

乱流強制対流熱伝達

Turbulent Forced Convection Heat Transfer

KENZOU

2023.03.28

(桜満開期を迎えつつ)

§ 1.

プランドルの境界層方程式

レイノルズ数 ($Re = UL/\nu = \text{慣性力}/\text{粘性力}$) が小さい間は流れに攪乱を与えても、下流にいくにしたがって乱れは粘性のために減衰・消滅し、もとの層流境界層が形成されますが、臨界レイノルズ数¹を超えると壁面に沿う速度境界層内の整然とした層状の流れ、層流(laminar flow)は、乱れの大きな乱流(turbulent flow)に遷移します。乱流境界層内の断面を観察すると、壁面のごく近傍では固体壁面と粘性の影響により流れの乱れが抑制された、層流に近い非常に薄い層である粘性底層(viscous sublayer)が形成されていて、次に層流と乱流が混ざりあった過渡的な遷移層(transition layer)があり、その外側に乱流層(turbulent layer)と呼ばれる領域が形成されています。乱流境界層内では、速度、圧力、温度などの値が激しく変動していますが、連続の式、運動量方程式(NS: ナビエ・ストークス方程式)、質量保存の式(連続の式)、エネルギー方程式などは非定常項を含めておけば成立します。したがって、原理的にはこれらの式を解くことで層流場でやったと同様に熱伝達率を求めることは可能な筈ですが、実際問題としてはこの複雑な式を解くことは現在の技術では不可能とされています。

さて、2次元NS方程式²と連続の式(質量保存則)は、外力を考慮しない場合

$$\begin{aligned} x \text{ 方向の運動方程式: } & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ y \text{ 方向の運動方程式: } & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \text{連続の式 (質量保存): } & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

と表されました。このままでは手のつけようがないので、境界層内におけるNS方程式の簡略化を考えます。そのポイントは方程式の各項の相対的な大きさを比較し、小さい項は無視するということです。そこで、相対的な大きさを比較するために(1.1)を無次元式に書き換えてやります。具体的には、物体の壁面に沿って x 軸、壁面に垂直に y 軸をとり、物体の大きさを代表長さ L 、主流の速度を U_∞ 、代表時間を U_∞/L 、主流の動圧 $\rho U_\infty^2/2$ として次の無次元量を定義し、(1.1)を無次元方程式に書き換えます³。

$$\left(\begin{array}{l} \bar{x} = x/L, \quad \bar{y} = y/L, \quad \bar{t} = t/(L/U_\infty) \\ \bar{u} = u/U_\infty, \quad \bar{v} = v/U_\infty, \quad \bar{p} = p/\rho U_\infty^2 \\ Re = U_\infty L/\nu \end{array} \right) \quad (1.2)$$

¹平板上の流れでは $Re^c \simeq 5 \times 10^5$ 、円管内流れでは $Re^c \simeq 2300$

²左辺は時間微分項と慣性項あるいは対流項、右辺は圧力項と粘性項あるいは拡散項などと呼ばれます。

³仮に壁面が湾曲していてもこの曲率半径が境界層の厚み δ に比べて十分大きい限りこの議論は成立します。

各項は

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}, & u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_\infty^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, & v \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \frac{U_\infty^2}{L} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad \dots \end{array} \right]$$

のようになるので、これらを (1.1) に入れて整理すれば次の無次元方程式となります。

$$\begin{aligned} x \text{ 方向: } & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ y \text{ 方向: } & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ \text{連続の式: } & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

次に各項の相対的な大きさを比較します。 x のとりうる大きさは物体の代表長さ L まで、 y のとりうる大きさは境界層の厚さ δ まで、境界層内の速度 u の大きさは U_∞ 程度までと考えられるので、 \bar{x} , \bar{u} の大きさは共に 1 程度の大きさを持ち、 \bar{y} は δ/L の大きさをもつと考えられます。連続の式で、 $\partial \bar{u}/\partial \bar{x}$ の大きさは 1 程度と見積もれ、 $\partial \bar{v}/\partial \bar{y}$ も同様に 1 程度の大きさで見積もれますが、 \bar{y} は δ/L 程度の大きさであることから \bar{v} は $\delta/L (\equiv \bar{\delta} \ll 1)$ の大きさと推察できます。ナビエ・ストークスの非定常項 $\partial \bar{u}/\partial \bar{t}$ の大きさは 1 で、 $\partial \bar{v}/\partial \bar{t}$ の大きさは $\bar{\delta}$ 。また、圧力項 $\partial \bar{p}/\partial \bar{x}$ の大きさは 1、 $\partial \bar{p}/\partial \bar{y}$ は $1/\bar{\delta}$ の大きさとなります。これらのことを踏まえて無次元方程式の各項の大きさを判定すると

$$\begin{aligned} x \text{ 方向} & \left\{ \begin{array}{l} \text{左辺: } \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \rightarrow 1, \quad \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \rightarrow 1 \cdot 1, \quad \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \rightarrow \bar{\delta} \cdot 1/\delta \\ \text{右辺: } \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \rightarrow 1/\bar{\delta}^2, \quad \therefore Re \rightarrow 1/\bar{\delta}^2 \end{array} \right. \\ y \text{ 方向} & \left\{ \begin{array}{l} \text{左辺: } \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \rightarrow \bar{\delta}, \quad \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \rightarrow 1 \cdot \bar{\delta}, \quad \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \rightarrow \bar{\delta} \cdot 1 \\ \text{右辺: } \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \rightarrow 1/\bar{\delta}, \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \rightarrow \bar{\delta}, \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \rightarrow 1/\bar{\delta}^2, \quad \therefore Re \rightarrow 1/\bar{\delta}^2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

連続の式は

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \rightarrow 1$$

のようになります。なお、レイノルズ数の大きさは両辺の大きさが同程度になることから決まります。

ここで $\bar{\delta}$ 以下の大きさの項は無視して (1.3) をもとの次元のある式に戻すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

となります (y 方向の運動方程式が抜け落ちた!)。これをプランドルの境界層方程式⁴と呼んでいます。上の第 2 式は、境界層内の圧力 p は壁面に垂直な y 方向には変化せず一定で、境界層外の圧力と同一であることを意味します。境界層の外側では u の y に関する微分項はすべて 0 となるので、 $u \rightarrow u_\infty$ として

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.5)$$

⁴ 「流体力学講話・つまみ食い(その 8)」も参照されたし。

さらに、流れが定常流であれば $\partial u_\infty / \partial t = 0$ より

$$u_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\infty^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad \therefore p + \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 = \text{一定} \quad (1.6)$$

となり、ベルヌイの式となります。また、 u_∞ は常に一定に保たれるので圧力勾配 dp/dx はゼロ。

§ 2.

乱流における境界層方程式

乱流の場では速度 u 、圧力 p 、温度 T が時間平均値の周りで激しく変動していますが、速度成分、圧力成分、温度の瞬時値は時間平均値と変動値に分けられると考え、瞬間値 u, v, p, T を

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p', \quad T = \bar{T} + T' \quad (2.1)$$

とおきます (図 1 参照)。上付きバーは時間平均値、ダッシュは変動値で、(2.1) をレイノルズ分解⁵といいます。乱れの変動時間に比べて十分長い時間 t での時間平均値は 0 と考えられるので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} u' dt = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} v' dt = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} p' dt = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} T' dt \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$(\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{p}' = \bar{T}' = 0)$$

(2.1) を境界層方程式 (1.4) に入ると

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \\ \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

第 3 式の両辺に $(\bar{u} + u')$ を掛けて第 1 式に足して整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'}{\partial t} + 2(\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + \left\{ (\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} + (\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} \right\} \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \\ \therefore & \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u} + u')^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

を得ます。我々が観測するのは瞬時の変動量ではなくある時間平均量と考えられるので、上の式全体の時間平均をとります。この操作は次のルールにしたがっておこないますが、これをレイノルズ平均と呼んでいます。

- 瞬間値の和の平均は各瞬間値の平均の和に等しい： $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$
- 瞬間値の微分量の平均は平均量を微分したものに等しい： $\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$
- 平均量の平均は同じ平均量である： $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$
- 平均量と瞬間値の積の平均は各平均量の積に等しい： $\overline{\bar{f} \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$

⁵O.Reynolds がレイノルズ応力を導出 (1895) したときに使った手法です。

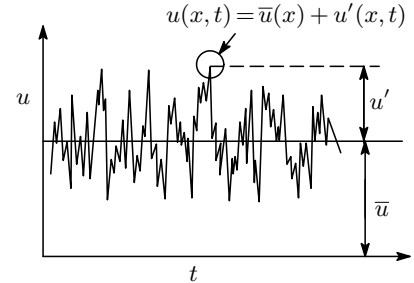


図 1: 乱流の流速の変動

- 変動値の積の平均は0でない： $\overline{f' \cdot g'} \neq 0$

(2.3) の第 1 式の各項は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{u'}}{\partial t} &= \frac{\partial \overline{u'}}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \overline{(\bar{u} + u')^2}}{\partial x} &= \frac{\partial \overline{(\bar{u} + \bar{u}')^2}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} \\ \frac{\partial \overline{(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}}{\partial y} &= \frac{\partial \overline{(\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v')}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{(\bar{u} \cdot \bar{v})}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{(\bar{p} + p')}}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{(\bar{p} + \bar{p}')}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, & \nu \frac{\partial^2 \overline{(\bar{u} + u')}}{\partial y^2} &= \nu \frac{\partial^2 \overline{(\bar{u} + \bar{u}')}}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\end{aligned}$$

となり，これから

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(\bar{u} \cdot \bar{v})}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

左辺はさらに展開しておく

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(\bar{u} \cdot \bar{v})}}{\partial y} = 2\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (2.6)$$

次に，第 2 式の時間平均は

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

第 3 式は

$$\text{連続の式：} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

となります。最後に，(2.8) の両辺に \bar{u} を掛けたものを (2.5) と差し引きすると

$$\text{RANS：} \quad \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

となり，レイノルズ平均をとった NS 方程式：Reynolds Averaged Navier–Stokes equation の頭文字をとり RANS と呼ばれます。ところで，右辺括弧内の \bar{u}'^2 と $\overline{u'v'}$ は同じ大きさですが，境界層での速度場の x 方向の変化は y 方向の変化に比べてずっと小さいはずで， $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$ (境界層近似) とすれば $\partial \bar{u}'^2 / \partial x$ は無視できます。したがって (2.9) は

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} \right) \quad (\nu = \mu/\rho) \quad (2.10)$$

となります。この式の右辺は最後の項 $-\overline{\rho u'v'}$ だけが層流の場合と異なっていて，これはレイノルズ応力⁶と呼ばれます。この項が発生することは次のように考えることができます。 y の位置に x 方向と平行な単位面積を考えます (図 2 参照)。流れの乱れによりこの面を通して単位時間に y 方向に移動する流体塊があり，質量流量は $\rho v'$ ，運動量は $(\rho v')u$ で，輸送される運動量の時間平均は

$$\overline{\rho v' u} = \overline{\rho v' (\bar{u} + u')} = \overline{\rho v' \bar{u}} + \overline{\rho v' u'} = \overline{\rho u' v'} \quad (2.11)$$

流体塊が下から上へ移動する場合 ($v' > 0$) を考えると，流体塊の x 方向の流速は平均的には y の位置のより遅い流速 ($\bar{u} + u' < \bar{u}$) であるので $u' < 0$ と考えられ，逆に，上から下へ移動 ($v' < 0$) する場合は $u' > 0$ と考えられるので，いずれも $u'v' < 0$ となり⁷，こ

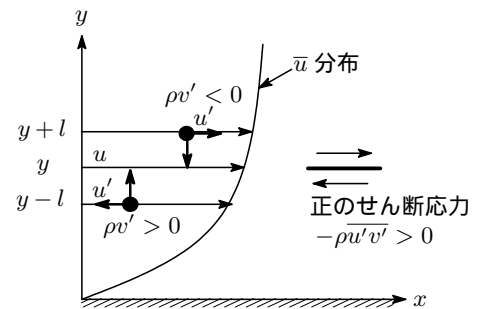


図 2: レイノルズ応力

⁶ $\overline{\rho u'v'}$ の単位は $[\text{kg}/\text{m}^{-3}] \cdot [\text{m}/\text{s}]^2 = \text{kgms}^{-2}/\text{m}^2 = \text{N}/\text{m}^2$ でせん断応力の単位。詳しくは前出のレポートを参照されたい。
⁷ $\overline{u'v'} \neq 0$ かつ $u'v' < 0$: u' と v' は負の相関関係。速い電車に飛び乗ったらうしろに転けるし，遅い電車に飛び乗ったら前のめりになるといったイメージ。

の結果 $-\overline{\rho u'v'} > 0$ で正のせん断応力となっています。

流れに作用する全せん断応力を τ とすれば、層流と乱流のせん断力の総和として

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} \quad (2.12)$$

と表されます⁸。ブジネスク (Boussinesq) はレイノルズ応力を

$$\tau_t = -\overline{\rho u'v'} = \rho \varepsilon_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.13)$$

と表すことを提案し、 ε_m を渦動粘性係数 (coefficient of eddy viscosity) と呼んでいます。 ε_m は動粘性係数 ν のような物性値でなく、流れの状態や位置によって複雑に変化する量で十分に解明されているわけではありません。(2.12), (2.13) より全せん断力は

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \varepsilon_m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\nu = \mu/\rho) \quad (2.14)$$

と表せ、これを使って (2.10) を書き直すと次式となります。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + (\nu + \varepsilon_m) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (2.15)$$

次にエネルギーの式

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

をレイノルズ平均すると

$$\begin{aligned} (\bar{u} + \overline{u'}) \frac{\partial (\bar{T} + \overline{T'})}{\partial x} + (\bar{v} + \overline{v'}) \frac{\partial (\bar{T} + \overline{T'})}{\partial y} &= \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 (\bar{T} + \overline{T'})}{\partial y^2} \\ \therefore \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} - \left(\overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y}} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

となります。この式の簡略化をしていきます。連続の式を使えば

$$\frac{\partial (\overline{u'T'})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{v'T'})}{\partial y} = T' \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} \right) + \bar{u}' \frac{\partial T'}{\partial x} + \bar{v}' \frac{\partial T'}{\partial y} = \bar{u}' \frac{\partial T'}{\partial x} + \bar{v}' \frac{\partial T'}{\partial y} \quad (2.18)$$

と変形でき、左辺の第1項を境界層近似により無視すると

$$\frac{\partial (\overline{v'T'})}{\partial y} = \bar{u}' \frac{\partial T'}{\partial x} + \bar{v}' \frac{\partial T'}{\partial y} \quad (2.19)$$

これを (2.17) に入れると簡略化されたエネルギーの式として次式が得られます。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho c_p \overline{v'T'} \right) \quad (2.20)$$

変動速度 v' と変動温度 T' の積からなる $\rho c_p \overline{v'T'}$ を乱流熱流束 (turbulent heat flux) と呼んでいます。

乱流熱流束の発生は次のように考えることができます。単位時間に y 方向に移動する熱容量は $\rho c_p v'$ で⁹、エンタルピーは $\rho c_p v' T$ 。エンタルピーの時間平均をとると

$$\rho c_p \overline{v'T} = \overline{\rho c_p v' (T + T')} = \rho c_p \overline{v'T'} \quad (2.21)$$

なお、エンタルピーの符号は、流体塊が上方に移動 ($v' > 0$) するとき温度の高い領域から低い領域に入るので y の位置での温度は上昇し $T' > 0$ 、一方、下方へ移動 ($v' < 0$) するとき温度は低下し $T' < 0$ となり、いずれにしても v'

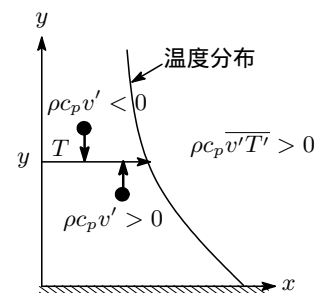


図 3: 乱流熱流束

⁸境界層内部の殆どの領域でレイノルズ応力が圧倒的ですが、壁面近傍の粘性底層では逆に粘性応力が支配的となります。

⁹単位: [J/K·m²·s]

と T' は同符号で常に $\rho c_p \overline{v'T'} > 0$ と正の値となります。

全熱流束を \dot{q} とすると

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \rho c_p \overline{v'T'} \quad (2.22)$$

と表され、右辺の第2項は乱流作用による主流に対して垂直方向への熱流束で、ブジネスクにより

$$\dot{q}_t = -\rho c_p \overline{v'T'} = -\rho c_p \varepsilon_h \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (2.23)$$

の形が提案されています。 ε_h は渦熱拡散率(eddy diffusivity of heat)と呼ばれ、 ε_h も ε_m と同様にその性質は十分に解明されてはいません。いずれにしても全熱流束は

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \dot{q}_t = -(\lambda + \rho c_p \varepsilon_h) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (2.24)$$

これを少し変形すれば

$$\frac{\dot{q}}{\rho c_p} = -(a + \varepsilon_h) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (a = \lambda / \rho c_p: \text{熱拡散率}) \quad (2.25)$$

となり、これを使って(2.20)を書き直すと

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = (a + \varepsilon_h) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \quad (2.26)$$

が得られます。流体の物性値であるプラントル数 $Pr (= \nu/a)$ に対して、乱流の場合には渦動粘性係数 ε_m と渦熱拡散率 ε_h との比

$$Pr_t = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h} \quad (2.27)$$

を乱流プラントル数(turbulent Prandtl number)と呼び、 $\varepsilon_m, \varepsilon_h$ の本質は不明確なもの実際の熱伝達解析では Pr_t を“1”あるいは定数と仮定して解析がおこなわれます。

・ブランドルの混合距離理論 ブランドルは乱流輸送の機構を記述する物理モデルに、気体分子の平均自由行程というアイデアから混合距離を着想し、せん断力(摩擦応力)を次式で表すことを提案しました。

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|^2 \quad (2.28)$$

l は混合距離(mixing length)で、流体塊が入り交じる距離を表します。

$P - P'$ 面の上下に距離 l だけ離れた位置にある乱流の流体塊を考えます。上で述べたようにこれらの流体塊が $P - P'$ 面をよぎって上・下に移動することにより運動量の輸送が起きますが、いま、 $P - P'$ 面での x 方向の速度変動値 u' を考えます。 $y + l, y, y - l$ での平均速度は

$$\begin{cases} \bar{u}(y+l) \doteq \bar{u}(y) + l(d\bar{u}/dy) \\ \bar{u}(y) \\ \bar{u}(y-l) \doteq \bar{u}(y) - l(d\bar{u}/dy) \end{cases}$$

と表せるので、 $P - P'$ の上下の流体塊が y に来たときの速度変動はそれぞれ

$$\bar{u}(y+l) - \bar{u}(y) = l(d\bar{u}/dy)$$

$$\bar{u}(y-l) - \bar{u}(y) = -l(d\bar{u}/dy)$$

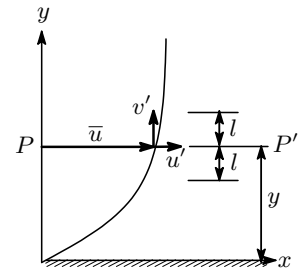


図 4: 混合距離

となり, y での平均流速 $\bar{u}(y)$ はその分早くなったり遅くなったりします。この変動速度の平均値の大きさ $|\bar{u}'|$ は

$$|\bar{u}'| = \frac{1}{2} \left(\left| l \frac{d\bar{u}}{dy} \right| + \left| -l \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \right) = l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (2.29)$$

と考えられます。 y の層における y 方向の変動速度 v' の絶対値の平均も $|\bar{u}'|$ の場合と同程度と考えて

$$|\bar{v}'| = \text{const} \cdot |\bar{u}'| = \text{const} \cdot l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (2.30)$$

とします。 $u'v' < 0$ (負の相関) となるので符号を付けて

$$\overline{u'v'} = -c|\bar{u}'| \cdot |\bar{v}'| \quad (c > 0: \text{定数}) \quad (2.31)$$

と書けます。(2.29) と (2.30) より

$$\overline{u'v'} = -c \cdot \text{const} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

定数係数を l の中に入れたものを改めて l と定義し直せば

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (2.32)$$

と書けるので, レイノルズ応力 τ_r と渦動粘性係数 ε_m は

$$\begin{aligned} \tau_r &= -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho \varepsilon_m \frac{d\bar{u}}{dy} \\ \varepsilon_m &= l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \end{aligned} \quad (2.33)$$

と表せます。混合距離 l は実験で求めるより方法がないですが, 次のように推察することはできます。壁面の近くでは流体塊の混合現象は壁面により抑制されるので l は小さく, 壁面より離れると入れ混ざる現象が大きくなり l は大きくなる。したがって, プランドルは混合距離 l は壁面からの垂直距離 y に比例するとし, その比例定数を κ (カルマン定数) として次式で表しました。

$$l = \kappa y \quad (\kappa = 0.41) \quad (2.34)$$

これを用いると

$$\tau_r = \rho \varepsilon_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad \varepsilon_m = \kappa^2 y^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.35)$$

と表せます。

§ 3.

乱流境界層の厚さ

平板に沿う層流の速度境界層厚さは $x^{1/2}$ に比例しました。乱流の境界層の厚さはどうなるかを以下にみていきます。

実験結果から乱流境界層内の速度分布 $u(y)$ は粘性底層を除いて 1/7 乗則と呼ばれる

$$\frac{\bar{u}}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (\delta: \text{平板上乱流の速度境界層厚}) \quad (3.1)$$

の関係が知られています¹⁰。壁面せん断応力 τ_w は摩擦係数 C_f を用いて

$$\tau_w = C_f \frac{\rho u_\infty^2}{2} \quad (3.2)$$

¹⁰この式は $(\partial \bar{u} / \partial y)_{y=\delta} \neq 0$, $(\partial \bar{u} / \partial y)_{y=0} \rightarrow \infty$ となって実際の速度分布と矛盾する難点はあるものの速度分布全体を比較的良い近似で表すことができ取り扱いも容易なので利用価値が高い。

となり, C_f は $5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$ の範囲で

$$C_f = 0.0592 Re_x^{-1/5} \quad (Re_x = u_\infty x / \nu) \quad (3.3)$$

となることが実験的に求められています。これを (3.2) に入れると

$$\tau_w = 0.0296 \left(\frac{\nu}{u_\infty x} \right)^{1/5} \rho u_\infty^2 \quad (3.4)$$

これから, 水平平板上の乱流では壁摩擦が $x^{1/5}$ に逆比例し下流に向け減少することがわかります。

さて, 以下では物理量は全て時間平均値を考えることにして頭のバー表示を省略することにします。

(2.15) で定常流を考えると

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = (\nu + \varepsilon_m) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

この式の両辺を 0 から境界層厚さ δ まで積分する¹¹と

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta (u_\infty - u) u dy \right] = (\nu + \varepsilon_m) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (3.6)$$

これに (3.1) と (3.4) を入れて積分を実行すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta u_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left[u_\infty - u_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] dy &= \frac{7}{72} u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = 0.0296 \left(\frac{\nu}{u_\infty x} \right)^{1/5} u_\infty^2 \\ \therefore \frac{d\delta}{dx} &= \frac{72}{7} (0.0296) \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{1/5} x^{-1/5} \end{aligned} \quad (3.7)$$

平板の先端より乱流境界層が存在するものとして $x=0$ で $\delta=0$, 任意の点 $x=x$ で $\delta=\delta$ なる条件を入れて積分すると

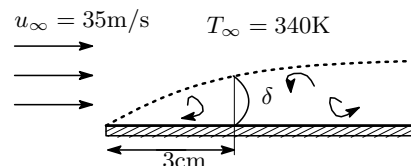
$$\begin{aligned} \int_0^\delta d\delta &= \frac{72}{7} (0.0296) \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{1/5} \int_0^x x^{-1/5} dx \\ \therefore \delta &= 0.381 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{1/5} x^{4/5} \quad \text{or} \quad \frac{\delta}{x} = 0.381 Re_x^{-1/5} \end{aligned} \quad (3.8)$$

これから水平平板上の乱流境界層の厚さは $x^{4/5}$ に比例して増加することがわかります。

例.1 1 気圧の下で一様流速 $u_\infty = 35\text{m/s}$, 温度 $T_\infty = 340\text{K}$ の空気流中に平行に置かれた平板の先端から $x = 3.0\text{cm}$ 下流位置での境界層厚さを求めよ。ただし, 流れは先端部から乱流になっているとする。なお, 340K における空気の動粘性係数は $\nu = 1.99 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ とする。

Ans.1 (3.8) より

$$\delta = 0.381 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{1/5} x^{4/5} = 0.381 \left(\frac{1.99 \times 10^{-5}}{35} \right)^{1/5} \times 0.03^{4/5} = 1.3 \times 10^{-3}\text{m} = 1.3\text{mm}$$



ちなみにレイノルズ数は $Re_x = u_\infty x / \nu = 35 \times 0.03 / (1.99 \times 10^{-5}) = 5.28 \times 10^4$ 。

§ 4.

乱流境界層の一般速度分布

乱流境界層の壁面に近い領域ではせん断応力はほぼ一定の $\tau_r = \tau_w$ となるので, (2.35) より

$$\tau_w = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (4.1)$$

¹¹ 具体的な計算方法はレポート「強制対流伝熱」の (3.46) を参照。

上式を次のように変形します。

$$\frac{du}{(\tau_w/\rho)^{1/2}} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y} \quad (4.2)$$

$(\tau_w/\rho)^{1/2}$ の次元は $[(\tau_w/\rho)^{1/2}] = \left(\frac{ML}{T^2L^2} / \frac{M}{L^3}\right)^{1/2} = L/T$ と速度の次元なので

$$\sqrt{\tau_w/\rho} = u_* \quad (4.3)$$

とおくと u_* はある速度を表し、摩擦速度(friction velocity)と呼んでいます。(4.2)を積分すると

$$\int du = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{\kappa} u_* \int \frac{1}{y} dy \quad (4.4)$$

$$\therefore u = \frac{1}{\kappa} u_* \ln y + C \quad (C: \text{積分定数})$$

が得られ、この式は粘性底層を除いて実験結果と比較的よく一致することが知られています。

もう少し詳しく乱流境界層内の速度分布を求めます。(2.14)より

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \varepsilon_m) \frac{du}{dy} \quad (4.5)$$

次の無次元量を導入して

$$\begin{cases} u^+ = u/u_* \\ y^+ = u_* y / \nu \end{cases} \quad (4.6)$$

(4.5)を書き換えると、壁面に近い領域ではせん断応力はほぼ一定とみなせるので $\tau = \tau_w$ とおけば

$$\begin{aligned} u_*^2 &= \left(1 + \frac{\varepsilon_m}{\nu}\right) u_*^2 \frac{du^+}{dy^+} \\ \therefore du^+ &= \frac{dy^+}{1 + \frac{\varepsilon_m}{\nu}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

となります。ここで各層の特長を上げておきます。

- 粘性底層：層流的性格が強く分子粘性の作用が支配的でレイノルズ応力はほとんど無視でき $\varepsilon_m \sim 0$
- 遷移層：レイノルズ応力と分子粘性とが同程度となり $\varepsilon_m \sim \nu$
- 乱流域：ではレイノルズ応力が圧倒的に大きくなり $\varepsilon_m \gg \nu$

粘性底層では $\varepsilon_m = 0$ とおいて (4.7) を積分すると

$$u^+ = y^+ \quad (4.8)$$

次に乱流域では、(4.4)を y で微分して

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa} \frac{1}{y}$$

一方、(2.35)より

$$\frac{du}{dy} = \frac{\varepsilon_m}{\kappa^2 y^2}$$

この両式から du/dy を消去して

$$\varepsilon_m = u_* \kappa y = \nu \kappa y^+, \quad \therefore \frac{\varepsilon_m}{\nu} = \kappa y^+$$

乱流域では $\varepsilon_m \gg \nu$ ($\varepsilon_m/\nu \gg 1$) となるので、(4.7)は

$$du^+ = \frac{dy^+}{(1 + \kappa y^+)} \doteq \frac{1}{\kappa} \frac{dy^+}{y^+}$$

となり、これを積分して

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (C: \text{積分定数}) \quad (4.9)$$

を得ます。積分定数は実験結果との比較から求めます。分子粘性が支配的な壁面のごく近傍 ($y^+ < 5$)、乱流の混合作用と分子粘性作用の双方が影響する遷移層、そして乱流の混合作用が支配的となる乱流域での速度分布は以下の式で表されます。

$$\text{速度分布} \begin{cases} (1) \text{ 粘性底層} & : 0 < y^+ < 5 & u^+ = y^+ \\ (2) \text{ 遷移層} & : 5 < y^+ < 30 & u^+ = 5.0 \ln y^+ - 3.05 \\ (3) \text{ 乱流域 (乱流コア)} & : 30 < y^+ & u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \end{cases} \quad (4.10)$$

これは普遍速度分布 (universal velocity distribution) とも呼ばれ、プランドルの混合距離理論から推論される式の形に実験から得られた定数を代入してカルマンが導いたもので、カルマンの三層模型 (後述) と呼ばれます。円管内乱流の場合に導かれましたが、平板上乱流においても成り立つことが知られています。なお、図 5 の破線は境界層が粘性底層と乱流域だけから構成されると仮定した二層模型での速度分布を描いたものです。乱流の一般速度分布式は、その目的などに合わせていろいろなものが提案されていますがここでは省略します。粘性底層の厚さ δ_b は (4.10) の (1) と (3) のグラフの交点

$$y^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5, \quad \therefore y^+ = \frac{u_* \delta_b}{\nu} = 11.6 \quad (4.11)$$

より

$$\delta_b = 11.6 \left(\frac{\nu}{u_*} \right) \quad (4.12)$$

と求められます。

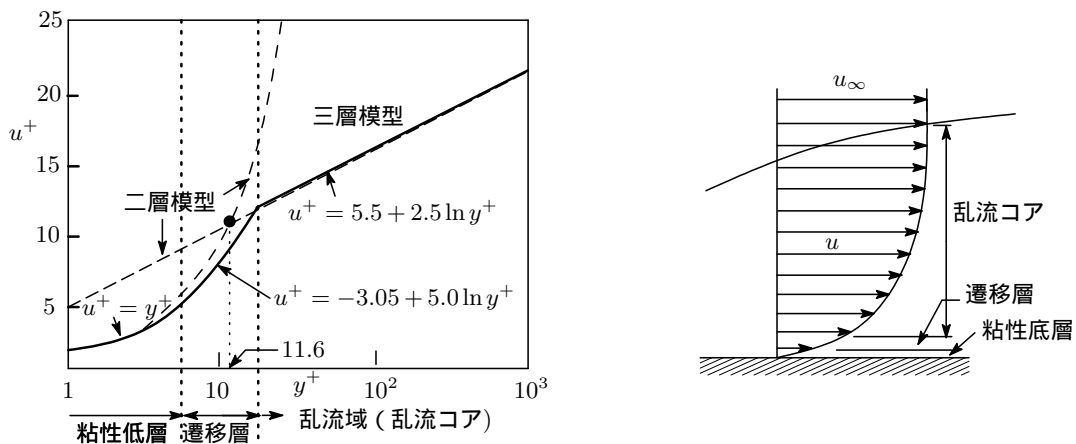


図 5: 乱流の普遍速度分布

§ 5. 摩擦係数から熱伝達率を類推 (運動量輸送と熱輸送のアナロジー)

乱流は § 1 の冒頭で触れたように壁面のごく近傍では完全な層流をなしている層流底層、壁面から十分離れたところでは完全な乱流となって流れる乱流域、そしてこれらの中に遷移層と呼ばれる乱流と層流が交互に現われる部分があります。層流底層では伝熱は分子熱伝導、乱流部では暑い部分と寒い部分が煩雑に混じり合う乱流熱伝導より熱が移動し、その間の遷移層ではこの両者が共存するという複雑な様相を呈しています。それでは乱流の熱伝達率をどのように求めていくか、それを以下にみていきましょう。摩擦係数と熱伝達率との関係がそれを紐解くキーとなります。

5 - 1 . コルバーンのアナロジー

「強制対流熱伝達」のレポートでやったように局所摩擦係数 C_{fx} とレイノルズ数 Re_x の関係は前出 Rep の (3.54)¹² で与えられていて

$$C_{fx} = 0.664Re_x^{-1/2} \quad (5.1)$$

一方, 局所ヌセルト数は同 Rep(3.72) より

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.332Pr^{1/3}Re_x^{1/2} \quad (\alpha_x: \text{局所熱伝達率}) \quad (5.2)$$

これを次のように書き換え

$$\frac{Nu_x}{Re_x Pr} = \frac{\alpha_x}{\rho c_p u_\infty} = 0.332Pr^{-2/3}Re_x^{-1/2} \quad (5.3)$$

$$(Re_x = xu_\infty/\nu, \quad Pr = \mu c_p/\lambda)$$

左辺の

$$St_x = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} = \frac{\alpha_x}{\rho c_p u_\infty} \quad (5.4)$$

は Stanton 数 (Stanton number)¹³ と呼ばれる熱伝達率と熱容量の比を表す無次元量です。この Stanton 数を用いると (5.3) は

$$St_x Pr^{2/3} = 0.332Re_x^{-1/2} \quad (5.5)$$

となり, (5.1) より

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}, \quad \text{or} \quad St_x = \frac{C_{fx}}{2} Pr^{-2/3} \quad (5.6)$$

が得られます。この式はコルバーン¹⁴のアナロジーと呼ばれ, 水平平板上の境界層の熱伝達率が摩擦係数から求められることを示しています。(5.6) の左辺はコルバーンの j 因子と呼ばれます。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{コルバーンの } j \text{ 因子: } j_h = St Pr^{2/3} = \frac{Nu}{Re Pr^{1/3}} \\ \text{ヌセルト数: } Nu = \frac{C_f}{2} Re Pr^{1/3} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

(5.6) は平板層流に対して導かれたものですが, 乱流平板の場合でも実験値とよく合うことが知られています。以下, 乱流熱伝達をこの式を使って求めていきます。

乱流平板での摩擦係数 C_{fx} は (3.3) より

$$C_f = 0.0592Re_x^{-1/5} \quad (5 \times 10^5 < Re_x < 10^7) \quad (5.8)$$

これを (5.6) に入れると乱流平板の局所ヌセルト数

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.0296Pr^{1/3}Re_x^{4/5} \quad (5.9)$$

を得ます。長さ l の平板状を流れる流体は先端から層流境界層 ($x=0 \sim x_{cr}$) が発達し, 次に乱流境界層 ($x=x_{cr} \sim l$) が発達します (ここでは遷移層は考えていません)。層流境界層域での局所熱伝達率を $\alpha_{x,lam}$ 乱流域のそれを $\alpha_{x,turb}$ とすれば, 平板全体の平均熱伝達率 α_m は

$$\alpha_m = \frac{1}{l} \left(\int_0^{x_{cr}} \alpha_{x,lam} dx + \int_{x_{cr}}^l \alpha_{x,turb} dx \right) \quad (5.10)$$

¹²係数の数字が誤っていて (誤)0.646, 0.331 (正)0.664, 0.332。

¹³Thomas Edward Stanton(1865-1931): 英国の機械工学者。レイノルズの弟子。

¹⁴Allan Philip Colburn(1904-1955): 米国の技術者。

と表せます。(5.2), (5.9) より

$$\begin{cases} \alpha_{x,lam} = 0.332\lambda Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.332\lambda Pr^{1/3} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-1/2} \\ \alpha_{x,turb} = 0.0296\lambda Pr^{1/3} Re_x^{4/5} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.0296\lambda Pr^{1/3} \left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{4/5} x^{-1/5} \end{cases} \quad (5.11)$$

これを (5.10) に入れて積分すると各項は

$$\begin{aligned} \int_0^l \alpha_{x,lam} dx &= 0.664\lambda Pr^{1/3} \left(\frac{u_\infty x_{cr}}{\nu}\right)^{1/2} \\ \int_{x_{cr}}^l \alpha_{x,turb} dx &= 0.037\lambda Pr^{1/3} \left[\left(\frac{u_\infty l}{\nu}\right)^{4/5} - \left(\frac{u_\infty x_{cr}}{\nu}\right)^{4/5} \right] \end{aligned}$$

となり, これを (5.10) に入れると平均熱伝達率は

$$\alpha_m = \frac{\lambda}{l} \left[0.664 \left(\frac{u_\infty x_{cr}}{\nu}\right)^{1/2} + 0.037 \left(\frac{u_\infty l}{\nu}\right)^{4/5} - 0.037 \left(\frac{u_\infty x_{cr}}{\nu}\right)^{4/5} \right] Pr^{1/3} \quad (5.12)$$

と求められます。したがって, 平均ヌセルト数 Nu_m は

$$Nu_m = \frac{\alpha_m l}{\lambda} = \left[0.664 Re_{x,cr}^{1/2} + 0.037 Re_l^{4/5} - 0.037 Re_{x,cr}^{4/5} \right] Pr^{1/3} \quad (5.13)$$

遷移レイノルズ数が $Re_{x,cr} = 5 \times 10^5$ であるとする, これを上式に入れて平均ヌセルト数は

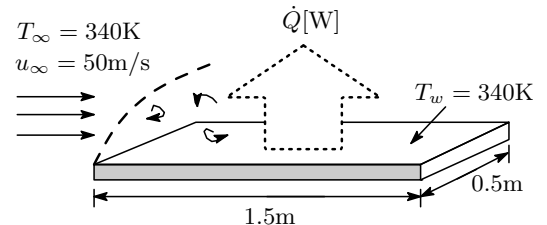
$$Nu_m = 0.037 \left[Re_l^{4/5} - 2.35 \times 10^4 \right] Pr^{1/3} \quad (5.14)$$

となります。ただし, この式の適用範囲は $0.6 \leq Pr \leq 50$ かつ $5 \times 10^5 < Re_l < 10^7$ とされます。ついでに, 平板先端から乱流層が発達している場合の平均熱伝達率と平均ヌセルト数を求めておく

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx = 0.0296 Pr^{1/3} \frac{\lambda}{l} \int_0^l Re_x^{4/5} \frac{1}{x} dx = 0.037 Re_l^{4/5} Pr^{1/3} \frac{\lambda}{l} \\ Nu_m &= \frac{l}{\lambda} \alpha_m = 0.037 Re_l^{4/5} Pr^{1/3} \end{aligned} \quad (5.15)$$

となります。

例.2 1気圧の下で一様流速 $u_\infty = 50\text{m/s}$, 温度 $T_\infty = 300\text{K}$ の空気が流れている。温度が $T_w = 340\text{K}$ に保たれた幅 $b = 0.50\text{m}$, 長さ $l = 1.50\text{m}$ の平板が流れに平行に置かれている。平板前端より乱流境界層が発達するものとして平板の片面から空気への放熱量 $\dot{Q}[\text{W}]$ を計算せよ。ただし, 膜温度 $T_f = (T_w + T_\infty)/2 = 320\text{K}$ における空気の物性値は $\nu = 1.79 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$, $Pr = 0.719$, $\lambda = 2.76 \times 10^{-2}\text{W/mK}$ とする。



Ans.2 臨界レイノルズ数を $Re^c \sim 10^5$ とすると乱流に遷移する平

板前縁からの位置は $l = \nu Re^c / u_\infty = 1.78 \times 10^{-5} \times 10^5 / 50 = 0.036\text{m} = 3.6\text{cm}$ 。したがってこの空気の流れは層流境界層から乱流境界層へと発達しています。平板末端のレイノルズ数は $Re_l = lu_\infty / \nu = 1.5 \times 50 / (1.78 \times 10^{-5}) = 4.19 \times 10^6$ 。したがって, 平均ヌセルト数は (5.14) より

$$Nu_m = 0.037 \left[Re_l^{4/5} - 2.35 \times 10^4 \right] Pr^{1/3} = 0.037 \left[(4.19 \times 10^6)^{4/5} - 2.35 \times 10^4 \right] \times 0.719^{1/3} = 5.8 \times 10^3$$

平均熱伝達率 α_m は

$$\alpha_m = \frac{\lambda Nu_m}{l} = \frac{2.76 \times 10^{-2} \times 5.8 \times 10^3}{1.5} = 106.7 [\text{W/mK}]$$

放熱量 \dot{Q} は

$$\dot{Q} = \alpha_m (T_\infty - T_w) b l = 106.7 \times (340 - 300) \times 0.5 \times 1.5 = 3.21 \times 10^3 [\text{W}]$$

() 仮に平板前端から乱流層が発達している場合を考えると、平均ヌセルト数と平均熱伝達率は (5.15) より

$$Nu_m = 0.037 Re_l^{4/5} Pr^{1/3} = 0.037 \times (4.19 \times 10^6)^{4/5} \times 0.719^{1/3} = 6.6 \times 10^3$$

$$\alpha_m = \frac{\lambda Nu_m}{l} = \frac{2.76 \times 10^{-2} \times 6.6 \times 10^3}{1.5} = 121.4 [\text{W/mk}]$$

放熱量 \dot{Q} は

$$\dot{Q} = \alpha_m (T_\infty - T_w) bl = 121.4 \times (340 - 300) \times 0.5 \times 1.5 = 3.64 \times 10^3 [\text{W}]$$

5 - 2 . レイノルズのアナロジー

乱流のせん断応力 τ は (2.14) で示しましたが、再掲すると

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \varepsilon_m) \frac{du}{dy} \quad (\nu: \text{動粘性係数}, \varepsilon_m: \text{渦動粘性係数}) \quad (5.16)$$

また、熱の乱流輸送については (2.25) を再掲すると

$$\frac{\dot{q}}{\rho c_p} = -(a + \varepsilon_h) \frac{dT}{dy} \quad (a: \text{熱拡散率}, \varepsilon_h: \text{渦熱拡散率}) \quad (5.17)$$

この両式の比をとると

$$\frac{\dot{q}}{c_p \tau} = -\frac{a + \varepsilon_h}{\nu + \varepsilon_m} \frac{dT}{du} \quad (5.18)$$

となります。いま、 $Pr (= \nu/a) = 1$ の場合について、次の仮定をおきます。

- $\varepsilon_h = \varepsilon_m$: 乱流プラントル数を $Pr_t (= \varepsilon_m/\varepsilon_h) = 1$ とする。
- $\varepsilon_h \gg a, \quad \varepsilon_m \gg \nu \rightarrow$: 粘性底層の存在を無視。
- $\dot{q}/\tau = \dot{q}_w/\tau_w = \text{一定}$: 全熱流束とせん断応力の比は一定で、かつ壁面での値で近似できる。

そうすると (5.18) は

$$\left(\frac{\dot{q}_w}{c_p \tau_w} \right) du = -dT \quad (5.19)$$

となり、これを壁面から主流まで積分すると

$$\frac{\dot{q}_w}{c_p \tau_w} \int_0^{u_\infty} du = - \int_{T_w}^{T_\infty} dT$$

$$\therefore \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_\infty} = \frac{c_p \tau_w}{u_\infty} \quad (5.20)$$

となります。熱伝達率 α は定義から $\dot{q}_w = \alpha(T_w - T_\infty)$ なので、上式から

$$\alpha = \frac{c_p \tau_w}{u_\infty} \quad (5.21)$$

を得ます。平板に沿う流れの場合、壁面でのせん断応力 τ_w は (3.2) より

$$\tau_w = C_f \frac{\rho u_\infty^2}{2} \quad (5.22)$$

で表されるので、これを (5.21) に入れて

$$\frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} = \frac{C_f}{2} \quad (5.23)$$

この左辺は (5.4) で登場したスタントン数 St なので

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{C_f}{2} \quad (Pr = 1) \quad (5.24)$$

これから熱伝達率は摩擦係数から求めることができます。この関係式はレイノルズのアナロジー¹⁵と呼ばれ、 St 、 C_f の局所値でも平均値においても成立します。

円管内流 円管内流の場合では(5.19)を壁面から混合平均値まで積分すると

$$\left(\frac{\dot{q}_w}{c_p \tau_w}\right) \int_0^{u_m} du = - \int_{T_w}^{T_b} dT \quad (5.25)$$

$$\therefore \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_b} = \frac{\tau_w c_p}{u_m}$$

これから熱伝達率 α は

$$\alpha = \frac{c_p \tau_w}{u_m} \quad (5.26)$$

直径 d 、長さ ℓ の円管壁面のせん断応力 τ_w は円管両端の圧力差（圧力損出） Δp との力の釣り合い（図6）より

$$\pi d \ell \tau_w = (\pi d^2 / 4) \Delta p, \quad \tau_w = \frac{\Delta p d}{4 \ell} \quad (5.27)$$

一方、 Δp はダルシー・ワイスバッハ (Darcy-Weisbach)¹⁶の式より

$$\Delta p = f \frac{\ell}{d} \frac{\rho u_m^2}{2} \quad (5.28)$$

で与えられるので、(5.27)と(5.28)より壁面摩擦係数 τ_w は

$$\tau_w = \frac{f}{8} \rho u_m^2 \quad (5.29)$$

となります。 f はダルシーの摩擦係数（摩擦損出係数）と呼ばれる無次元数で次式で定義されます。

$$f \equiv - \frac{d}{(\rho u_m^2 / 2)} \frac{dp}{dx} \quad (5.30)$$

なお、十分に発達した円管内流ではダルシーの摩擦係数 f と管摩擦係数 C_f の間には $C_f = f/4$ の関係があります¹⁷。ダルシーの摩擦係数 f と熱伝達率 α の関係は(5.26)と(5.29)より

$$\alpha = \frac{f}{8} \rho c_p u_m \quad (5.31)$$

スタントン数は

$$St = \frac{\alpha}{\rho c_p u_m} = \frac{Nu_d}{Re_d Pr} = \frac{f}{8}, \quad (Re_d = u_m d / \nu, Nu_d = \alpha d / \lambda, Pr = \nu / a) \quad (5.32)$$

となるので、ダルシーの摩擦係数 f がわかれば熱伝達率 α を求めることができます。(5.32)を円管内乱流熱伝達のレイノルズのアナロジーと呼んでいます。

レイノルズのアナロジーは $Pr = 1$ の場合としたように Pr が1にごく近い場合のみに成立します。(5.32)にはプラントル数 Pr の影響が含まれていませんが、平板層流の熱と運動量輸送のアナロジーの結果や従来の経験などから St は概ね Pr の $-2/3$ 乗に依存することが知られているので、 Pr が1でない場合に Pr の影響を打ち消すべく(5.32)を

$$St Pr^{2/3} = \frac{Nu_d}{Re_d Pr} Pr^{2/3} = \frac{f}{8} \quad (5.33)$$

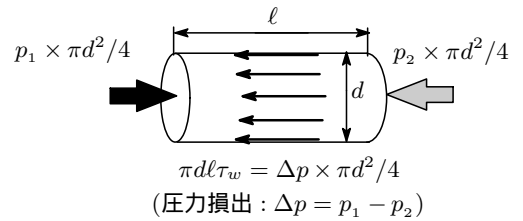


図6: 壁面摩擦係数と圧力損出の関係

¹⁵レイノルズのアナロジーは厳密には $Pr = 1$ の流体に対してのみ適用できます。

¹⁶Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858): フランスの水理学技術者。Julius Ludwig Weisbach (1806-1871): ドイツの工学者

¹⁷ $C_f = - \frac{d/2}{\rho u_m^2} \frac{dp}{dx}$, $f = - \frac{2d}{\rho u_m^2} \frac{dp}{dx}$

と修正した関係式が使われています。

円管内乱流でのダルシーの摩擦係数 f は $Re_d > 2 \times 10^4$ において

$$f = 0.184Re_d^{-1/5} \quad (C_f = 0.046Re_d^{-0.2}) \quad (5.34)$$

という経験式で表されることが知られているので、これを (5.33) に入れると円管内乱流のヌセルト数を与える式

$$Nu_d = 0.023Re_d^{0.8}Pr^{1/3}, \quad St_d = 0.023Re_d^{-0.2}Pr^{-2/3} \quad (5.35)$$

が得られます。この式はコルバーンの式と呼ばれます。

ディタス・ベルター (Dittus-Boelter) の式 円管内乱流のヌセルト数を与える式としては、実験データとよく合う経験式としてディタス・ベルター (Dittus-Boelter) の式

$$Nu_d = 0.023Re_d^{0.8}Pr^n \quad (5.36)$$

が知られていて、広く使われています。流体を加熱するときは $n = 0.4$ 、冷却するときは $n = 0.3$ で、適用範囲は $0.7 \leq Pr \leq 160$, $2500 \leq Re_d \leq 1.24 \times 10^5$, $\ell/d > 60$ とされます。物性値は壁温度における値を使います。留意点としては、壁温度 T_w と混合平均温度 T_b との差が大きくなると物性値の温度依存性の影響がでてくるために精度は低くなります。

< 補足 > 管内流の乱流域での圧力損失 Δp を計算するとき、滑らかな円管の摩擦係数 f を算定する経験式として次のブラジウスの式もよく使われます。この式の適用範囲は $3 \times 10^3 < Re_d < 10^5$ 。

$$f = 0.3164Re_d^{-0.25}, \quad C_f = 0.0791Re_d^{-0.25} \quad (5.37)$$

例.3 20°C の水が平均流速 $u_m = 1\text{m}$ で直径 $d = 30\text{mm}$ 、長さ $L = 10\text{m}$ の滑らかな円管内を流れている。このときの圧力損失と熱伝達率を求めよ。なお、熱伝達率の計算にはディタス・ベルターの式 ($n = 0.4$) を用いよ。ただし、 20°C での水の物性値は $\rho = 998.2\text{kg/m}^3$, $\nu = 1.004 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, $\lambda = 0.5995\text{W/mK}$, $Pr = 6.991$ とする。

Ans.3 レイノルズ数 Re_d を求めると

$$Re_d = \frac{u_m d}{\nu} = \frac{1 \times 0.03}{1.004 \times 10^{-6}} = 2.988 \times 10^4$$

$Re_d > 2 \times 10^4$ であるのでダルシーの摩擦係数 f は (5.34) より

$$f = 0.184Re_d^{-0.2} = 0.184 \times (1.992 \times 10^4)^{-0.2} = 2.54 \times 10^{-2}$$

圧力損失は (5.28) より

$$\Delta p = f \frac{L \rho u_m^2}{d} = 2.54 \times 10^{-2} \times \frac{10}{0.02} \times \frac{998.2 \times 1^2}{2} = 6.34 \times 10^3 = 6.34 \times 10^3 \text{Pa}$$

ヌセルト数はディタス・ベルターの式 (5.36) より

$$Nu_d = 0.023Re_d^{0.8}Pr^{0.4} = 0.023 \times (2.988 \times 10^4)^{0.8} \times 6.991^{0.4} = 190.5$$

したがって、熱伝達率は

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.5995}{0.03} \times 190.5 = 3.806 \times 10^3 \text{W/m}^2\text{K} = 3.81 \text{kW/m}^2\text{K}$$

5 - 3 . プランドル・テイラーのアナロジー

レイノルズのアナロジーは $Pr = 1$ の場合に適用できました。プラントル・テイラーのアナロジーは Pr が 1 と多少異なる場合に対する関係式で、粘性底層と乱流コアの 2 層モデルから導出されます。

$\tau = \tau_w$, $\dot{q} = \dot{q}_w$, $Pr_t = (\varepsilon_m / \varepsilon_h) = 1$ とし, 次の仮定をおきます。

$$\begin{cases} \cdot \text{粘性底層} : 0 \leq y^+ \leq 5 & \varepsilon_h \ll a, \varepsilon_m \ll \nu \\ \cdot \text{乱流域} : 5 \leq y^+ & \varepsilon_m \gg \nu, \varepsilon_h \gg a \end{cases} \quad (5.38)$$

・粘性底層：粘性底層では (5.16), (5.17) より

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \frac{du}{dy}, \quad \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p} = -a \frac{dT}{dy} \quad (5.39)$$

が成立します。これを $0 \leq y^+ \leq 5$ の範囲で積分します。 $y^+ = 5$ での y 値を y_l , 流速と温度をそれぞれ $u = u_l$, $T = T_l$ とすると

$$\begin{cases} \frac{\tau_w}{\rho} \int_0^{y_l} dy = \nu \int_0^{u_l} du, & \therefore y_l = \frac{\rho \nu u_l}{\tau_w} \quad (\text{ただし } u_l = u_* u^+ = 5u_*) \\ \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p} \int_0^{y_l} dy = -a \int_{T_w}^{T_l} dT, & \therefore y_l = \frac{\rho c_p a}{\dot{q}_w} (T_w - T_l) \end{cases} \quad (5.40)$$

両式から y_l を消去して整理すると

$$T_l = T_w - \frac{\dot{q}_w}{\tau_w c_p} \frac{\nu}{a} u_l = T_w - \frac{\dot{q}_w}{\tau_w c_p} Pr \cdot u_l \quad (5.41)$$

・乱流域：乱流域では $\varepsilon_m = \varepsilon_h \equiv \varepsilon$ とし (5.16), (5.17) より

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \varepsilon \frac{du}{dy}, \quad \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p} = -\varepsilon \frac{dT}{dy} \quad (5.42)$$

これを y_l から主流まで積分すると, 積分範囲を $y_l \leq y \leq y_\infty$, $u_l \leq u \leq u_\infty$ とし

$$\begin{cases} \frac{\tau_w}{\rho} \int_{y_l}^{y_\infty} dy = \varepsilon \int_{u_l}^{u_\infty} du, & \therefore y_\infty - y_l = \frac{\rho \varepsilon}{\tau_w} (u_\infty - u_l) \\ \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p} \int_{y_l}^{y_\infty} dy = -\varepsilon \int_{T_l}^{T_\infty} dT, & \therefore y_\infty - y_l = \frac{\rho c_p \varepsilon}{\dot{q}_w} (T_l - T_\infty) \end{cases} \quad (5.43)$$

これから

$$T_l - T_\infty = \frac{\dot{q}_w}{\tau_w c_p} (u_\infty - u_l) \quad (5.44)$$

(5.41) を (5.44) に入れて

$$T_w - T_\infty = \frac{\dot{q}_w}{\tau_w c_p} (u_\infty - u_l) + \frac{\dot{q}_w}{\tau_w c_p} Pr \cdot u_l \quad (5.45)$$

を得ます。これに

$$\dot{q}_w = \alpha (T_w - T_\infty) \longrightarrow T_w - T_\infty = \frac{\dot{q}_w}{\alpha}$$

を入れて整理すると

$$\alpha = \frac{\tau_w c_p}{u_\infty + (Pr - 1)u_l} \quad (5.46)$$

$u_l = 5u_\infty \sqrt{C_f/2}$, $\tau_w = C_f \rho u_\infty^2 / 2$ を入れるとスタントン数は

$$St = \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{C_f/2}{1 + 5\sqrt{C_f/2}(Pr - 1)} \quad (5.47)$$

となります。これをプラントル・テイラーのアナロジーと呼んでいて, $Pr = 1$ の場合にはレイノルズのアナロジーと一致します。

5 - 4 . カルマンのアナロジー

粘性底層と乱流層の間に遷移層を考慮した3層模型で，カルマンは遷移層では分子輸送が熱輸送と同程度の効果を持つとの仮定のもとにアナロジー計算を行っています。

各層に対して次の仮定をします（速度分布については(4.10)参照）。

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{粘性底層} : 0 \leq y^+ \leq 5 \quad u^+ = y^+ \\ \qquad \qquad 0 \leq u^+ \leq 5 \quad \varepsilon_h \ll a, \varepsilon_m \ll \nu, \tau = \tau_w \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \dot{q} = \dot{q}_w \\ \cdot \text{遷移層} : 5 \leq y^+ \leq 30 \quad u^+ = 5.0 \ln y^+ - 3.05 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \text{(or) } u^+ = 5.0 + \ln(y^+/5) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad 5 \leq u^+ \leq 14 \quad \varepsilon_h = \varepsilon_m, \tau = \tau_w, \dot{q} = \dot{q}_w \\ \cdot \text{乱流域} : 30 \leq y^+ \quad u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad 14 \leq u^+ \quad \varepsilon_h \gg a, \varepsilon_m \gg \nu, \varepsilon_h = \varepsilon_m \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dot{q}/\dot{q}_w = \tau/\tau_w \end{array} \right. \quad (5.48)$$

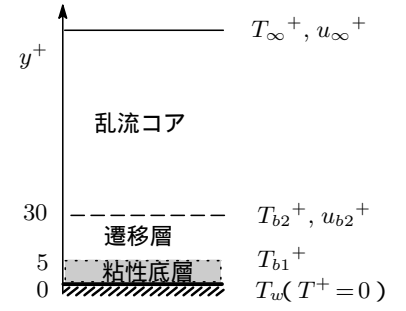


図7: 層境界での T^+, u^+

さらに無次元温度 T^+ を次式で定義します（図7）。

$$T^+ = \frac{(T_w - T) \rho c_p \sqrt{\tau_w / \rho}}{\dot{q}_w} \quad (5.49)$$

(5.16) より

$$\tau = \rho(\nu + \varepsilon_m) \frac{du}{dy} \quad (5.50)$$

ところで(4.3), (4.6) より

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{\nu}{u_*^2} \frac{du}{dy} = \frac{\rho \nu}{\tau_w} \frac{du}{dy}$$

となるので，これを(5.50)に入れて整理すると $\varepsilon_m \equiv \varepsilon$ として

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{\nu + \varepsilon}{\nu} \frac{du^+}{dy^+} \quad (5.51)$$

また，(2.25) より

$$\dot{q} = -\rho c_p (a + \varepsilon_h) \frac{dT}{dy} \quad (5.52)$$

ところで(4.6) と(5.49) より

$$\frac{dT}{dy} = -\frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \nu} \frac{dT^+}{dy^+} \quad (5.53)$$

となるので，これを(5.52)に入れて整理すると $\varepsilon_h \equiv \varepsilon$ として

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_w} = \frac{a + \varepsilon}{\nu} \frac{dT^+}{dy^+} \quad (5.54)$$

となります。各層ごとにみていくと

・粘性底層： $\varepsilon/\nu \rightarrow 0$ ，また $\dot{q} = \dot{q}_w$ なので(5.54) は

$$\frac{dT^+}{dy^+} = \frac{\nu}{a} = Pr \quad (5.55)$$

粘性底層での温度分布は Pr と y^+ の関数となります。(5.55) を $0 \leq y^+ \leq 5$, $0 \leq T^+ \leq T_{b1}^+$ の範囲で積分すると

$$\int_0^{T_{b1}^+} dT^+ = \int_0^5 dy^+ \longrightarrow T_{b1}^+ = 5Pr \quad (5.56)$$

・遷移層：(5.51) より $\tau = \tau_w$ として

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{1 + \varepsilon/\nu} \quad (5.57)$$

(5.48) の速度分布式より

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{5}{y^+} \quad (5.58)$$

この両式から $\varepsilon/\nu = (y^+/5) - 1$ 。(5.54) より $\dot{q} = \dot{q}_w$ として

$$\frac{dT^+}{dy^+} = \frac{1}{(a/\nu) + (\varepsilon/\nu)} = \frac{Pr}{1 + Pr[(y^+/5) - 1]} \quad (5.59)$$

これを $5 \leq y^+ \leq 30$, $T_{b1}^+ \leq T^+ \leq T_{b2}^+$ の範囲で積分すると

$$T_{b2}^+ - T_{b1}^+ = \int_5^{30} \frac{Pr}{1 + Pr[(y^+/5) - 1]} dy^+ = 5 \ln(1 + 5Pr) \quad (5.60)$$

・乱流コア：(5.51) より $\varepsilon \gg \nu$, $\dot{q}/\dot{q}_w = \tau/\tau_w$ として

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_w} = \frac{\varepsilon}{\nu} \frac{du^+}{dy^+} \quad (5.61)$$

(5.54) より $\varepsilon \gg a$ として

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_w} = \frac{\varepsilon}{\nu} \frac{dT^+}{dy^+} \quad (5.62)$$

この両式より

$$\frac{dT^+}{du^+} = 1, \quad \frac{dT^+}{dy^+} = \frac{du^+}{dy^+} \quad (5.63)$$

乱流コアでの温度分布は速度分布と一致します。(5.63) を

$$u_{\infty}^+ = u_{\infty}/u_* = \frac{u_{\infty}}{\sqrt{\tau_w/\rho}}, \quad u_{b2}^+ = 5 + \ln(30/5) = 5 + 5 \ln 6$$

に留意して $T_{b2}^+ \leq T^+ \leq T_{\infty}^+$, $u_{b2}^+ \leq u^+ \leq u_{\infty}^+$ の範囲で積分し, 整理すると

$$\begin{aligned} \int_{T_{b2}^+}^{T_{\infty}^+} dT^+ &= \int_{u_{b2}^+}^{u_{\infty}^+} du^+ \longrightarrow \\ T_{\infty}^+ - T_{b2}^+ &= u_{\infty}^+ - u_{b2}^+ = \frac{u_{\infty}}{\sqrt{\tau_w/\rho}} - (5 + 5 \ln 6) \end{aligned} \quad (5.64)$$

となります。

(5.56), (5.60), (5.64) を足し合わせると

$$\begin{aligned} T_{\infty}^+ &= \frac{(T_w - T_{\infty})\rho c_p \sqrt{\tau_w/\rho}}{\dot{q}_w} \\ &= 5Pr + 5 \ln(1 + 5Pr) + \frac{u_{\infty}}{\sqrt{\tau_w/\rho}} - (5 + 5 \ln 6) \\ &= 5 \left[(Pr - 1) + \ln \frac{1 + 5Pr}{6} \right] + \frac{u_{\infty}}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\therefore \frac{\dot{q}_w}{c_p \tau_w} = \frac{T_w - T_{\infty}}{u_{\infty}} \frac{1}{1 + 5 \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho u_{\infty}^2}} \left(Pr - 1 + \ln \frac{1 + 5Pr}{6} \right)}$$

を得ます。この式はカルマンのアナロジーと呼ばれ、 $Pr = 0.5 \sim 10$ で実験値とよく一致するようです。

スタントン数は

$$\dot{q}_w = \alpha(T_w - T_\infty), \quad \tau_w = \frac{C_f}{2}\rho u_\infty^2, \quad St = \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty}$$

に留意すれば

$$\frac{u_\infty}{c_p \tau_w} \cdot \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_\infty} = \frac{u_\infty}{C_f \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \cdot c_p} \alpha = \frac{2}{C_f} St$$

となるので、(5.65) より

$$St = \frac{\frac{C_f}{2}}{1 + 5\sqrt{\frac{C_f}{2}} \left(Pr - 1 + \ln \frac{1 + 5Pr}{6} \right)} \quad (5.66)$$

となります。ここで St, C_f は局所の値です。

参考文献

- [1] 望月貞成，村田章「伝熱工学の基礎」日進出版森北出版，2015
- [2] 杉山均・佐野正利・永橋優純・加藤直人「はじめて学ぶ移動現象論」森北出版，2014
- [3] 石黒亮二「熱輸送論」北海道大学図書刊行会，1993

本レポートに掲載した例題は主にこれらの参考図書から引用させていただきました。