相対性理論 Tips

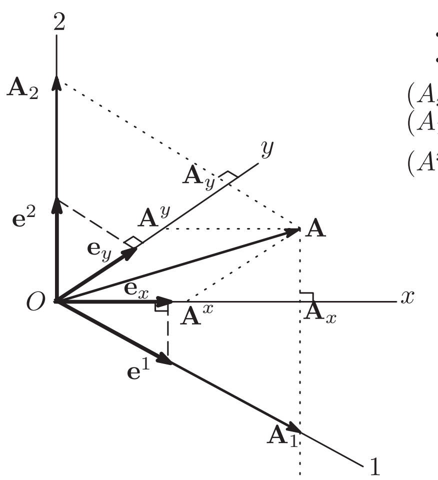
〜反変ベクトルと共変ベクトル〜

KENZOU

2008 年 5 月 16 日

♣ 春も過ぎてぼちぼち初夏を迎えようかというある日、履きなれたスニーカで足元をかため、早朝の太陽を背に浴びて キャサリン が K 氏 をたずねてきた。

- キャサリン：K さん、こんにちわ〜、キャサリンで〜す。ごめんなさい、ひょとっしてたたき起こしたのかしら。
- K 氏：*Oh*！キャサリン、こんにちわ。僕をたたき起こしたかって、そんなことないよ、もうとっくに起きて朝の散歩を終わったところさ。久しぶりだね、こんなに朝早くどうしたんだ。
- キャサリン：それならよかったわ。いや実はね、いま特殊相対性理論を勉強し始めているのだけど、いわゆる斜交座標というのがでてくるじゃない。今まで慣れ親しんできた x, y 2 次元直交座標では、ベクトル成分は x, y の 2 つで表せていたものが、斜交座標ではやれ共変成分だ、やれ反変成分だとうるさいこと。たしかに図を描けば成分の取り方は 2 通りあることは分かるんだけど、この名前の由来や、要するにイメージがいまいちピンとこないのよ。できればこの辺のお話を聞ければと思って、それとテンソルのお話もついでに聞ければと思ってきたの。
- K 氏：そうなんだ、たしかに共変とか反変の話は最初に躓きやすいよね。x, y 軸を斜交座標として x 軸に直交する軸を"2"に、y 軸に直交する軸を"1"としよう。それぞれの軸の単位ベクトル（基底ベクトル）を図のようにとると、x, y 軸のなす角を狭めれば"1","2"軸のなす角は広がり、逆に x, y 軸のなす角を広げればこんどは逆に"1","2"のなす角が狭まる、つまり、これらの 2 つの座標系はいわば相反する動きをするんだね。この辺は、鉛筆をもって確かめるといいよ。ところでここで重要なことを言っておくと、基底ベクトル $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ と $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ の関係なんだ。一部は先ほど言ったけど、この内積を見てみよう。そうすると、$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}^2 = 0,\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}^1 = 0, \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}^1 = 1, \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}^2 = 1$ となっていることがわかる。格好よく書けば $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ となる。δ_i^j というのはクロネッカーの δ といって $i \neq j$ なら 0 で、$i = j$ なら 1 というやつだね。
- キャサリン：クロネッカーの δ で $i = j$ の場合 1 になる、例えば $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}^1 = 1$ というのをもう少し詳しく説明いただけるかしら。
- K 氏：了解。$\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}^1$ のなす角を θ とすると $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}^1 = |\mathbf{e}_x||\mathbf{e}^1|cos\theta = |\mathbf{e}_x|^2 = 1$ ということなんだ。ところで、いま言ったような $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ という関係の基底を**双対基底**と呼んでいるんだけど、このあたりの詳しいことは、このサイト (http://www12.plala.or.jp/ksp/vectoranalysis/index.html) に素晴らしい解説が載っているので是非参照しておいて。さぁ、それではそろそろはじめようか。
- キャサリン：よろしくお願いします。



・添字が右下：共変成分
・添字が右上：反変成分

(A_x, A_y), (A_1, A_2) 共変成分 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$共変基底ベクトル

(A^x, A^y) 反変成分 $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ 反変基底ベクトル

■共変ベクトルと反変ベクトル

ベクトル $\mathbf{A}$ というのがあって、これを 2 次元の斜交座標系 (x, y) で捉えてみよう。この座標系に固定した単位ベクトル (基底ベクトル) を $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ とする。この座標系でベクトル $\mathbf{A}$ を計った目盛りを $(\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^y)$ とする。そうするとベクトル AX は「平行四辺形の法則」により

$$\mathbf{A} = A^x\mathbf{e}_x + A^y\mathbf{e}_y \tag{1}$$

と表され、この (A^x, A^y) を**反変成分**と言う。次に、y 軸に直交するように 1 軸を、x 軸に直交するように 2 軸をとり、その座標系に固定した単位ベクトルを $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ とする。ベクトル $\mathbf{A}$ から x 軸、y 軸にそれぞれ垂線を下ろしたところの目盛りを (A_x, A_y) とし、これを**共変成分**と呼ぶ。といってもベクトル $\mathbf{A}$ は、冒頭の図から明らかなように

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y$$

とは**表されない**ことに注意が必要（このへんの話は後ほど計量行列の項で詳しく見てみます)。ベクトル $\mathbf{A}$ は平行四辺形の法則」により

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}^1 + A_2\mathbf{e}^2 \tag{2}$$

ここで、三角形 OA_1A_x と $O\mathbf{e}^1A^x$、三角形 OA_2A_y と $O\mathbf{e}^2\mathbf{e}_y$ に注目すると、それぞれ相似の関係になっていることがわかる。つまり

$$\mathbf{e}_x : A_x = \mathbf{e}^1 : A_1 \tag{3a}$$

$$\mathbf{e}_y : A_y = \mathbf{e}^2 : A_2 \tag{3b}$$

の関係がある。さて、

- A_x、A_y という目盛りは $x - y$ 座標系において、単位ベクトル $\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$ で計った目盛りの値
- A_1、A_2 という目盛りは $1 - 2$ 座標系において、単位ベクトル $\mathbf{e}^1$、$\mathbf{e}^2$ で計った目盛りの値

であった。座標系 $(1, 2)$ に固定された単位ベクトル $\mathbf{e}^1$、$\mathbf{e}^2$ は、座標系 (x, y) に固定された単位ベクトル $\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$ の座標系 $(1, 2)$ への投影である。つまり、$\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$ が引き伸ばされたものが $\mathbf{e}^1$、$\mathbf{e}^2$ であるということになる[1]。くどいようだが、目盛りのスケールが変わったことに注意してほしい。ということで (3) は、実は

$$A_x = A_1 \tag{4a}$$

$$A_y = A_2 \tag{4b}$$

ということになる。この辺りの事情は図を見るかぎりよく分からないので注意を要する。以上、整理すると、ベクトル $\mathbf{A}$ は次の 2 つの表現で表すことができることになる。

$$\mathbf{A} = A^x\mathbf{e}_x + A^y\mathbf{e}_y \tag{5a}$$

$$= A_1\mathbf{e}^1 + A_2\mathbf{e}^2 \tag{5b}$$

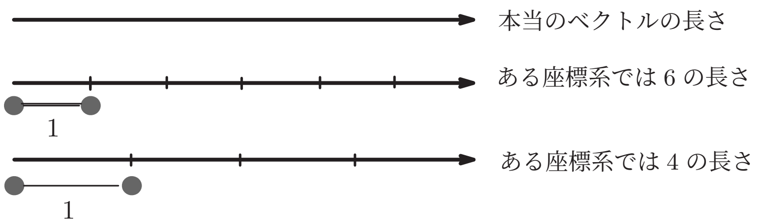
(5) は**反変成分と共変基底ベクトル**という組合せ、(17) は**共変成分と反変基底ベクトル**の組合せになっている。ベクトルを 2 つの方向に分解する時は、必ずこのように**共変と反変のペア**になることは重要なポイントなので、憶えておいてほしい。

【補足】―――――――――――――――――
冒頭の「物理のかぎしっぽ」から引用させていただいた素晴らしい解説を載せておきます。

『基底ベクトルの長さ (基準) が 2 倍になれば，座標成分 (見え方) は 1/2 に』『基底ベクトルの長さ (基準) が 4 倍になれば，座標成分 (見え方) は 1/4 に』と，基底ベクトルの長さと，その座標における座標成分とは反比例の関係にならなければ，本当のベクトルの長さを不変に保てないことが分かると思います.『本当のベクトルの長さは座標系によらない』ということを覚えていれば，基底ベクトルの座標変換と成分の座標変換が，ちょうど逆の関係になることが，むしろ当然のように思えてこないでしょうか.

[1] 座標 (x, y) を反変系、$(1, 2)$ 共変系と考えるとここで言っていることは逆になります。

座標変換とはベクトルを観察する視点を変更することであって，ベクトルそのものの本当の長さをかえること
ではありません．あくまで，観察者の見方の変化です．



基底ベクトルの座標変換

ここでは基底ベクトルの座標変換を見ていく。基底ベクトル $(\mathbf{e}_i)$ を $(\mathbf{e}'_i)$ $(i=1,2,3)$ に変換してみよう。この変換は行列形式で書くと次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(a_i^j) は変換行列、a_i^j を変換係数と呼ばれる。変換後の基底ベクトルは

$$\mathbf{e}'_i = a_i^1\mathbf{e}_1 + a_i^2\mathbf{e}_2 + a_i^3\mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} a_i^k \mathbf{e}_k \equiv a_i^k \mathbf{e}_k \tag{7}$$

となる[2]。この逆変換は (6) の行列 (a_i^j) の逆変換が存在し、それを (b_i^j) とすると、

$$b_i^j = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

単位行列を $\mathbf{I}$ として $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{I}$ であるから、各成分の間には次の関係式が成り立つ。

$$a_i^k b_k^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{9}$$

ということで、基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ は、次のように書ける。

$$\mathbf{e}_i = b_i^1\mathbf{e}'_1 + b_i^2\mathbf{e}'_2 + b_i^3\mathbf{e}'_3 = \sum_{k'=1}^{3} bi^k \mathbf{e}'_k \equiv bi^k \mathbf{e}'_k \tag{10}$$

(10) に (7) に入れると

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_i^k a_k^j \mathbf{e}_j \tag{11}$$

これから、変換係数には次の関係が要求される[3]。

$$\sum_{k}^{3} b_i^k a_k^j = b_i^k a_k^j = \delta_i^j \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{12}$$

ベクトル成分の座標変換

次に、ベクトル成分の変換を調べていくことにする。反変基底（$\mathbf{e}^i$) と共変基底 $(\mathbf{e}_j)$ は

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{13}$$

[2]同じサフィックスが上下に一つずつ現われるときには、合計記号を省略するというアインシュタイン規約を用いた。
[3]例えば $\mathbf{e}_1 = b_1^k a_k^1 \mathbf{e}_1 + b_1^k a_k^2 \mathbf{e}_2 + b_1^k a_k^3 \mathbf{e}_3$ より $b_1^k a_k^1 = 1$ 他の係数は 0 となります。この関係式は先ほどでてきましたね。

という関係にあった。この関係を使うと、(7) の変換係数は基底の内積を使って

$$a_i^k = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}^k \tag{14}$$

と求まる。同様にして (10) の変換係数は

$$b_i^k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'^k \tag{15}$$

ベクトル $\mathbf{A}$ は (2) より

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}^1 + A_2\mathbf{e}^2 + A_3\mathbf{e}^3 = A_k\mathbf{e}^k \tag{16}$$

と表される。この両辺に $\mathbf{e}_i$ をかけると

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{e}_i \cdot A_j\mathbf{e}^j = A_j\delta_i^j = A_i \\ &= A_k\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = a_i^k A_k \end{aligned}$$

これから

$$A_i = a_i^k A_k \tag{17}$$

と求まる。この変換式は基底ベクトルの座標変換 (7) と同じ変換式ということに注目しよう。このように、**基底ベクトルと同じ変換式に従うベクトル$\mathbf{A} = (A_1,\, A_2\, A_3)$ を共変ベクトル**と呼んでいる（ "共 "に変わるということか)。
今度はベクトル $\mathbf{A}$ を

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3 = A^k\mathbf{e}_k \tag{18}$$

とおいて、両辺に $\mathbf{e}^i$ をかけると

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{e}^i \cdot A^j\mathbf{e}_j = A^j\delta_j^i = A^i \\ &= A^k\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = a_k^i A_k \end{aligned}$$

これから

$$A^i = a_k^i A^k \tag{19}$$

と求まる。(17) の**変換係数の添字が上下で反転**していることに注目。この変換式に従うベクトルを**反変ベクトル**と呼んでいる。

計量行列とベクトルの長さ

この項では斜交座標で顔をだす**計量行列**というものを定義していく。
共変成分は下図からわかるように、ベクトル $\mathbf{A}$ と共変基底ベクトル $\mathbf{e}_1$ の内積で与えられる。

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \quad (i = 1,\, 2,\, 3)$$

具体的に計算すると

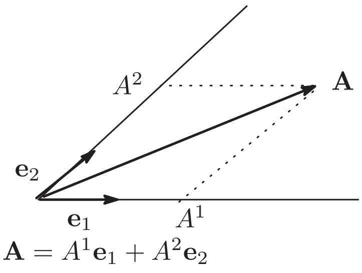
$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = (A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_i = A^1\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i + A^2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_i + A^3\mathbf{e}_i \tag{20}$$

となる。ここで、$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i$ という基底ベクトルの内積がでてきた。普段慣れている直交座標系では $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$ などは 0 になるから、$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i$ という内積などは特に気にされなかったと思うが、いまは斜交座標なのでこのような量がでてくることになる。つまり、この内積は**斜交座標系を特長づける量**だということになる。そこで、この量をあらためて

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (i,\, j = 1, 2, 3) \tag{21}$$

と書き、g_{ij} は**計量行列**と呼ばれる。計量行列は、すぐわかるように、

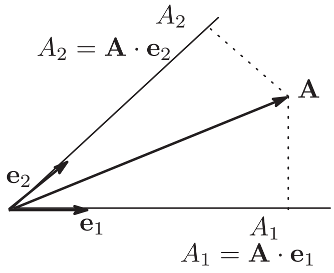
$$g_{ij} = g_{ji}$$



反変成分

$A_i = g_{ij}A^j$

$A^i = g^{ij}A_j$



共変成分

と対称行列であり、その逆行列を $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$ と書くと

$$\sum_{\mu=1}^{2} g^{i\mu}g_{\mu j} = g^{i\mu}g_{\mu j} = \delta^i_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{22}$$

となる。ついでに添字が上についた次の量も定義しておくが、これも計量行列と呼ばれる。

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \quad (i,\, j = 1, 2, 3) \tag{23}$$

(20) は、計量行列を使うと

$$A_i = A^1 g_{1i} + A^2 g_{2i} + A^3 g_{3i} = \sum_{\mu=1}^{3} A^\mu g_{\mu i} = g_{\mu i}A^\mu \tag{24}$$

と書ける。(24) の逆の関係式は、両辺に g^{ki} をかけると

$$g^{ki}A_i = g^{ki}g_{i\mu}A^\mu = \delta^k_\mu A^\mu = A^k$$

となって

$$A^k = g^{k\mu}A_\mu \tag{25}$$

と得られる。ここで g^{ij},g_{ij} は**添字を上げ下げする効果**があることに留意しよう。次に、ベクトル $\mathbf{A}$ の長さを求めてみよう。ベクトルの長さは内積 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ で与えられるので

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}|^2 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^2\mathbf{e}_3)^2 \\ &= (A^1)^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + 2A^1A^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + 2A^2A^3\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 + 2A^2A^3\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 + (A^2)\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 \\ &= g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu \\ &= A_\nu A^\nu \end{aligned} \tag{26}$$

となる。この式は (26) は相対論でよくお目にかかるものである。
この項の最後に、計量行列が座標変換でどのような変換を受けるのかを見ておくことにする。

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = (A^\mu_i\mathbf{e}_\mu)\cdot(A^\nu_j\mathbf{e}_\nu) = A_i\mu A^\nu_j\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_n u \\ &= A^\mu_i A_j\nu g_{mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu}A^\mu_i A^\nu_j \end{aligned} \tag{27}$$

■ 2 階テンソル

いよいよテンソルの話に入ってきました。テンソルには 2 階テンソルを始め、3 階、4 階、⋯ と高階テンソルと呼ばれるものや、混合テンソル等々、いろんな種類があることは聞かれたことがあると思います。ここではもっともシンプルな 2 階テンソルを見ていくことにします。

2 階テンソル[4]とは任意のベクトルを別のベクトルへ変換する線形作用素である。具体的に言えば、ある線形変換を T として任意の数を α、任意のベクトルを $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ とすると

$$T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_1) + T(\mathbf{a}_2) \tag{28a}$$

$$T(\alpha\mathbf{a}) = \alpha T(\mathbf{a}) \tag{28b}$$

が成り立つ[5]。2 階テンソルに添字が 2 つあり、上上、上下、下下の組合せがあるこが、添字の上下に応じて混合テンソル (T_i^j)、共変テンソル (T_{ij})、反変テンソル （T^{ij}) と呼んでいる。例えば、共変ベクトルを共変ベクトルに変換する関係式（17) や反変ベクトルを反変ベクトルに変換する関係式 (19) の変換係数は混合テンソルの例で、(24)(25) の計量行列 (計量テンソル) は、それぞれ反変テンソル、共変テンソルと呼ばれる。

$$\left.\begin{array}{l} \text{共変ベクトル} \to \text{共変ベクトル：} A_i = a_i^k A_k \\ \text{反変ベクトル} \to \text{反変ベクトル：} A^i = a_k^i A^k \end{array}\right\} a_i^j \ \text{：}\textbf{混合テンソル}$$

$$\begin{array}{lll} \text{共変ベクトル} \to \text{反変ベクトル：} A_i = g_{ij} A^j & g_{ij} & \text{：}\textbf{共変テンソル} \\ \text{反変ベクトル} \to \text{共変ベクトル：} A^i = g^{ij} A_j & g^{ij} & \text{：}\textbf{反変テンソル} \end{array}$$

テンソルの座標変換

それでは、基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ はテンソル T によってどのように変換されるか見ていこう。テンソル T で変換されたベクトルは基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ の一次結合で表されるので、

$$\left.\begin{array}{l} T(\mathbf{e}_1) = T_1^1\mathbf{e}_1 + T_1^2\mathbf{e}_2 + T_1^3\mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_2) = T_2^1\mathbf{e}_1 + T_2^2\mathbf{e}_2 + T_2^3\mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_3) = T_3^1\mathbf{e}_1 + T_3^2\mathbf{e}_2 + T_3^3\mathbf{e}_3 \end{array}\right\} \longrightarrow \ T(\mathbf{e}_i) = T_i^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (i = 1, 2, 3) \tag{29}$$

と表せる。ここで、T_i^j はテンソル T の**混合成分**と呼ばれる。次に、計量行列 $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ であることを思い出し、(29) の両辺に $\mathbf{e}_i$ をかけ、その量を T_{ij} と書くと

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot T(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (T_i^\mu \mathbf{e}_\mu) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\mu \, T_j^\mu \\ &= g_{i\mu} \, T_j^\mu \end{aligned} \tag{30}$$

となる。この T_{ij} はテンソル T の**共変成分**と呼ばれる。テンソル成分の座標変換は、(29) と (7) を使って

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_i') &= T_i^{\mu\prime} \mathbf{e}_\mu{}' = T_i^{\mu\prime} (a_\mu^\nu \mathbf{e}_\mu) \\ &= a_\mu^\nu T_i^{\mu\prime} \, \mathbf{e}_\nu \end{aligned}$$

となる。一方、左辺は

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_i') &= T(a_i^\mu \mathbf{e}_\mu) = a_i^\mu T(\mathbf{e}_\mu) \\ &= a_i^\mu T_\mu^{\nu\prime} \, \mathbf{e}_\nu \end{aligned}$$

これより

$$a_i^\mu T_\mu^\nu = a_\mu^\nu T_i^{\mu\prime} \tag{31}$$

が得られる。(31) の両辺に (a_i^j) の逆行列 (A_ν^ξ) をかけると

$$A_\nu^\xi \, a_i^\mu \, T_\mu^\nu = A_\nu^\xi \, a_\mu^\nu \, T_i^{\mu\prime} = \delta_\mu^\xi T_i^{\mu\prime}$$

となって、左辺右辺を入れ替えれば

$$T_i^{\xi\prime} = A_\nu^\xi \, a_i^\mu \, T_\mu^\nu \tag{32}$$

---

[4]一般に n 個の任意のベクトル $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して実数値 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を対応させる関数 T があって，それぞれのベクトル変数について線形性 $T(x1, \cdots, x_r + xr', \cdots, x_n) = T(x_1, \cdots, xn) + T(x_1, \cdots, xr', xn)$, $T(x1, \cdots, \alpha x_r, \cdots x_n) = \alpha T(x1, \cdots, x_r, xn)$ が成り立つとき，関数 T を n 階のテンソルといい，n をそのテンソルの階数と呼んでいます。

[5](28) は線形作用素の定義。

が得られる。これがテンソル T の**混合成分** T_i^j **の座標変換式**である。
次に (34) の共変成分の座標変換を調べよう。上と同様にして

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= \mathbf{e}_i{}' \cdot T(\mathbf{e}_j{}') = a_i^\mu \mathbf{e}_\mu \cdot T(a_j^\nu \mathbf{e}_\nu) = a_i^\mu a_j^{nu} \mathbf{e}_\mu \cdot T(\mathbf{e}_\nu) \\ &= a_i^\mu a_j^\nu T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{33}$$

が得られる。これが、テンソル T の**共変成分** T_{ij} **の変換式**となる。さて、混合、共変とやってきたから、残る反変の変換式は？ということになるが、これは (33) の添字を上下に上げ下げしてやればいいだけの話となる。つまり

$$T^{ij\prime} = a_\mu^i a_\nu^j T^{\mu\nu} \tag{34}$$

これがテンソル T の**反変成分** T^{ij} **の変換式**となる。

♣ *Q&A* ———

- K 氏：以上だけど、わかってくれた？　まだまだ言い足りないことが沢山あると思うけど、それはまた別の機会としよう。ちょっと疲れたからね。。。
- キャサリン：ありがとう、お疲れさまでした。なんとなくわかったような気になってきたわ。しかしまぁ、世の中真っ正直に見ていたら気付かなかったものが、斜めに見るとその重なりが解けて実態が見えてくるといった感じね。粒子に反粒子というようになにかペアーになっている構造が世の中の実態の構造なのかしら。双対というのは、話は飛ぶけどディラックのブラケットなんかを勉強する時には、その辺の知識があれば理解も深まりそうね。教えて頂いたサイトで勉強するわ。
- K 氏：うん、がんばってね。斜交座標はまだ座標軸がまっすぐたっだよね。世の中いろいろあって、座標が曲がっている曲線座標系というのもあるだろう。地球儀をよく例に取り上げられると思うけど。この辺りの話になると一般相対論の世界に入っていく、僕にはまだワカラン世界だ。キャサリン に負けないように僕も勉強していこうと思うよ。ところで、物性論によくでてくる逆格子というのがあるだろ。双対基底の話と引っ掛けてこのあたりもちょっと調べておくといいと思うよ。
- キャサリン：逆格子ベクトルね。そういえば、話は共通しているみたい。調べてみるわ。まっ、そういうことで、今日のお話をもう一度復習してみるわ。わからないことがでてきたらまたよろしくお願いします。今日は本当にありがとう。そろそろお昼ね。お礼にお昼をご馳走したいとこなんだけど、これから彼と昼食の約束をしているので、悪いけどこれで失礼します。
- K 氏：それはお楽しみなことだね。僕の方は気にしなくていいから、行ってらっしゃい。それじゃね～。

（了）