上の第1式，第2式より

$$\nu' + \lambda' = 0 \quad \therefore \lambda(r) = -\nu(r) + C \quad (C: \text{積分定数})$$

ところで $r \rightarrow \infty$ で漸近的平坦な空間を仮定しているので，計量テンソルは

$$r \rightarrow \infty \left\{ \begin{array}{l} g_{00} = -e^{\nu(r)} = -1 \\ g_{11} = e^{\lambda(r)} = 1 \end{array} \right. \quad (4.3.14)$$

となります。積分定数 C は $r \rightarrow \infty: \nu = \lambda = 0$ という条件から $C = 0$ と得られて $\lambda(r) = -\nu(r)$ 。これを第4式に入れて整理すると

$$\begin{aligned}
e^\lambda &= 1 - \frac{1}{2}r\lambda' + \frac{1}{2}r\nu' = 1 - r\lambda' = e^\lambda \frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) \\
\therefore e^{-\lambda} &= 1 - \frac{a}{r}, \quad e^\nu = 1 - \frac{a}{r} \quad (\text{積分定数を } -a \text{ とした}) \\
\lambda &= -\ln(1 - a/r), \quad \nu = \ln(1 - a/r)
\end{aligned}$$

を得ます。したがって線素の2乗は

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 \\ &= -\left(1 - \frac{a}{r}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

これが有名なシュヴァルツシルドの(外部)解⁸で、この解が表す時空をシュヴァルツシルド時空といいます。先程の積分定数 a は (2.4.30) より

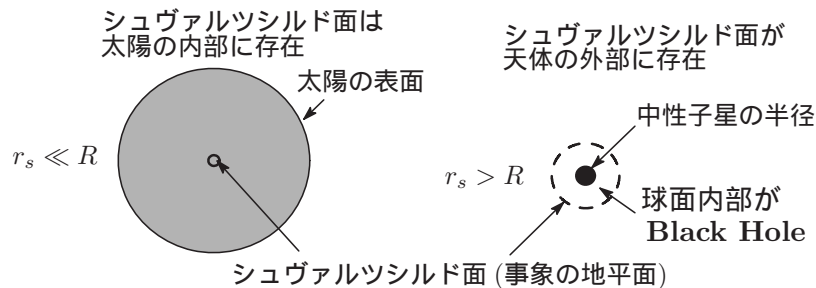
$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) \\ \therefore a &= \frac{2GM}{c^2} \quad (G = 6.7 \times 10^{-11} \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}, c = 3.0 \times 10^8 \text{ms}^{-1}) \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

と求められます。 a は長さの次元を持ち、シュヴァルツシルド半径と呼ばれ、質量に比例して、これを半径とする球面をシュヴァルツシルド面と呼んでいます。太陽のシュヴァルツシルド半径は質量 $M=2 \times 10^{39}\text{kg}$ を入れて $a = 3\text{km}$ と求められ、半径 $R_s = 6.96 \times 10^5\text{km}$ から較べて遥かに小さい値ですね。ちなみに地球 ($M = 5.98 \times 10^{24}\text{kg}$) のシュヴァルツシルド半径は $9 \times 10^{-3}\text{m}$ で、そこらに転がっている石ころより小さい値です。

ニュートンの重力ポテンシャルは (4.3.16) より

$$\Phi = -\frac{ca^2}{2r} \quad (4.3.17)$$

と表され、これはまさに「重力の強さは距離の逆2乗に比例する」ことにあたります。ということで、ニュートンの重力理論はアインシュタイン方程式の厳密解の十分遠方における(重力が十分に弱いところでの)近似解だということになるわけですね。 r が小さくなるとニュートン重力とは異なった振る舞いを示します。特に $r \simeq a$ になると g_{00} も g_{11} も平坦な空間の場合の $-1, +1$ から大幅にずれ、 $r = a$ のシュヴァルツシルド面上では $g_{00} = 0, g_{11} \rightarrow \infty$ となって、この面を境に g_{00} も g_{11} も符号を変え⁹時空の状態が大きく変わることが予想されます。ただ、太陽の例で見たようにシュヴァルツシルド半径は太陽の十分内部となり、そこでは上で得られた外部解は適用できないので、当初はシュヴァルツシルド半径には現実的な意味はないと考えられていたそうです(太陽の内部ではシュヴァルツシルド時空にはなっていない)。



しかし、太陽の 10^{14} 倍以上の密度をもつ中性子星のような極めて高密度に圧縮された天体では外部にシュヴァルツシルド面が現れ、そこではシュヴァルツシルド時空となっているので、その現実的な意味を追求する必要に迫られることとなります。いよいよブラックホールの登場です。

⁸ シュヴァルツシルドは天体内部の重力場の解 ($T_{\mu\nu} \neq 0$ として解く) も求めていてそれを内部解といいます。内部解にはシュヴァルツシルド面のような得意な面は通常現れないそうです。

⁹ t を時間座標、 r を空間座標と考える限り、 t が時間の役目を果たさなくなり計量テンソルに課された条件に反することになります。しかし、詳細は略しますが、座標のとり方を変える(等方座標系と呼ばれる)ことでこの問題は回避できることが知られています。

4.3.5 ブラックホール

一般相対性理論といえばブラックホール。光さえも吸い込み、一旦吸い込まれたら二度と外には出られない宇宙の恐ろしい穴(?!)。というイメージが一般に定着していますね。この節ではブラックホールのアウトラインを見ていくことにします。

前図に示した中性子星のような高密度天体を考え、天体の中心に向かって外部からまっすぐに粒子が入射する場合を考えます。

粒子の4元速度を $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ とすると、

$$(u^0, u^1, u^2, u^3) = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \right)$$

であるので、粒子の運動方程式(測地線の方程式)は、 $\Gamma^0_0 = \Gamma^0_{01}$ 以外は0となることを考慮すれば

$$\frac{du^0}{d\tau} = -\Gamma^0_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\Gamma^0_{10} u^1 u^0 - \Gamma^0_{01} u^0 u^1$$

となり、また、

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} \nu' = \frac{1}{2} \frac{a}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1}$$

なので、これを上式に入れて整理すると次の微分方程式が得られます。

$$0 = \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{a}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{r} \right)} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{r} \right)} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \right\}$$

$$\therefore \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \right\} = 0$$

これを積分して、座標時間 t と固有時間 τ の間の関係として

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{k}{1 - \frac{a}{r}} \quad (k: \text{積分定数}) \quad (4.3.18)$$

を得ます。積分定数 k は重力が十分に弱い無限遠 ($r = \infty$) での座標時間 t と固有時間 τ の違いを与える時間遅れの因子です。無限遠では特殊相対論が成立するので、無限遠方で粒子が v_∞ の速度をもてば、 k は (2.3.18) より

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_\infty^2/c^2}} = k, \quad \therefore k = 1/\sqrt{1 - v_\infty^2/c^2}$$

無限遠での入射粒子の速度が0とすると $k = 1$ です。

いま、簡単のために $k = 1$ として動径方向 ($d\theta = d\phi = 0$) の粒子の運動を調べていきます。 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ を (4.3.15) に入れて

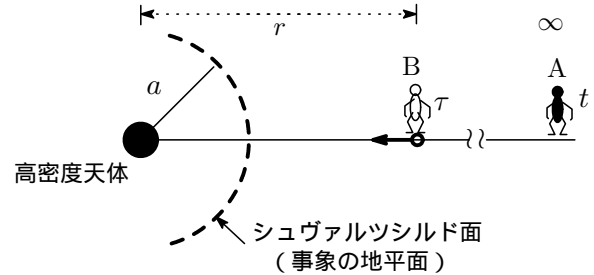
$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 \left(1 - \frac{a}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} dr^2$$

(4.3.18) を使って上式を整理すると

$$c^2 \left(1 - \frac{a}{r} \right) = c^2 - \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2$$

となり、これから固有時間 τ で表した粒子の速さ(粒子に乗っている観測者 B の見る速さ)は

$$B: \quad \frac{dr}{d\tau} = -c \sqrt{\frac{a}{r}} \quad (4.3.19)$$



となります。負号は粒子が原点に向かって内向きに運動していることを表すためにつけました。一方、無限遠方にいる観測者 A から見た粒子の速さは

$$A: \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -c\sqrt{\frac{a}{r}} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad (4.3.20)$$

で与えられます。 $c=a=1$ と簡単化してグラフに描くと下図のようになります。

これを見ると観測者 A から見た粒子の速さはシュヴァルツシルド面 ($r=a$) に接近してくれば急激に遅くなり、 $r=a$ の位置に到達するまでには無限の時間 ($t \rightarrow \infty$) を要することがわかります。

一方、粒子に乗っている観測者 B から見る粒子の速さは (4.3.19) で与えられるので、そのような挙動は観測されず、 $a < r_1$ の位置から天体の中心 O に到達するまでの所要固有時間は

$$\tau_1 = \frac{1}{c} \int_{r_1}^0 \sqrt{\frac{r}{a}} dr = \frac{2r^{3/2}}{3c\sqrt{a}} \quad (4.3.21)$$

で与えられます。つまり、有限の時間内でシュヴァルツシルド面を通過し天体の中心に向かいます。この両者の違いは、座標時間 t で見るか固有時間 τ で見るかの顕著な違いです。

同様に、シュヴァルトシルド面の内部 $r < a$ の位置から出発して外側に向かって運動する粒子も、無限遠方の観測者 A の時計では $r=a$ に到達するのに無限の時間がかかります。

次に光が $r < a$ の位置から外向きに進行する場合を考えます。光の進路は $ds^2 = 0$ によって決まるので (4.3.15) より

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$$

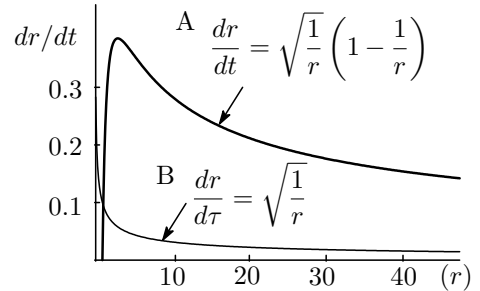
これから光の進路を決める微分方程式は

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

いま、シュヴァルトシルド面内部 ($r_1 < a$) より発した光が r に到達する所要時間を求めると

$$\begin{aligned} \int_0^t c dt &= - \int_{r_1}^r \left(1 - \frac{a}{r'}\right)^{-1} dr' = - [r' + a \ln(r' - a)]_{r_1}^r \\ &= r_1 - r + a \ln \left(\frac{r_1 - a}{r - a}\right) \\ \therefore ct &= r_1 - r + a \ln \left(\frac{r_1 - a}{r - a}\right), \quad r \rightarrow a : t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となります。無限遠方の観測者 A から眺めると、光がシュバルツシルド面に達するまでに無限の時間がかかるので内部から発した光を観測することはできず、宇宙空間に半径が a のサイズの暗黒の穴が空いているように観察されます。もし、仮に無限の時間かかって観測者 A に到達したとしても、その波長は ∞ (振動数 $\rightarrow 0$) に重力赤方偏移して A にはなにも見えません。この辺の事情が、粒子も光も出てこないこの暗黒の穴ブラック・ホールという名¹⁰の由来です。 $r=a$ のシュバルツシルド面は、そこから内部のいかなる情報も外部と連絡する手段はないという意味を含めて事象の地平面と呼ばれます。なお、これらのことは前ページの脚注で指摘した等方座標においても同様に成立し、座標のとり方によらないことが知られています。



¹⁰ 藤井保憲「時間とはなんだろうか」(岩波書店,1989)には「ブラックホールへの旅」という一文が載っていて大変面白くブラックホールのイメージが湧きます。図書館からでも借りて一読されてはいかがでしょうか。

4.3.6 重力赤方偏移

等価原理のところでも触れましたが、ここでは一般相対論の観点から見ていきます。

時間的な変化のない静的な時空を考えます。空間に固定したある一点 A から座標時間で時刻 t_A に A 点から空間の別の一点 B に向けて光信号を送り、時刻 t_B に B 点に到達したとします。同様に次の光信号を A 点から時刻 $t_A + \Delta t_A$ で B 点に送り時刻 $t_B + \Delta t_B$ で B 点に到達したとします。時空は静的でかつ A 点、B 点も静止しているので発信時の時間間隔と受信時の時間間隔は等しいはずで $\Delta t_A = \Delta t_B = \Delta t$ が成立しますね。座標時間が Δt 進む間に A 点にいる観測者の固有時間が $\Delta \tau_A$ 進むとすると、(2.3.19) の関係より

$$\Delta \tau_A = \sqrt{-g_{00}(A)} \Delta t_A = \sqrt{-g_{00}(A)} \Delta t$$

また、B 点の観測者 B の固有時間が座標時間 Δt の間に $\Delta \tau_B$ だけ進むとすると¹¹

$$\Delta \tau_B = \sqrt{-g_{00}(B)} \Delta t_B = \sqrt{-g_{00}(B)} \Delta t$$

いま Δt を 1 周期、つまり Δt の間に A 点から 1 個の光の波を放射したとすれば、光の振動数は $\nu_A = 1/\Delta \tau_A$ 、この光信号を B 点の固有時間を使って測った振動数を ν_B とすれば、 $\nu_B = 1/\Delta \tau_B$ と計測されます。この振動数の比を取ると

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\Delta \tau_A}{\Delta \tau_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}} \quad (4.3.22)$$

シュヴァルツシルド時空での計量は (4.3.16) より $r \gg a (= 2GM/c^2)$ として

$$g_{00}(x) = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), \quad \therefore \sqrt{g_{00}(x)} \simeq 1 - \frac{GM}{c^2 r}$$

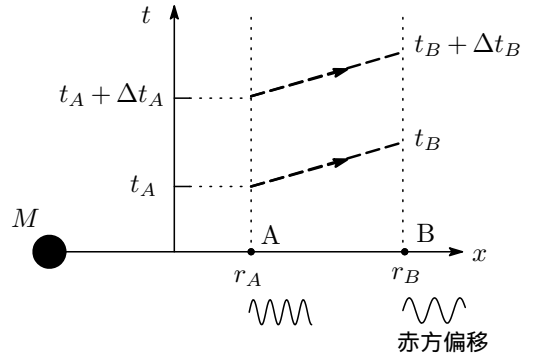
これを (4.3.22) に入れて整理すると、 Φ をニュートンポテンシャルとして

$$\begin{aligned} \frac{\nu_B}{\nu_A} &= \frac{1 - GM/c^2 r_A}{1 - GM/c^2 r_B} \simeq (1 - GM/c^2 r_A)(1 + GM/c^2 r_B) \\ &\simeq 1 - \frac{GM}{c^2 r_A} + \frac{GM}{c^2 r_B} = 1 - \frac{1}{c^2} (\Phi_B - \Phi_A) = 1 - \frac{\Delta \Phi}{c^2} \\ \therefore \nu_B &= \nu_A \left(1 - \frac{\Delta \phi}{c^2}\right) < \nu_A \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

これは等価原理から導いた (2.2.3) に他なりません。もし $g_{00}(A) = 0$ となる時空の点から光がやってくるとすると、振動数は $\nu_B \rightarrow 0$ 、波長が無限に伸びてしまうことになります。これは前節で述べましたブラックホールからでてきた光はなにも見えないということに対応しています。

4.3.7 シュヴァルトシルト時空における惑星の運動

シュヴァルトシルト時空での惑星 ($m=1$ とする) の運動を見ていきます。最後に水星の近日点移動の値を求めます。



¹¹ 重力赤方偏移とは、座標時間で測ってみると、本来固有時間で動いている時計の進み方が遅れて見える、という現象のことです。

ラグランジアンは (4.1.3) よりパラメータ λ は固有時間 τ に置き換えて

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \quad \dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau, \quad \dot{x}^\nu = dx^\nu/d\tau \quad (4.3.24)$$

としますが, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau \longrightarrow g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -c^2$ という関係があるので (4.3.24) の L の代わりにその 2 乗の

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$$

とにおいても計算結果は変わらないことが示せる (略) ので, 煩雑さを避けるためにこのラグランジアンを採用します。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ &= -\left(1 - \frac{a}{r}\right)(\dot{x}^0)^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

EL 方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (4.3.26)$$

時間成分と角成分の方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^0}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^0} = \frac{d}{d\tau}\left\{-2\left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot{x}^0\right\} = 0 \quad (4.3.27)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^2}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^2} = \frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{\theta}) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.3.28)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^3}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^3} = \frac{d}{d\tau}(2r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \quad (4.3.29)$$

と表されます。 (4.3.28) より

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) - r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \quad (4.3.30)$$

θ に関しては時空に特別な方向はないので, 初期条件 $\tau = 0$ で $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$ となるように軸を設定すれば, 惑星は常に $\theta(\tau) = \pi/2$ という平面上を運動することがわかります。また, (4.3.27), (4.3.29) の被微分関数は運動の定数となるので $\theta = \pi/2$ として

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot{x}^0 &= cb \quad (b: \text{定数}) \\ r^2\dot{\phi} &= ch \quad (h: \text{定数}) \quad \dots \text{軌道角運動量} \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

とおきます。動径成分の EL 方程式は複雑になるので, その代わりとして上の方程式とは独立な方程式である (2.3.16) の固有時間の定義式

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)(\dot{x}^0)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = c^2 \quad (4.3.32)$$

を用います。これに (4.3.31) を入れると

$$\frac{1}{1 - a/r}(cb)^2 - \frac{1}{1 - a/r}\dot{r}^2 - \frac{c^2 h^2}{r^2} = c^2$$

となり, 両辺に $1/2$ を乗じて整理すると

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + c^2 U(r) = \frac{1}{2}c^2(b^2 - 1), \quad U(r) = -\frac{a}{2r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3} \quad (4.3.33)$$

が得られます。右辺の $c^2(b^2 - 1)/2$ はニュートン力学における単位質量 ($m = 1$) の惑星のエネルギー E に相当するものです。 (4.3.33) はニュートン力学での有効ポテンシャル中における 1 次

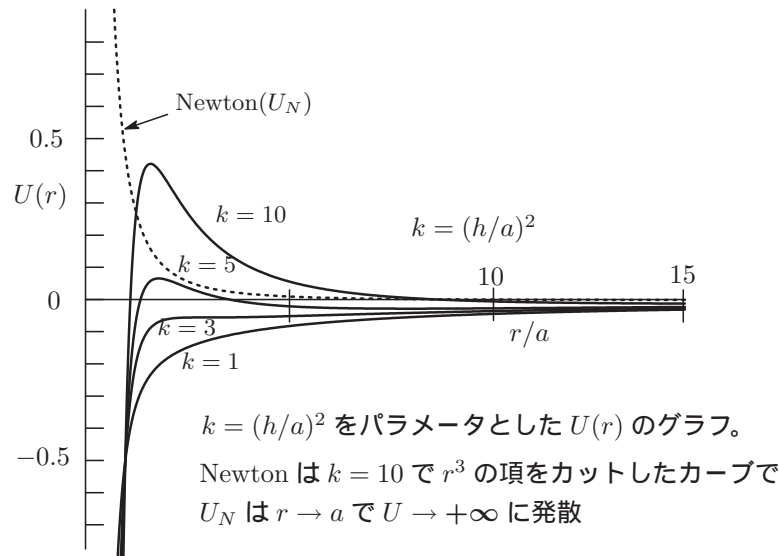
元運動のエネルギー保存則の形と同じですね。有効ポテンシャル $U(r)$ は

$$U(r) = -\frac{a}{2r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3} \quad (4.3.34)$$

で、ニュートン力学での有効ポテンシャル（下記 参考を参照）はこれとほとんど同じ形で

$$U_N(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{(r^2\dot{\phi})^2}{2r^2} = c^2 \left(-\frac{a}{2r} + \frac{h^2}{2r^2} \right)$$

となりますが、 r の 3 乗に逆比例する項は存在しません。これが一般相対論の効果でニュートンポテンシャルに対する補正項となります。有効ポテンシャルのグラフを下図に示します。 $1/r^3$ と



いう近距離力にあたる項の存在によりブラックホールに近づく ($r/a \rightarrow 1$) につれて重力が強大となり、すべてのものが中心に向かって落下する様子がグラフから伺えます。

（参考）：ニュートン力学での惑星運動のエネルギー保存則（1次元の運動に焼き直せる）

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_N(r)$$

$$U_N(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}, \quad \ell = r^2\dot{\phi} \text{ (角運動量)} \quad (m = 1)$$

U_N は等価 1 次元ポテンシャルともいいます。 //

(1) 円運動

それでは最も簡単な円運動のケースを見ていきます。円軌道では動径の時間変化はないので $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ です。動径方向のポテンシャル変化はないので、円軌道半径を $r = r_0$ とすれば

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{a}{2r_0^2} - \frac{h^2}{r_0^3} + \frac{3ah^2}{2r_0^4} = 0$$

が成立し、軌道半径 r_0 は次の 2 次方程式の解として得られます。

$$ar_0^2 - 2h^2r_0 + 3h^2a = 0$$

$$\therefore r_0^1 = \frac{1}{a}(h^2 + \sqrt{D}) \text{ or } r_0^2 = \frac{1}{a}(h^2 - \sqrt{D}) \quad (\text{ただし } D = h^4 - 3h^2a^2)$$

実根条件は

$$D = h^4 - 3h^2a^2 \geq 0 \rightarrow h \geq \sqrt{3}a$$

上の2実根を(4.3.33)に入れると

$$U(r_0^1) = \frac{a^2 h^2 (2a^2 - h^2 - \sqrt{D})}{2(h^2 + \sqrt{D})^3}, \quad U(r_0^2) = \frac{a^2 h^2 (2a^2 - h^2 - \sqrt{D})}{2(h^2 - \sqrt{D})^3}$$

となり、エネルギーが低い $r_0^1 = (h^2 + \sqrt{D})/a$ の軌道が安定な円軌道の半径となることがわかります。 $D = 0$ で $r_0^{min} = h^2/a = 3a^2/a = 3a$ となり、これが最小安定円軌道の半径で、この軌道は最近接安定軌道 (inner-most stable orbit) と呼ばれます。

(2) 楕円軌道と水星の近日点移動

ニュートン力学で惑星に働く力が逆2乗の法則に従う中心力である場合、惑星の一般的な軌道は楕円軌道となりました。ニュートン力学でやったように $r \rightarrow \phi$, $1/r \rightarrow \chi$ と変数を変えると(4.3.31)より

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{\chi} \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{1}{\chi^2} \frac{d\chi}{d\phi} \dot{\phi} = -ch \frac{d\chi}{d\phi} \quad (4.3.35)$$

この両辺を2乗し、(4.3.33)を使って整理すると

$$\left(\frac{d\chi}{d\phi} \right)^2 + \chi^2 - \frac{a}{h^2} \chi - a\chi^3 = \frac{b^2 - 1}{h^2} \quad (4.3.36)$$

となります。この式をもう一度 ϕ で微分すると

$$\frac{d^2\chi}{d\phi^2} + \chi - \frac{a}{2h^2} = \frac{3}{2}a\chi^2 \quad (4.3.37)$$

となり、仮に右辺が0であればニュートン力学の微分方程式と同じ形になり¹²、この解は楕円軌道の式

$$\chi = (1 + e \cos \phi) \frac{a}{2h^2} \quad (4.3.38)$$

となります。そこで、(4.3.37)の右辺を摂動とみなして近似解を求めていくことにします。 e はオーダー1の量で、 χ の大きさは a/h^2 です。そこで新しい変数 $\xi = h^2\chi/a$ を導入すると、 ξ は1のオーダーとなり(4.3.37)は

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \xi - \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{2h^2} \xi^2 \quad (4.3.39)$$

と書き換えられます。軌道の典型的な半径 $r_0 = h^2/a$ はシュヴァルツシルド半径 a より十分に大きいので、右辺は $a^2/h^2 = a/r_0 \ll 1$ より摂動項と見なせます。ここでテクニカルですが解の形を

$$\xi = \frac{1}{2}(1 + e \cos \eta\phi) + \delta(P + Q \cos 2\eta\phi), \quad \delta = a^2/h^2 \quad (4.3.40)$$

と仮定して(4.3.39)に代入し、 δ の1次の項までとると

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \xi - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}e(1 - \eta^2) \cos \eta\phi + \delta \{P + Q(1 - 4\eta^2) \cos 2\eta\phi\} \\ &= (P - Q + 4Q\eta^2)\delta + \frac{1}{2}e(1 - \eta^2) \cos \eta\phi + 2Q\delta(1 - 4\eta^2) \cos^2 \eta\phi \\ \frac{3a^2}{2h^2} \xi^2 &= \frac{3}{8}\delta(1 + 2e \cos \eta\phi + e^2 \cos^2 \eta\phi) \end{aligned}$$

となります。ここで両辺の定数項、 $\cos \eta\phi$ 、 $\cos^2 \eta\phi$ の各項の比較から

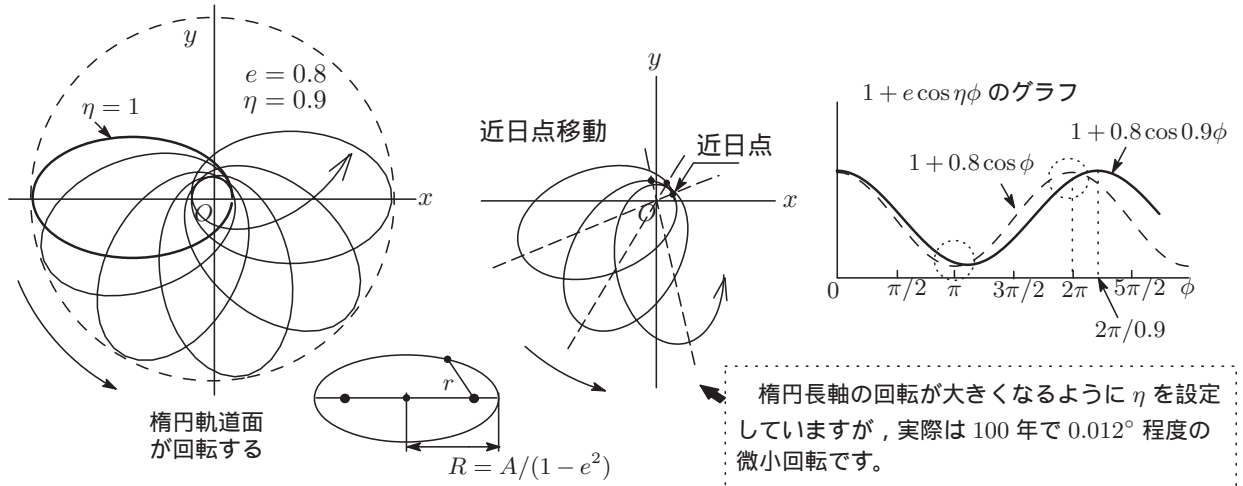
$$\frac{1}{2}(1 - \eta^2) = \frac{3}{4}\delta, \quad P = \frac{3}{8} + \frac{3}{16}e^2, \quad Q(1 - 4\eta^2) = \frac{3}{16}e^2 \quad (4.3.41)$$

¹² ニュートン力学では $\left(\frac{d\chi}{d\phi} \right)^2 + \chi^2 - A\chi = B \rightarrow \frac{d^2\chi}{d\phi^2} + \chi - A = 0$, これから $\chi = 1/r = (1 + e \cos \phi) \frac{a}{2h^2}$

を得ます。太陽系で考えた場合、太陽のシュバルツシルド半径は $a = 3\text{km}$ 、一番近い水星の軌道半径は $6 \times 10^7\text{km}$ であるので $\delta \sim 3/(6 \times 10^7) \simeq 10^{-8}$ と極微小量となり、 δ に比例する補正項は無視しても構わないので、求める軌道の式は

$$\xi = \frac{1}{2}(1 + e \cos \eta \phi) \longrightarrow r = \frac{A}{1 + e \cos \eta \phi} \quad (A = 2h^2/a) \quad (4.3.42)$$

となります。ニュートン力学では分母の余弦関数が $\cos \phi$ でしたが、相対論では $\cos \eta \phi$ となって



いることに注意してください¹³。 $\eta = 1$ であれば楕円軌道は閉じた軌道になりますが、 $\eta \neq 1$ では上図・左に示すように楕円の軌道面（長軸）が回転していきます。最初は $\phi = 0$ で r は最小になりますが、次の 1 回転したあとは $\phi = 2\pi/\eta$ の位置で最小になり、 ϕ の位置は 1 公転ごとに

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\eta} - 2\pi \quad (4.3.43)$$

だけ変化します。(4.3.41) の第 1 式に η を入れて $\Delta\phi$ を求めると

$$\Delta\phi = 2\pi \left\{ \left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^{-1/2} - 1 \right\} \doteq \frac{3\pi\delta}{2} = \frac{3\pi a^2}{2h^2} \quad (4.3.44)$$

となり、楕円軌道の長軸半径 R は (4.3.42) より

$$R = \frac{A}{1 - e^2} = \frac{2h^2}{a} \frac{1}{1 - e^2} \quad (4.3.45)$$

なので

$$\Delta\phi = \frac{3\pi a}{R(1 - e^2)} = \frac{6\pi GM}{c^2 R(1 - e^2)} \quad (\because a = 2GM/c^2) \quad (4.3.46)$$

となります。太陽にもっと近い水星の場合を具体的に計算¹⁴すると、 $\pi \text{ rad} (= 180 \times 60 \times 60 \text{ 秒})$ 、 $R = 0.387\text{AU}$ 、 $e = 0.2056$ 、 $a = 2GM/c^2 = 2.953 \times 10^3\text{m}$ を入れて

$$\Delta\phi = 4.997 \times 10^{-7} \text{rad/公転} = 0.1031 \text{ 秒/公転}$$

水星の公転周期は 0.241 年とされるので 100 年（1 世紀）では

$$0.1031 \times 100/0.241 \simeq 43 \text{ 秒/世紀}$$

となります。水星が太陽に一番近づく点（近日点）が 100 年間で 43 秒角だけ移動するという予測値は観測値と高精度で一致し、一般相対性理論の正しさを裏付けたことは周知のとおりです。

¹³ もっとも、ニュートン力学でも中心力のポテンシャルエネルギー $U = -a/r$ に小さな摂動項 $\delta U(r)$ を加えると閉じた楕円軌道とはならず $\cos \eta \phi$ となって 1 回転ごとに軌道の近日点がズれていきます。

¹⁴ AU：天文単位，1AU=149,597,870,700m

4.3.8 光線の湾曲

光線が太陽の重力場内を進む場合、重力の影響で光線が太陽の方に引きつけられる現象をシュヴァルトシルド解を用いて見ていきます。光線の進路は常に $ds^2 = 0$ によって決まりますが、光線の場合には常に $d\tau = 0$ でその進路を固有時間 $d\tau$ の関数として表すわけにはいきません。その代わりにパラメータとして λ を用い、惑星の運動のところでやったように $\theta = \pi/2, d\theta = 0$ とすると光線の進路は次の式で決まります。

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (4.3.47)$$

惑星でやった場合と同様に

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = ch = \text{一定}, \quad \frac{dx^0}{d\lambda} = \frac{cb}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)} = \text{一定}$$

が成り立つので、 $dr/d\lambda = (dr/d\phi)(d\phi/d\lambda) = (ch/r^2)dr/d\phi$ を (4.3.47) に入れて整理すると

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} b^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{h^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \frac{h^2}{r^2} = 0 \quad (4.3.48)$$

ここで $u = 1/r$ と変数変換すると $dr/d\phi = -(1/u^2)dr/d\phi$ となり、上式は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \left(\frac{1}{R}\right)^2 = au^3, \quad b/h \equiv 1/R \quad (4.3.49)$$

となります。 u^3 の項が重力場の一般相対論的效果を表しています。右辺の項は左辺の u^2 の a/r 倍なので非常に小さい値です。仮にこれを 0 とおけば、 ϕ で再度微分すると見慣れた調和振動子の微分方程式になりますね。

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \quad (4.3.50)$$

初期条件を $\phi = 0 \rightarrow u = 1/R, \phi = \pi/2 \rightarrow du/d\phi = 0$ とおけば解は

$$u = \frac{1}{R} \cos \phi \longleftrightarrow r \cos \phi = R \quad (4.3.51)$$

次に au^3 を摂動とした (4.3.49) の近似解を求めていきます。この解は (4.3.50) の解から僅かにずれたものと考えられるので、解を

$$u = \frac{\cos \phi + \chi(\phi)}{R} \quad (4.3.52)$$

とにおいて (4.3.49) に入れ、 χ, χ' の 2 次以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \left(\frac{1}{R}\right)^2 - au^3 &\doteq -\sin \phi \frac{d\chi}{d\phi} + \frac{1}{2} \cos \phi \left(2 - \frac{3a \cos \phi}{R}\right) \chi - \frac{a}{2R} \cos^3 \phi \\ &\doteq -\sin \phi \frac{d\chi}{d\phi} + \chi \cos \phi - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right) \cos^3 \phi = 0 \end{aligned}$$

となるので、解くべき微分方程式は 1 階微分方程式に還元されます。

$$\sin \phi \frac{d\chi}{d\phi} - \chi \cos \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right) \cos^3 \phi = 0 \quad (4.3.53)$$

これは容易に積分できて、解は

$$\chi = \frac{a}{R} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\phi\right) + C_1 \sin \phi \quad (C_1: \text{積分定数}) \quad (4.3.54)$$

と得られます。必要な解は x 軸に対して対称な ϕ についての偶関数ですから積分定数 $C_1 = 0$ 。

したがって、光線の進路を表す式は (4.3.52) より

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left(\cos \phi + \frac{3a}{4R} - \frac{a}{4R} \cos 2\phi \right) = \frac{1}{R} \cos \phi + \frac{a}{2R^2} (1 + \sin^2 \phi) \quad (4.3.55)$$

光線の湾曲を見積もるために、光線の入射角と無限遠に飛び去る方向を調べます。無限遠での光線の方角は $r = \infty$ となる時の ϕ を求めればよいので、もし $\chi = 0$ なら $\phi = \pm \pi/2$ なので、求める角が

$$\phi = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \quad (\theta \ll 1) \quad (4.3.56)$$

のとき $r \rightarrow \infty$ とすれば、(4.3.55) より θ の 1 次の項までとって

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + \frac{a}{2R^2} \left\{ 1 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right\} \\ &= -\frac{a}{2R^2} \sin^2 \theta - \frac{1}{R} \sin \theta + \frac{a}{R^2} \doteq -\frac{1}{R} \theta + \frac{a}{R^2} = 0 \quad (\because \sin \theta \simeq \theta) \\ &\therefore \theta \simeq \frac{a}{R} \end{aligned} \quad (4.3.57)$$

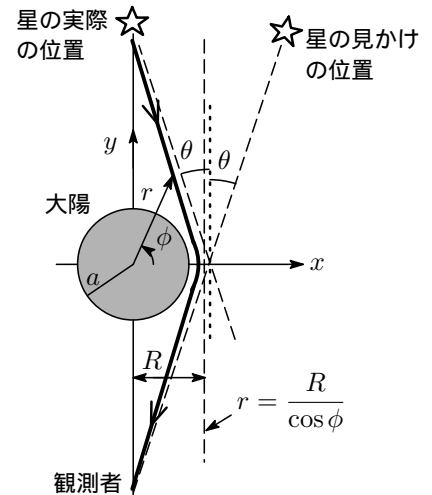
したがって光線の屈折角は次式で与えられます。

$$2\theta = \frac{2a}{R} \quad (4.3.58)$$

光線が太陽表面ギリギリを通過する場合に屈折角は最大となります。その値は、 R を太陽の半径 $R = 6.96 \times 10^8 \text{m}$ 、 a を太陽のシュヴァルツシルド半径 $a = 2.94 \times 10^3 \text{m}$ とすると

$$2\theta = \frac{2 \times 2.94 \times 10^3}{6.96 \times 10^8} = 8.45 \times 10^{-6} \text{rad} = 1.743 \text{秒}$$

となります。第 1 次大戦後、イギリスの天文学者エディントン (1882 - 1944) の肝いりで光の屈折を観測しようとする動きが本格化し、1919 年の皆既日食を利用してイギリスから 2 つのグループの観測隊が派遣され、アフリカ西海岸のプリンシペ島で測定された結果は 1.61 ± 0.40 秒で、ブラジルのソブラルに派遣された観測隊も 1.98 ± 0.16 秒という結果を得ました。ニュートン力学から求められた屈折角はその半分程度の値¹⁵で、一般相対論の予言が概ね実測値と一致することから一躍有名になったわけですね。



《参考》ニュートン力学で光線の湾曲を見積もってみると。。

光速 c で飛んでくる質量 m の粒子 (光) が P 点で太陽の重力を受けその速度の x 成分が加速されたとします。そうすると

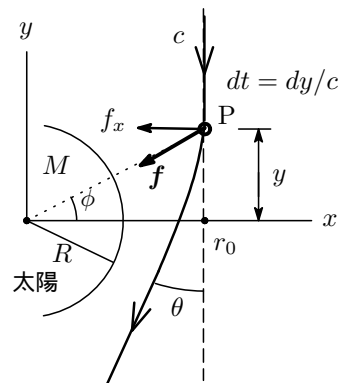
$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -f_x = -f \cos \phi = -\frac{GMm}{r_0^2 + y^2} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} = -GMm \frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \\ \therefore v_x &= -GM \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} dt = -\frac{GM}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} dy = -\frac{2GM}{cr_0} \end{aligned}$$

r_0 を太陽の半径 R に等しいとおくと光線の屈折角は

$$\tan \theta \simeq \theta = \frac{|v_x|}{c} = \frac{2GM}{Rc^2} = \frac{a}{R} = 0.87 \text{秒} \quad (a = 2GM/c^2)$$

つぶやき … ニュートン力学にもシュヴァルツシルド半径が埋もれていたとは。。

誇張した図となっています



¹⁵ 光の粒子説を唱えたニュートンは、光は重力で曲げられる？と考えていたようです。1801年にドイツの物理学者 J.G.Soldner (1776 - 1833) は天体の万有引力による光線の曲がる角度を計算し 0.84 秒を得たとのことです。アインシュタインは 1911年に重力による光の曲がり方を計算し 0.83 秒を得ています (ゾルトナーの結果と同じ!)。ところが、実はこの計算にはミスがあり、1915年に改めて屈折角 1.75 秒を得ています。

参考文献

- [1] 吉田伸夫「思考の飛躍・アインシュタインの頭脳」新潮選書,2010
一般相対性理論の建設に向けたへのアインシュタインの思考の航跡が詳しく描かれています。大変勉強になりました。
- [2] 砂川重信「相対性理論の考え方」岩波書店, 1996
「理論電磁気学」の著者としても有名で、著者は内山龍雄の弟子。少ないページ数で特殊から一般相対論までわかりやすく書かれており、初学者の入門書として最適の1冊です。
- [3] 吉田伸夫「完全独習相対性理論」講談社,2016
一般相対論の記述が少し物足りない感じもするが、詳細な数式展開よりも相対性理論の考え方の理解に重点を置いた好著で、ふむふむなる程と納得することも多くあります。
- [4] 窪田高弘, 佐々木隆「相対性理論」裳華房,2003
わかりやすく丁寧に書かれていて、入門書として最適。
- [5] 須藤靖「一般相対論入門」日本評論社,2010
上記の本に比べ数学的な記述が詳しい。両書を併読すると効果的かも。両書ともに豊富な演習問題とその詳細な解答がついており、知識を深めるのに役立ちます。。
- [6] 三尾典克「相対性理論・基礎から実験的検証まで」サイエンス社,2007
少し数学的な素養が必要かも知れませんが、しっかり書かれた好著と思います。
- [7] 内山龍雄「相対性理論」岩波全書,1977
「もし本書を読んでも。これが理解できないようなら、もはや相対性理論を学ぶことはあきらめるべきであろう」というフレーズで有名な本。当方はいままでなんと諦めかけたことか。。幸い、いまは上述のような好著が多く出版されているので、それらを読んだから再度内山の本に挑戦するのも面白いかなと。。
- [8] テンソル談義（全6話）
- [9] 特殊相対性理論
この2つの資料は当HPに掲載。