

強制対流熱伝達

Forced Convection Heat Transfer

KENZOU

2023.01.20 (大寒) → 02.25

流体の中に温度差があると温度の高い部分は比重（密度）が小さくなるため浮力が生じて上昇すると同時にその一団が抜けたあとに今度は温度の低い比重（密度）の大きい流体が流れ込み、全体の温度が均一になるまでこの流動は続き、このような現象を対流（convection）と呼んでいます。対流には、いま述べたように温度差による浮力のみ起因するいわゆる自然対流（natural convection）と、送風機やポンプなどで流体を強制的に流動させる強制対流（forced convection）の2種類があります。このように、流れの中を熱が移動する現象を対流熱伝達（convection heat transfer）と呼んでいて、とくに流れが層流である場合を層流熱伝達（laminar heat transfer）、乱流である場合を乱流熱伝達（turbulent heat transfer）と呼んでいます。このレポートは強制対流の中の層流熱伝達に限ってその基本的な事柄をまとめています。ご興味があれば一読ください。なお、誤りや誤解等を見つけられればご一報いただくとありがたい。

本レポートは「熱の移動現象（伝熱）」の姉妹編に当たります。境界層に関しては「流体力学講話・つまみ食い（その8,9）」に詳しい説明が載っていますので必要に応じて参照ください。

§ 1.

熱伝達率

1 - 1 . 局所熱伝達率と平均熱伝達率

物体の周囲を流体が流れている場合、その表面と流体との間に温度差（物体の温度 > 流体の温度としておきます）があるとすると、物体表面から流体へ流れる熱流束 \dot{q} はフーリエの法則

$$\dot{q} = -\lambda \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} \quad (1.1)$$

で表されます。 $(dT/dy)_{y=0}$ は物体表面近傍の流体の温度勾配 $(dT/dy)_{y=0}$

で、 λ は流体の熱伝導率 [W/m K] です。物体の表面温度 T_w と流体の温

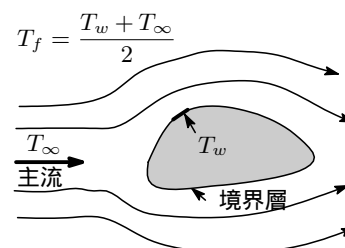
度 T_∞ を相加平均した温度 $T_f = T_w + T_\infty / 2$ を膜温度（film temperature）といいますが、通常、熱伝導率 λ は膜温度での値が使われます。物体表面近傍での $(dT/dy)_{y=0}$ がわかれば熱流束は (1.1) より定まりますが、表面近傍で温度は急激に変化しているため、これを実験で精度よく測定することは大変難しいとされます。温度勾配の代わりに壁面の温度 T_w と流体の温度 T_∞ の差に注目すると、熱伝達はこの温度差によって引き起こされるので、ニュートンの冷却法則より熱流束は

$$\dot{q} = \alpha(T_w - T_\infty) \quad (1.2)$$

と表せます。係数 α は熱伝達率 [W/m²K] で、流体の種類・物性や流れの状態など様々な因子が関係する量で、熱伝導率 λ のような固有の物性値ではありません。

さて、フーリエの法則とニュートンの冷却を使えば熱伝達率 α は

$$\alpha = \frac{-\lambda(dT/dy)_{y=0}}{T_w - T_\infty} \quad (1.3)$$



と表されます。 α は物体表面位置によって異なる値をとるので、ある位置での熱伝達率を局所熱伝達率といい、これを α_x と表すことにします。流体と接する物体の表面全域にわたっての伝熱量 \dot{Q} は

$$\dot{Q} = \int_A \alpha_x (T_w - T_\infty) dA \quad (A: \text{表面積}) \quad (1.4)$$

で表されます。とくに $T_w - T_\infty$ の値が場所によらず一定である場合には

$$\dot{Q} = (T_w - T_\infty) \int_a \alpha_x dA = \alpha_m A (T_w - T_\infty), \quad \alpha_m = \frac{1}{A} \int_A \alpha_x dA \quad (1.5)$$

となり、係数 α_m を平均熱伝達率あるいは単に熱伝達率と呼んでいます。いずれにしても熱の移動量を求めるには熱伝達率 α を知ることが必要で、これが次節のメインテーマとなります。お楽しみに。

例1 . 水が加熱された平板表面に沿って一様に流れている。平板前縁を $x=0$ とし、平板表面に沿って下流方向に x 軸をとる。平板表面の局所熱伝達率が $\alpha_x = 1.33/\sqrt{x}$ で与えられているとき、平板表面上の平均熱伝達率 α_m を求めよ。ただし平板の全長を $L = 0.5\text{m}$ とする。

Ans.1 (1.5) より

$$\alpha_x = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x dL = \frac{1.33}{0.5} \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}} = 376.2 \text{ W/m}^2\text{K}$$

例2 . 60°C に保たれた平板上を 20°C の空気が流れている。ある位置において境界層内の温度分布を測定し

$$T(y) = 60 - 1.20 \times 10^4 y + 1.60 \times 10^8 y^3 \quad [^\circ\text{C}]$$

で表されることがわかった。この位置における温度境界層の厚さ δ_T 、壁面での熱流束及び熱伝達率を求めよ。ただし、 y の単位は [m] とする。

Ans.2

温度勾配は

$$\frac{dT}{dy} = -1.20 \times 10^4 + 4.80 \times 10^8 y^2$$

温度境界層の厚さは温度勾配が0となる平板壁面からの距離として求められるので、それを δ_T とすれば

$$\left(\frac{dT}{dy}\right)_{y=\delta_T} = -1.20 \times 10^4 + 4.80 \times 10^8 \delta_T^2 = 0, \quad \delta_T = 0.005 \text{ [m]}$$

熱流束 \dot{q} は 60°C の空気の熱伝導率 $\lambda = 2.87 \times 10^{-2} \text{ [W/mK]}$ 、 $(dT/dy)_{y=0} = -1.20 \times 10^4$ を (1.1) に入れて

$$\dot{q} = -\lambda \left(\frac{dT}{dy}\right)_{y=0} = 3.44 \times 10^2 \text{ [W/m}^2\text{]}$$

となります。熱伝達率は (1.2) より

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{T_w - T_\infty} = \frac{3.44 \times 10^2}{60 - 20} = 8.6 \text{ [W/m}^2\text{K]}$$

1 - 2 . ヌセルト数

物体に沿う流れでの物体の長さを代表長さ L として

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{-(dT/dy)_{y=0}}{(T_w - T_\infty)/L} \quad (1.6)$$

で。定義される無次元数 Nu をヌセルト数と呼んでいます¹。その物理的意味は

$$Nu = \frac{\text{熱伝達率 } \alpha \times \text{代表長さ } L}{\text{熱伝導率 } \lambda} \simeq \frac{\text{(流動している流体の) 対流による伝熱量}}{\text{(静止している流体の) 熱伝導による伝熱量}}$$

で、対流による伝熱量と静止流体の熱伝導による伝熱量の比を表し、 Nu が大きいほど伝熱は対流が効いていることを示します。なお、流体が静止している場合のヌセルト数は1となります。

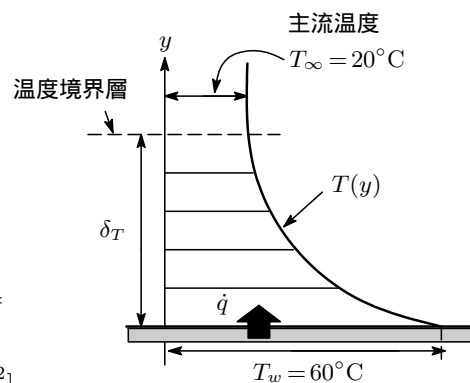


図 1: 界面近傍の温度分布

¹代表長さのとり方には決まったルールはありませんが、レイノルズ数にも同じ代表長さをを用いなければなりません。

2 - 1 . 境界層流れ

いっばんに流体は粘性をもち、一様な速度 u_∞ の流体が物体表面を流れるとき壁面近傍では壁面との相互作用により流速にブレーキが掛かり、壁面から遠く離れるにしたがって元の流速 u_∞ に戻ります。また、流体の温度 T_∞ も壁面近傍と壁面から遠く離れたところとでは温度勾配が生じます。このように、流速ならびに温度が変化する領域を速度境界層、温度境界層と呼んでいます。速度境界層の厚さ (δ) は $u = 0.99u_\infty$ となる y 値で定義され²、温度境界層の厚さ (δ_T) は $T_w - T$ が $T_w - T_\infty$ の 99% になる y の値をもって定義されます。熱伝達率 α と温度境界層の厚さ δ_T は

$$\alpha = \frac{-\lambda \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0}}{T_w - T_\infty} \simeq \frac{\lambda \frac{T_w - T_\infty}{\delta_T}}{T_w - T_\infty} \simeq \frac{\lambda}{\delta_T} \quad (2.1)$$

といった関係があり、熱伝達率は温度境界層の厚さ δ_T に逆比例し、温度境界層が厚いと熱伝達は下がることとなります。

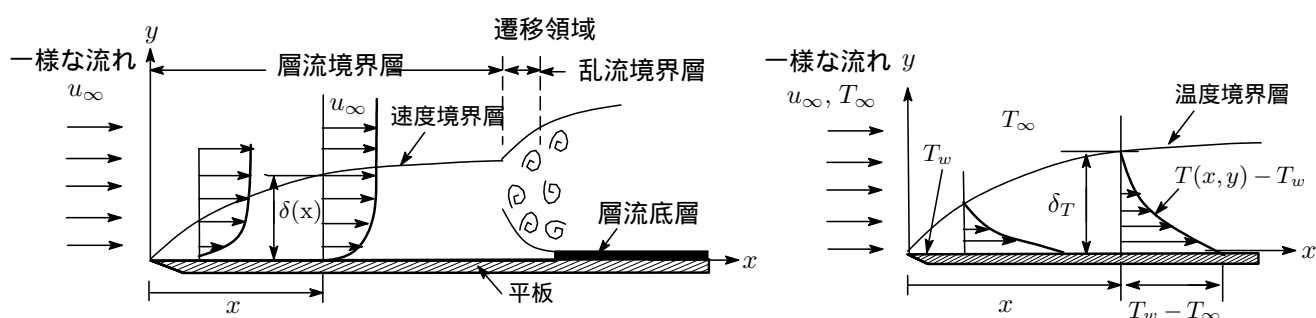


図 2: 平板と層流境界層 (速度境界層 & 温度境界層)

さて、図 2 に示すように、平板の先端から発達する境界層を層流境界層と呼び、これは下流にいくにしたがって厚みを次第に増し、さらに下流にいくと遷移領域を経て乱流境界層へと遷移します。

層流境界層内では流体の粘性の影響が極めて強く現れますが、境界層の外側では粘性の影響は無視できると考え、その領域の流速 u_∞ の流れを主流と呼んでいます。

2 - 2 . 熱伝達の基礎方程式

対流による熱伝達では、流体の流れと熱の移動とが同時に重なって存在します。以下に述べるように、流体の流れは境界層方程式で規定され、熱の移動はエネルギー方程式で規定されます。

ここでは流れを 2 次元非圧縮性・定常流とし、流れに平行に置いた平板との中の熱伝達基礎方程式を求めていきます。

境界層方程式

境界層方程式³は「質量保存の式 (連続の式)」と「運動量方程式」の 2 つから成ります。

²速度境界層の厚さ δ は粘性作用の及ぶ高さといえます。

³宮内俊雄「境界層方程式の数理」<http://www.wattandedison.com/boundarylayer.pdf> に詳しい解説が載っています。

A. 質量保存の式

流体の密度を ρ として、速度境界層内の微小体積要素 $dx \times dy \times 1$ への質量の流入と流出を考えます。図 3 で左面（面積 $dy \times 1$ ）から速度 u で流入する単位時間あたりの流体の質量は $\rho u dy$ で、距離 dx 離れた右面より流出する単位時間あたりの流体の質量は、速度は $u + (\partial u / \partial x) dx$ となるので $\rho [u + (\partial u / \partial x) dx] dy$ となります。全く同様に下面からの流入質量は $\rho v dx$ で上面からの流出質量は $\rho [v + (\partial v / \partial y) dy] dx$ 。質量保存則より左右面，上下面よりの流入量の代数和は 0 でなければならないので、質量保存の式として次式を得ます。

$$\begin{aligned} \rho u dy - \rho \left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right] dy + \rho v dx - \rho \left[v + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \right] dx &= 0 \\ \therefore \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

B. 運動量方程式

微小体積要素への x 方向（流れの方向）の単位時間あたりの運動量の流入・流出を考えます。図 4 に示すように左面から流入する運動量は $\rho u^2 dy$ で、右面から流出する運動量は $\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 dy$ となります。同様に、下面から流入する運動量と上面から流出する運動量を求めます。 x 方向の運動量は（流入質量） \times （ x 方向の速度成分）より、下面から流入する運動量は $\rho v u dx$ ，上面から流出する運動量は $\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dx$ となるので、微小体積要素に生じる単位時間あたりの x 方向の運動量の変化は、高次項を無視し質量保存則を適用すれば

$$\begin{aligned} &\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 dy + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dx - (\rho u^2 dy + \rho v u dx) \\ &= \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} dy + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy \\ &\doteq \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

となります。単位時間あたりの運動量の変化は微小体積要素に作用している x 方向の力で、この中身として x 方向の圧力差，粘性摩擦による力（せん断応力）が考えられます。この内，圧力差による力は

$$p dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy \quad (2.4)$$

と表せますが，流れに平行に置かれた平板の場合では圧力はいたるところ一様で圧力勾配は存在しないと考えられるので $\partial p / \partial x = 0$ 。次に粘性摩擦による力ですが，図 6 に示すように微小要素の下面，上面に作用する粘性摩擦力は向きが互いに反対の τ_y, τ_{y+dy} で作用し，ニュートンの粘性法則 $\tau = -\mu \frac{du}{dy}$ より，その大きさは

$$\begin{aligned} \tau_y dx &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} dx \quad (\mu [\text{Pa} \cdot \text{s}]: \text{粘性係数}) \\ \tau_{y+dy} dx &= \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right] dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

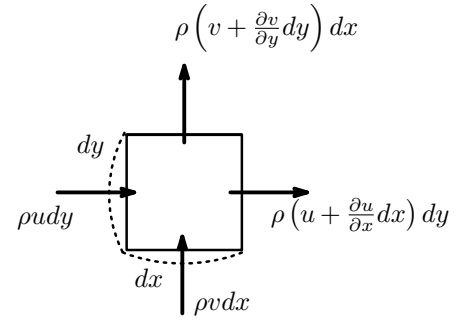


図 3: 微小体積要素への流出入

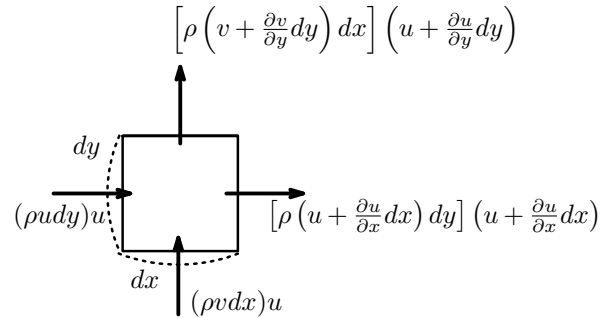


図 4: 微小体積要素への運動量の流出入

で与えられます。この差が x 方向の正味の摩擦力なので

$$\tau_{y+dy}dx - \tau_y dx = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy \quad (2.6)$$

これから流体の運動量方程式

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy \quad (2.7)$$

$$\therefore u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\nu = \mu/\rho [\text{m}^2/\text{s}] : \text{動粘性係数})$$

を得ます⁴。なお、摩擦による発熱は無視しています⁵。

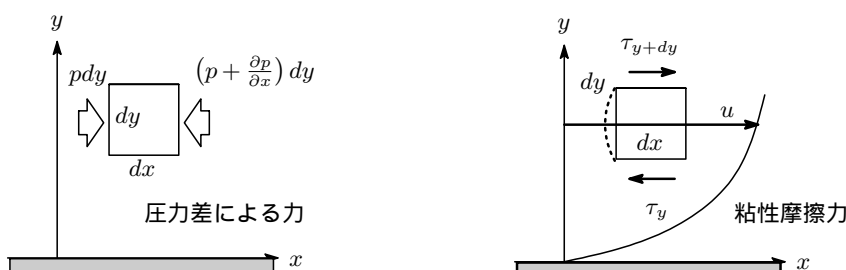


図 5: 微小体積要素に作用する力

エネルギー方程式

流体の熱伝導率 λ ，定圧比熱 c_p は一定とし，温度境界層内のエネルギー方程式を導きます。 x 方向の温度勾配は y 方向のより格段に小さい ($\partial T/\partial x \ll \partial T/\partial y$) と考えられるので， x 方向への熱伝導は無視します。流体が流れている場合は，熱伝導に加えて流体の移動に伴うエネルギー（エンタルピー $c_p T$ ）の輸送（対流）も生じるので，これらも考慮します。そして，微小体積要素に出入りするすべてのエネルギーに対して

$$\text{「流入エネルギー」} - \text{「流出エネルギー」} = 0 \quad (2.8)$$

がエネルギー保存則です。

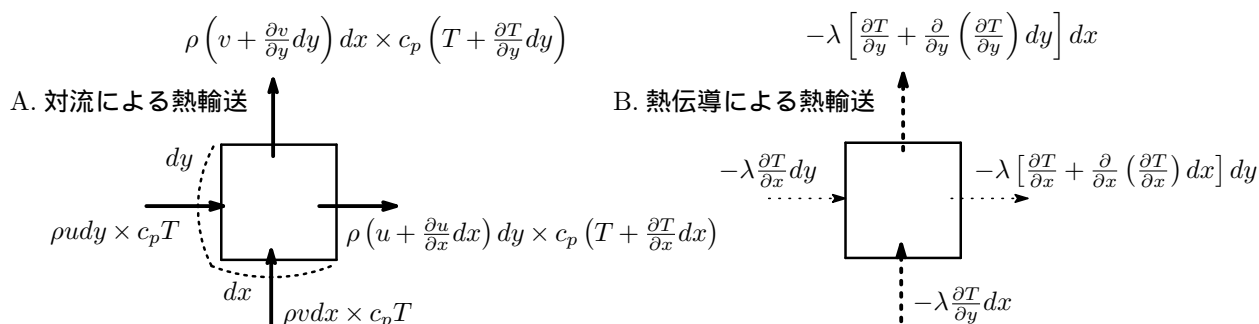


図 6: 熱エネルギーの輸送

A. 対流による熱エネルギーの収支

- 左面から流入するエネルギー： $\rho u dy c_p T$
- 右面から流出するエネルギー： $\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy \times c_p \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right)$

⁴粘性流体の運動方程式 Navier-Stokes の方程式も参照されたし。

⁵極超音速飛行や大気圏突入など流速が非常に大きい場合でなければ粘性摩擦熱の影響は無視できます。

- 下面から流入するエネルギー： $\rho v dx \times c_p T$
- 上面から流出するエネルギー： $\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dy \right) dx \times c_p \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy \right)$

微小体積要素における対流によるエネルギー収支は，高次の項を無視し，質量保存則を利用すれば

$$\begin{aligned}
 & \rho u dy c_p T + \rho v dx \times c_p T \\
 & - \left[\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy \times c_p \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx \times c_p \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy \right) \right] \\
 & = -\rho c_p dx dy \left[\frac{\partial T}{\partial x} \left(u + \cancel{\frac{\partial u}{\partial x} dx} \right) + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \left(v + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y} dy} \right) \right] \\
 & \doteq -\rho c_p dx dy \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

となります。

B. 熱伝導による熱エネルギーの収支

- 左面から流入するエネルギー： $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy \simeq 0$ ($\because \partial T / \partial x \sim 0$)
- 右面から流出するエネルギー： $-\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy \simeq 0$
- 下面から流入するエネルギー： $-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx$
- 上面から流出するエネルギー： $-\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx$

したがって，エネルギー収支は

$$\cancel{-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx} - \left\{ -\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx \right\} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy \tag{2.10}$$

となり，エネルギー保存則より (2.9) と (2.10) の和は 0 でなければならないので，求めるエネルギー方程式は

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{2.11}$$

あるいは

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad a = \lambda / \rho c_p \text{ [m}^2/\text{s]} \tag{2.12}$$

となります。 a は温度（熱）の伝わりやすさを表し，熱拡散率あるいは温度伝導率と呼ばれます。

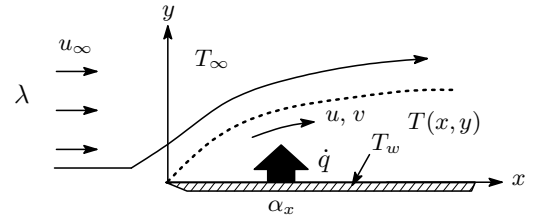
以上で平板に沿う層流境界層の熱伝達基礎方程式が得られました。原理的にはこの方程式を与えられた境界条件のもとに解けば速度分布，温度分布を求めることができます。

§ 3.

水平に置かれた平板上の強制対流熱伝達

流体が平板上をファンやポンプなどで強制的に流動されて場合，速度場 $u(x, y)$, $v(x, y)$ は動粘性係数 ν が温度 T によって変化しなければ，質量保存の式と運動量方程式からなる境界層方程式を解くことで，温度場のエネルギー方程式 (2.12) とは無関係に決まります。このように温度場の影響を受けずに速度場が決まる流れを強制対流と呼んでいます。一方，例えば風呂の湯のように流体の運動が温度差による密度差だけに起因する流れを自然対流⁶と呼んでいます。

強制対流では，熱伝導率 λ や流体の密度 ρ が一定の場合，質量保存の式と運動量方程式より速度場 $u(x, y)$, $v(x, y)$ を求め，その結果をエネルギー方程式に代入してそれを解くことで温度場 $T(x, y)$ が求められ，これから伝熱量が決まります。この一連のプロセスは次のとおりです。



$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{質量保存の式} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \text{運動量方程式} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{速度場 } u(x, y), v(x, y) \text{ が決まる} \\
 & \quad \downarrow \\
 & \text{エネルギー方程式} \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \rightarrow \text{温度場 } T(x, y) \text{ が決まる} \\
 & \quad \downarrow \\
 & \text{熱伝達率 } \alpha_x = \frac{-\lambda(\partial T / \partial y)_{y=0}}{T_w - T_\infty} \quad (\lambda: \text{流体の熱伝導率})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

3 - 1 . 平板層流境界層の速度場

平板の全長を L ，主流の速度を u_∞ とします。 ξ を無次元距離， ζ を無次元高さ， U, V をそれぞれ無次元速度として

$$\begin{cases} \xi = x/L, & \zeta = y/L \\ U = u/u_\infty, & V = v/u_\infty \end{cases} \tag{3.2}$$

と置いて，速度場を決める (3.1) の基礎方程式を次の無次元方程式に書き換えます。

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial \xi} + V \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\nu}{Lu_\infty} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \end{cases} \tag{3.3}$$

ここで Re は

$$Re = \frac{Lu_\infty}{\nu} = \frac{\text{代表長さ} \times \text{主流速度}}{\text{動粘性係数}} \left[\frac{[\text{m}] [\text{m/s}]}{[\text{m}^2/\text{s}]} \right] \tag{3.4}$$

で定義される無次元数でレイノルズ数と呼ばれ，代表長さ L は平板の流れでは平板先端からの距離をとります。 Re がある臨界値を超えると層流境界層は乱流境界層へと遷移しますが，このときの Re を臨界レイノルズ数といい，平板では $Re^c \simeq 5 \times 10^5$ 程度とされます。

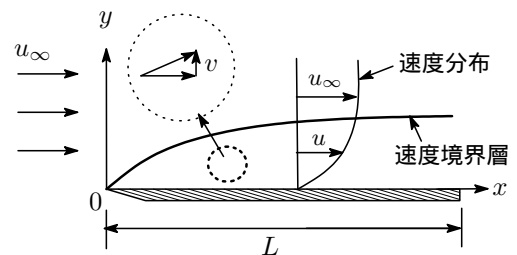


図 7: 平板上の速度境界層

⁶自然対流では境界層方程式の内の速度場方程式に温度場に依存する浮力項が付加されて速度場と温度場が干渉し合うので，この2つの場の連立方程式を解く必要があり，数学的にかなり厄介なものになります。

さて、偏微分方程式 (3.3) の境界条件を

$$\zeta = 0 : U = 0, V = 0; \quad \zeta = \infty : U = 1.0 \quad (3.5)$$

とします。(3.3) の第 1 式は任意関数 $\Psi(x, y)$ を使って

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (3.6)$$

と表せます。 $\Psi(x, y)$ を流れ関数と呼ばれ、 U, V は Ψ を知れば求められます。ここで ξ, ζ の代わりに

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = \zeta \sqrt{\frac{Re}{\xi}} \quad (Re = Lu_\infty/\nu) \quad (3.7)$$

なる変数 η を導入し、さらに流れ関数 Ψ を

$$\Psi = \sqrt{\frac{\xi}{Re}} f(\eta) \quad (3.8)$$

とにおいて Ψ を $f(\eta)$ で書き換えると (3.3) は η を変数とする常微分方程式に変換できます。

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{\xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{\eta}{\zeta} \quad (3.9)$$

の関係を使えば

$$\begin{aligned} U &= \frac{u}{u_\infty} = \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = \sqrt{\frac{\xi}{Re}} \cdot \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \equiv f'(\eta) \\ V &= \frac{v}{u_\infty} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{f}{\sqrt{\xi Re}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi}{Re}} f' \frac{\eta}{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi Re}} (\eta f' - f) \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\frac{f'' \eta}{2\xi} \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = f'' \frac{\eta}{\zeta} = f'' \sqrt{\frac{Re}{\xi}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} &= \sqrt{\frac{Re}{\xi}} \left(\frac{\partial f''}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = Re \frac{f'''}{\xi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となるので、これらを (3.3) に入れて整理すると

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + V \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} &= f' \left(-\frac{\eta f''}{2\xi} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\xi Re}} (\eta f' - f) f'' \sqrt{\frac{Re}{\xi}} - \frac{1}{Re} Re \frac{f'''}{\xi} \\ &= - \left(f''' + \frac{1}{2} f f'' \right) = 0 \\ \therefore f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

を得ます。 f, f' がわかれば、各速度成分 u, v は次式から算出できます。

$$u = u_\infty f'(\eta), \quad v = \frac{u_\infty}{2\sqrt{Re_x}} (\eta f' - f) \quad (Re_x = xu_\infty/\nu) \quad (3.12)$$

微分方程式 (3.11) の境界条件は、(3.5) を焼き直して次のようになります。

$$\begin{aligned} \zeta = 0 \begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \end{cases} &\longrightarrow \eta = 0 \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \\ \zeta = \infty : U = 1 &\longrightarrow \eta = \infty : f'(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

ところで、常微分方程式に変換できたとはいえこの解析解を求めることはほとんど不可能で、Blasius(1908) や Howarth(1938) 等らの努力により数値解が求められました⁷。その結果を図 8 と表 1 に示します。 y 方向の流速 v は境界層の外でも 0 とはならず、 $\eta \rightarrow \infty$ で一定値

$$v_{\infty} = 0.8604 u_{\infty} \sqrt{\frac{\nu}{u_{\infty} x}} \quad (3.14)$$

となること図 8・右図からわかります。これは速度境界層の発達に伴い壁面近傍での流速が x 方向に次第に低下し、その結果排除された流体が壁面から離れる方向に向かうために生じるわけです。いずれにしても、 f が求められれば、無次元速度 U, V は (3.10) から得られます。

速度境界層の厚さ δ は、境界層内の流速 u が主流の流速 u_{∞} の 99% に達する y の値と定義されるので、図 8 より $\eta = 5$ のときの y 値を速度境界層の厚さとすると (3.7) より

$$\delta = 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}} \quad \text{or} \quad \frac{\delta}{L} = \frac{5.0}{\sqrt{Re}} \quad (3.15)$$

と求められ、 δ は平板先端からの距離 x の平方根に比例して成長することがわかります。また、 δ は Re の平方根に逆比例するので、レイノルズ数が高くなるほど境界層厚さは薄くなります。

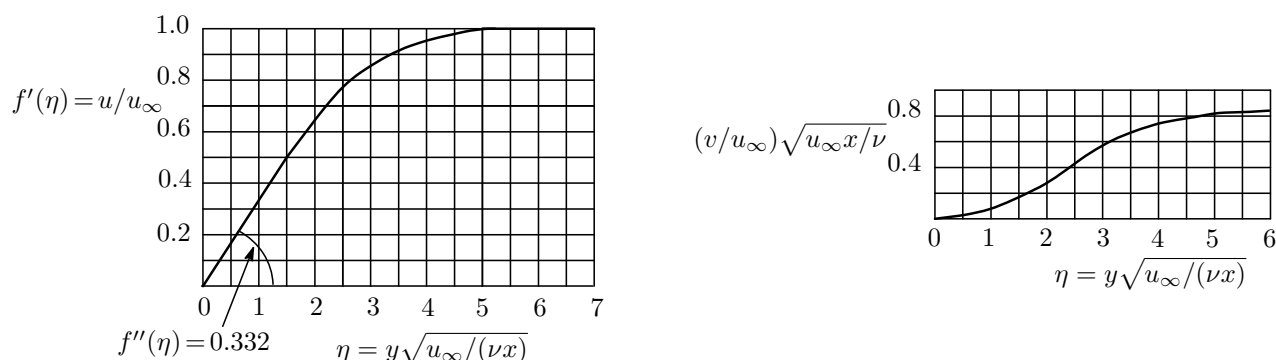


図 8: 平板層流境界層内の x, y 方向の流速成分 u, v の分布

表 1: Blasius 方程式の数値解

$\eta = y\sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}}$	f	$f' = u/u_{\infty}$	f''	$\eta f' - f$
0.00	0.0000	0.00000	0.33206	0.00000
0.50	0.0415	0.16588	0.33091	0.04145
1.00	0.1656	0.32978	0.32301	0.16421
1.05	0.3701	0.48679	0.30256	0.36005
2.00	0.6500	0.62977	0.26675	0.60951
2.50	0.9963	0.75127	0.21741	0.88184
3.00	1.3968	0.84605	0.16136	0.14133
3.50	1.8377	0.91305	0.10777	1.35795
4.00	2.3058	0.95552	0.06423	1.51633
4.50	2.7902	0.97952	0.03398	1.61769
5.00	3.2833	0.99155	0.01591	1.67444
5.50	3.7806	0.99688	0.00658	1.70227
6.00	4.2796	0.99898	0.00240	1.71422
6.05	4.7794	0.99970	0.00077	1.71873
7.00	5.2793	0.99993	0.00022	1.72021
7.05	5.7793	0.99999	0.00006	1.72065
8.00	6.2793	1.00000	0.00001	1.72076

⁷Excel で数値解を求めることができます。 <https://chemeng.web.fc2.com/fl/fl5.html>。 または、成書では伊藤章「Excel で気軽に移動現象論等を参照されたし。

いま, 20°C , 1 気圧で流速 $u_{\infty} = 10\text{m/s}$ で流れている空気 ($\nu = 0.156 \times 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$) の流れに平行に平板を置いた場合, 境界層厚さが $\delta = 5\text{mm}$ となる距離は (3.15) より

$$x = \frac{u_{\infty}}{5^2\nu}\delta^2 = \frac{10}{25 \times 0.156 \times 10^{-4}} \times (5 \times 10^{-3})^2 = 0.64\text{m}$$

この位置でのレイノルズ数は

$$Re_x = \frac{xu_{\infty}}{\nu} = \frac{10 \times 0.64}{0.156 \times 10^{-4}} = 4.1 \times 10^5 < 5 \times 10^5 \quad (3.16)$$

臨界レイノルズ数以下なので層流境界層を保っています。

3 - 2 . 壁面局所摩擦力 (せん断力)

平板に作用する x 方向の粘性摩擦力 (せん断力) τ_w の大きさを求めておきます。 τ_w はニュートンの粘性法則より単位面積当たりの大きさは

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.17)$$

で与えられるので

$$u = u_{\infty}f'(\eta), \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial y} = u_{\infty}f''(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_{\infty}f''(\eta)\sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}}$$

の関係式を使えば, $Re_x = xu_{\infty}/\nu$ として

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho u_{\infty}^2 f''(0) \sqrt{\frac{\nu}{u_{\infty}x}} = \rho u_{\infty}^2 f''(0) / \sqrt{Re_x} \quad (\nu = \mu/\rho)$$

となります。 $f''(0)$ は図 8・左の原点付近の傾きより $f''(0) = 0.332$ と求められるので, 最終的に (3.17) は

$$\tau_w = \frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2 \times 0.664 / \sqrt{Re_x} \quad \text{or} \quad \left(\tau_w = 0.332\mu \sqrt{\frac{u_{\infty}^3}{\nu x}} \right) \quad (3.18)$$

と表せます。また, 上式を

$$\tau_w = C_f \frac{\rho u_{\infty}^2}{2}, \quad C_f = \frac{\tau_w}{(1/2)\rho u_{\infty}^2} = 0.664 / \sqrt{Re_x} \quad (3.19)$$

と表したときの係数 C_f は局所摩擦係数と呼ばれます。

例 3. 20°C の一様な水の流れの中に薄い平板が流れに平行に置かれている。流速は $u_{\infty} = 0.5\text{m/s}$, 平板の寸法は流れ方向に $L = 0.5\text{m}$, 幅 $W = 0.5\text{m}$ とする。このとき, 平板の中心における速度境界層の厚さ δ と位置 x でのせん断力並びに平板全面に働く摩擦力を求めよ。なお, 20°C における水の動粘性係数 ν と粘性係数 μ は

$$\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}, \quad \mu = 1.002 \times 10^{-3} \text{Pa}\cdot\text{s}$$

とする。

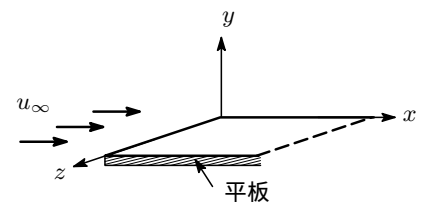
Ans.3

$x = 0.25\text{m}$ として速度境界層の厚さは (3.15) より

$$\delta = 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}} = 5.0 \times \sqrt{\frac{1.004 \times 10^{-6} \times 0.25}{0.5}} = 3.54 \times 10^{-3} \text{m} = 3.54 \text{mm}$$

先端から距離 $x = 0.25\text{m}$ における局所レイノルズ数 Re_x は

$$Re_x = \frac{xu_{\infty}}{\nu} = \frac{0.25 \times 0.5}{1.004 \times 10^{-6}} = 1.25 \times 10^3$$



で臨界レイノルズ数 ($\sim 10^5$) より小さいので流れは層流です。 $x=0.25\text{m}$ でのせん断応力は (3.18) より

$$\tau_w|_{x=0.25} = 0.332\mu\sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}}x^{-1/2} = 0.332 \times 1.002 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{0.5^3}{1.004 \times 10^{-6}}} \times 0.25^{-1/2} = 0.059 \text{ N} \quad (3.20)$$

平板全面に働く摩擦力 F は

$$F = \int_0^{L_x} \tau_w L_z dx = 0.332\mu\sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}}L_z \int_0^{L_x} x^{-1/2} dx = 0.664\mu\sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}}L_z\sqrt{L_x}$$

$L_x = 0.5, L_z = 0.5$ を上式に入れると $F = 8.3 \times 10^{-2} \text{ N}$ となります。1円玉と500円玉の質量はそれぞれ1gと7gなので501円を手にしたときに感じる重さが $\sim 0.08\text{N}$ といったところです。

3 - 3 . 平板層流境界層内の温度分布と熱伝達率

強制対流の場合は、すでに述べたように速度場が与えられるとそれを (3.1) のエネルギー方程式に代入することで温度場を求めることができます。ここでは流体の主流温度 T_∞ と平板の壁面温度 T_w を一定として境界層内の温度場 $T(x, y)$ を求めていくことにします。

次式で定義される無次元温度

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (3.21)$$

を導入してエネルギー方程式を無次元方程式に書き換えます。エネルギー方程式の各項は

$$\begin{cases} u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{u_\infty}{L} (T_\infty - T_w) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{u_\infty}{L} (T_\infty - T_w) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \\ a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{a}{L^2} (T_\infty - T_w) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \end{cases}$$

となるので、これを (3.1) に入れて整理すると

$$U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{a}{u_\infty L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (3.22)$$

となります。ここで

$$P_r \equiv \frac{\nu}{a} = \frac{\text{動粘性係数}}{\text{熱拡散率}} \quad (\nu = \mu/\rho, a = \lambda/\rho c_p) \quad (3.23)$$

で定義される無次元数を導入します。これはプラントル数と呼ばれ、流体の種類に固有の物性値⁸です。プラントル数は運動量の拡散率を示す動粘性係数 $\nu[\text{m}^2/\text{s}]$ と熱の拡散率を示す $a[\text{m}^2/\text{s}]$ の比で、 ν が大きいと拡散の効果が大きく速度の変化する領域は広い範囲に及び⁹ため、速度境界層の厚さ δ は大となります。一方、 a が大きいと温度の変化する領域が広い範囲に及び、温度境界層の厚さ δ_T が大となります (図 9 右参照)。このようなことから、速度境界層の厚さ δ と温度境界層の厚さ δ_T の大小関係はプラントル数 P_r の大小によって変化します。

⁸一般に液体金属では $P_r < 1$, 液体では $P_r > 1$, 気体では $P_r \simeq 1$, 空気では大気圧の室温で $P_r \simeq 0.71$ 程度。

⁹高粘度の水飴をかき回すと遠くの水飴まで動く。

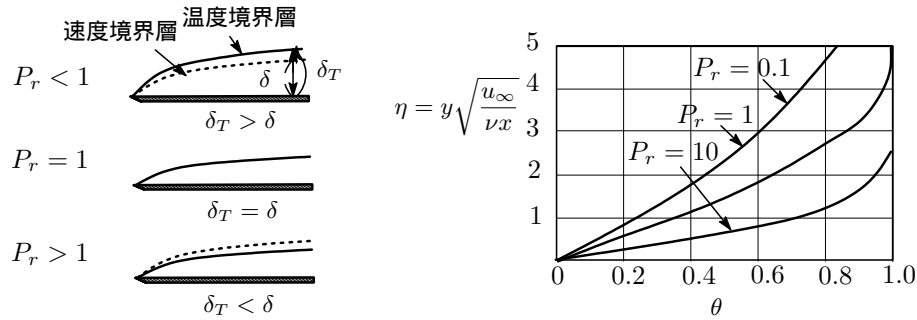


図 9: プランドル数と速度・温度境界層厚さの関係/平板境界層内の温度分布

さて, (3.22) の右辺の係数はプラントル数を用いて

$$\frac{a}{u_\infty L} = \frac{1}{(Lu_\infty)/\nu \cdot (\nu/a)} = \frac{1}{Re \cdot Pr}$$

と書けるので, (3.22) は次の無次元方程式となります。

$$U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{Pr \cdot Re} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (3.24)$$

これで準備が整ったので, $Pr = 1$ の場合と $Pr \neq 1$ の場合についてみていくことにします。

(A) $Pr = 1$ の場合: この特殊な場合は

$$U \frac{\partial U}{\partial \xi} + V \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \longrightarrow U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (3.25)$$

となり, この式は上で見るように (3.3) の第 2 式で U と θ を入れ替えただけの同じ形であり, θ は

$$\theta = c_1 U + c_2 \quad (c_1, c_2: \text{定数}) \quad (3.26)$$

と置けます。定数 c_1, c_2 は, θ も U と同じ境界条件のときは

$$\zeta = 0: U = 0 \longrightarrow \theta = 0, \quad \therefore c_2 = 0$$

$$\zeta = \infty: U = 1 \longrightarrow \theta = 1, \quad \therefore c_1 = 1$$

となり, 速度分布と温度分布は完全に一致し, 次式が成立します。

$$\frac{u}{u_\infty} = \theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (3.27)$$

温度境界層の厚さ δ_T は $(T - T_\infty)/(T_\infty - T_w)$ の 99% になる y の値で定義されるので, 温度境界層の厚さ δ_T と速度境界層の厚さ δ は完全に一致します。

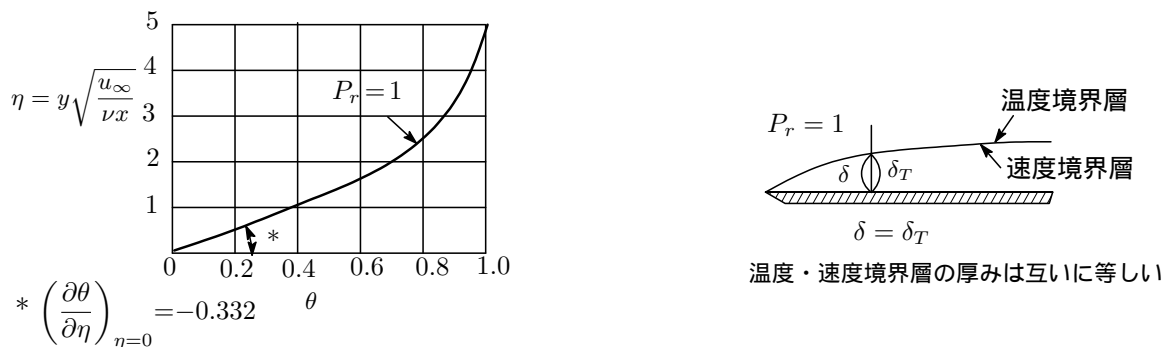


図 10: 平板境界層内の温度分布と温度・速度境界層

図 10 は流れ方向に圧力勾配がないとして求めた Blasius の数値解をプロットしたもので, これから

$(\partial\theta/\partial\eta)_{\eta=0} = 0.332$ と得られます。この値を用いて壁面 ($y = 0$) における温度勾配を求めると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} &= \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_w - T_\infty) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \\ &= -0.332(T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

となります。したがって、熱流束 \dot{q} は

$$\dot{q} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.332\lambda(T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (3.29)$$

となり、局所熱伝達率 α_x は (1.2) より

$$\alpha_x = \frac{\dot{q}}{(T_w - T_\infty)} = 0.332\lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (Pr = 1) \quad (3.30)$$

と得られます。局所熱伝達率 α_x は主流速度 u_∞ の平方根に比例し、平板先端からの距離 x の平方根に逆比例することがわかります。平板先端 ($x = 0$) では α_x は無限大で、下流に進むに従って温度境界層は厚く、壁面近傍の温度勾配が緩やかになっていくので熱伝達率が減少していくと考えられます。位置 x における局所ヌセルト数は次式で表されます。

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.332\sqrt{Re_x} \quad (Re_x = u_\infty x / \nu: \text{局所レイノルズ数}) \quad (3.31)$$

(B) $P_1 \neq 1$ の場合 (一般的な場合) : 次の関係式を使って (3.24) を書き換えていきます。

$$\begin{cases} U = f', & V = \frac{1}{2\sqrt{\xi Re}}(\eta f' - f) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\frac{\eta}{2\xi} \theta', & \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{\eta}{\zeta} \theta' \quad (\theta' \equiv \partial\theta/\partial\eta) \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right] = \sqrt{\frac{Re}{\xi}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = \frac{Re}{\xi} \theta'' \end{cases} \quad (3.32)$$

そうすると θ に関する偏微分方程式が常微分方程式に置き換わります。

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{2\xi} f' \theta' + \frac{1}{2\sqrt{\xi Re}}(\eta f' - f) \frac{\eta}{\zeta} \theta' - \frac{1}{Pr \cdot Re} \frac{Re}{\xi} \theta'' \\ &= -\frac{\eta}{2\xi} f' \theta' + \frac{1}{2\xi}(\eta f' - f) \theta' - \frac{1}{Pr \cdot \xi} \theta'' = -\frac{f}{2\xi} \theta' - \frac{1}{Pr \cdot \xi} \theta'' = 0 \\ &\therefore \theta'' + \frac{1}{2} Pr \cdot f \cdot \theta' = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

境界条件 $\eta = 0 : \theta = 0$, $\eta = \infty : \theta = 1$ を満たす (3.33) の解は Pohlhausen によって初めて与えられ

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta} \quad (3.34)$$

となります。これから壁面 ($y = 0$) での流体内の y 方向の温度勾配を求めると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} &= (T_\infty - T_w) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_\infty - T_w) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} &= \left[\int_0^\infty \exp\left(-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

となります。Pohlhausen は $P_r > 0.6$ に対して

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} \approx 0.332 P_r^{1/3} \quad (3.36)$$

の近似式が成り立つことを示しました。これを用いれば (3.35) は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_\infty - T_w) \times 0.331 P_r^{1/3} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (3.37)$$

と表せ、局所熱伝達率 α_x は

$$\alpha_x = 0.332 P_r^{1/3} \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (3.38)$$

となります。平板の平均熱伝達率 α_m は

$$\alpha_m = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx = 0.664 P_r^{1/3} \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu l}} \quad (3.39)$$

となります。局所ヌセルト数は (3.38) より

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.332 P_r^{1/3} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = 0.332 P_r^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (3.40)$$

平均ヌセルト数 Nu_m は、

$$Nu_m = \frac{\alpha_m l}{\lambda} = 0.664 P_r^{1/3} \sqrt{\frac{u_\infty l}{\nu}} = 0.664 P_r^{1/3} Re_l^{1/2} \quad (Re_l = u_\infty l / \nu) \quad (3.41)$$

となります。また、(2.1) と (3.40)、また (3.15) よりプラントル数と速度境界層と温度境界層の厚さの比の関係式として

$$\begin{cases} Nu_x = 0.332 P_r^{1/3} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \simeq \frac{x}{\delta_T} \rightarrow \delta_T \sim 3.01 P_r^{-1/3} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \\ \delta = 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \end{cases}$$

より

$$\frac{\delta}{\delta_T} \simeq P_r^{1/3} \quad (3.42)$$

が得られます。

例.4 温度 $T_\infty = 34^\circ\text{C}$ の空気中に、温度 $T_\infty = 120^\circ\text{C}$ に保たれた長さ $l = 0.20\text{m}$ の平板が流れに平行に置かれている。空気の流速が $u_\infty = 2.0, 4.0$ および 6.0m/s のそれぞれの場合について、局所熱伝達率が平板に沿ってどのように変化するかを図示せよ。なお、空気の物性値としては、平板と流体温度との算術平均である膜温度 $T_f = (34 + 120)/2 = 77^\circ\text{C}$ における以下の値を用いよ。

$$\nu = 2.06 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 2.97 \times 10^{-2} \text{W/mK}, \quad Pr = 0.718$$

Ans.4 空気の流れが層流であることを確認するために $u_\infty = 6.0\text{m/s}$, $l = 0.2\text{m}$ におけるレイノルズ数を求めると

$$Re_l = \frac{u_\infty l}{\nu} = \frac{6.0 \times 0.20}{2.06 \times 10^{-5}} = 5.83 \times 10^4 < 5 \times 10^5$$

となるので、平板を流れる各流速の空気の流れは平板の先端から後端まで層流境界層で覆われていることがわかります。各流速に対する α_x

$$\alpha_x = 0.332 P_r^{1/3} \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad [\text{W/m}^2\text{K}]$$

をプロットすると図 11 になります。図に示す通り局所伝熱率は平板先端からわずかの距離で急激に低下します。このことは (2.1) からわかるように温度境界層の発達起因し、伝熱量を増やすためには温度境界層の厚さ δ_T を小さくする工夫が必要となります。

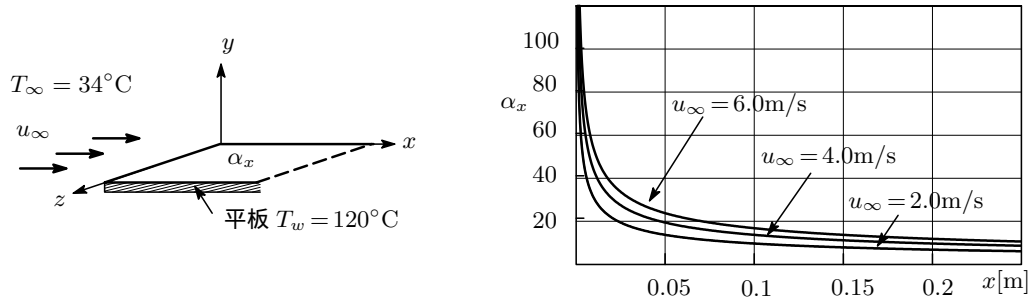


図 11: 局所熱伝達率の位置 x による変化

例.5 長さ $l = 6\text{cm}$ で幅の広い平板上を大気圧で $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ の空気が速度 $u_\infty = 50\text{m/s}$ で流れている。平板表面が一様に $T_w = 60^\circ\text{C}$ であるとき、平均熱流束 \dot{q} を求めよ。膜温度 40°C における空気の物性値は次のとおりとする。

$$\nu = 1.75 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 2.7 \times 10^{-2} \text{W/mK}, \quad \rho = 1.091 \text{kg/m}^3, \quad c_p = 1.0 \times 10^3 \text{J/kg} \cdot \text{K}$$

Ans.5

$$Re = \frac{u_\infty l}{\nu} = \frac{50 \times 6 \times 10^{-2}}{1.75 \times 10^{-5}} = 1.714 \times 10^5 < 5 \times 10^5$$

となり、層流であることがわかります。プラントル数は

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda} = \frac{1.091 \times 1.0 \times 10^3 \times 1.75 \times 10^{-5}}{2.7 \times 10^{-2}} = 0.707$$

ヌセルト数と熱伝達率は

$$Nu = 0.664 Pr^{1/3} Re^{1/2} = 245, \quad \alpha = Nu \frac{\lambda}{l} = 245 \times \frac{2.7 \times 10^{-2}}{6 \times 10^{-2}} = 110 \text{W/m}^2\text{K}$$

したがって、平均熱流束は

$$\dot{q} = \alpha(T_w - T_\infty) = 110 \times (60 - 20) = 4400 \text{W/m}^2$$

例.6 $T_w = 380\text{K}$ に加熱された幅 $b = 0.50\text{m}$ の平板に平行に大気圧下で $T_\infty = 300\text{K}$ の空気を $u_\infty = 10\text{m/s}$ で流す。このとき平板の片面からの放熱量を $\dot{Q} = 200\text{W}$ とするためには、平板の流れ方向長さ l [m] はいくらにすべきか。なお、膜温度 340K における空気の物性値を次のとおりとする

$$\nu = 1.99 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 2.90 \times 10^{-2} \text{W/mK}, \quad Pr = 0.718 \quad (3.43)$$

Ans.6 層流であることを仮定して l を求めると

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q} &= \alpha_m b l (T_w - T_\infty) \\ \alpha_m &= 0.66 Pr^{1/3} \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu l}} \end{aligned} \right\} \rightarrow l = \frac{\nu}{u_\infty} \left[\frac{\dot{Q}}{0.664 Pr^{1/3} \lambda b (T_w - T_\infty)} \right]^2 = 0.167 \text{ [m]}$$

なおレイノルズ数は

$$Re = \frac{u_\infty l}{\nu} = 8.4 \times 10^4 < 10^5$$

であり臨界レイノルズ数より小さいので、この流れは層流であり、上式が成立することがわかります。

別解：積分法（プロファイル法）による近似解

平板層流境界層内の温度分布と熱伝達率を求める別の方法を載せておきます。その方法とは、積分法（プロファイル法）¹⁰と呼ばれる近似解を求める方法で、速度分布と温度分布を適当に仮定してそれが境界

¹⁰ 「自然対流熱伝達」のレポート参照。

条件を満たすように決定し、その分布に基づいて熱伝達率を求める方法です。

境界層内の速度分布、温度分布を求めるための基礎方程式は(3.1)に示した質量保存則、運動量方程式、エネルギー方程式でした。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 質量保存則} \quad : \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 2) \text{ 運動量方程式} \quad : u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 3) \text{ エネルギー方程式} : u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (a = \lambda / \rho c_p) \end{array} \right. \quad (3.44)$$

速度分布

運動量方程式の両辺を0から速度境界層の厚さ δ まで積分します。

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy \quad (3.45)$$

部分積分することで左辺は

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \int_0^\delta \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + [uv]_0^\delta - \int_0^\delta \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ & = \int_0^\delta u \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + (uv)_{y=\delta} \quad (\because y=0 : u, v=0) \\ & = \int_0^\delta \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + (uv)_{y=\delta} \quad (\because \text{質量保存則適用}) \\ & = \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy + (uv)_{y=\delta} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy \\ & = \frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta (u - u_\infty) u dy \right] \end{aligned}$$

となり、右辺も同様にして

$$\int_0^\delta \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy = \nu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^\delta = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\because y=\delta : \partial u / \partial y = 0)$$

したがって運動量方程式の積分形は

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta (u_\infty - u) u dy \right] = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.46)$$

となります。次に、境界層内の速度分布(速度プロファイル)を y の3次式で表せると仮定します。

$$u = a + by + cy^2 + dy^3 \quad (3.47)$$

4つの係数 a, b, c, d は次の4つの境界条件を満足するように決めます。まず壁 $y=0$ では $u=0, v=0$ で、また、(3.44)より $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ 。次に境界層の外縁 $y=\delta$ では $u=u_\infty$ で、境界層外縁では y 方向の流速 u の変化はないので $\partial u / \partial y = 0$ 。これで4つの境界条件が揃ったので係数 a, b は次のように決まります。

$$\left\{ \begin{array}{l} y=0 : u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow a=0, \quad c=0 \\ y=\delta : u=u_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow b\delta + d\delta^3 = u_\infty, \quad b + 3d\delta^2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.48)$$

$$\therefore a=0, \quad b = \frac{3}{2} \frac{u_\infty}{\delta}, \quad c=0, \quad d = -\frac{1}{2} \frac{u_\infty}{\delta^3}$$

これを (3.47) に入れて整理すると，速度分布は

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (3.49)$$

と得られます。これを (3.46) に入れて積分し，整理すると

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{u_\infty} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \delta^2 = \frac{140}{13} \frac{\nu}{u_\infty} \quad (3.50)$$

となります。 $x = 0$ で $\delta = 0$ であるので，これから平板先端からの距離 x における境界層厚さ δ は

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}} \quad (3.51)$$

と得られ，(3.15) に極めて近いことがわかります。(3.51) を (3.49) に入れると速度分布は

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_\infty} &= 0.323 \frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} - 5.00 \times 10^{-3} \left(\frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \right)^3 \\ &= 0.323\eta - 5.00 \times 10^{-3}\eta^3 \end{aligned} \quad (3.52)$$

となります (図 12)。平板の局所摩擦力は (3.17) より，微小項を無視して

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.323 \frac{\mu u_\infty}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \quad (3.53)$$

局所摩擦係数 C_f は

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2 / 2} = 0.646 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} = 0.646 / \sqrt{Re_x} \quad (3.54)$$

となります。(3.18)，(3.19) に極めて近いですね。ついでに平均摩擦係数を求めておくと

$$C_{mf} = \frac{1}{l} \int_0^l 0.646 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} dx = 1.292 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty l}} \quad (3.55)$$

温度分布

エネルギー方程式の両辺を 0 から温度境界層の厚さ δ_T まで積分します。

$$\int_0^{\delta_T} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = \int_0^{\delta_T} \left(a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dy \quad (3.56)$$

左辺を部分積分し

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_T} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy + \int_0^{\delta_T} \left(v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_0^{\delta_T} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy + [vT]_0^{\delta_T} - \int_0^{\delta_T} \left(T \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_0^{\delta_T} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + v_{y=\delta_T} T_\infty \quad (\because T_{y=\delta_T} = T_\infty) \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} (Tu) dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} (T_\infty u) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} (T - T_\infty) u dy \end{aligned} \quad (3.57)$$

右辺も同様にして

$$\int_0^{\delta_T} \left(a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dy = a \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_0^{\delta_T} = -a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\because (\partial T / \partial y)_{y=\delta_T} = 0) \quad (3.58)$$

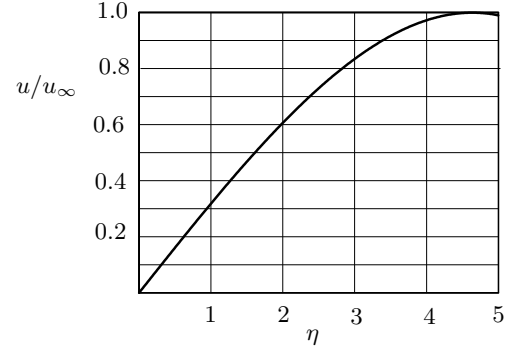


図 12: 速度分布

したがって，エネルギー方程式の積分形は次式となります。

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_T} (T_\infty - T) u dy \right] = a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.59)$$

境界層内の位置 x における温度分布（温度プロファイル）を

$$T = A + By + Cy^2 + Dy^3 \quad (3.60)$$

と仮定¹¹し，境界条件を満たすように係数を決めてやります。

$$\begin{cases} y = 0 : T = T_w, & \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \rightarrow A = T_w, \quad C = 0 \\ y = \delta : T = T_\infty, & \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \rightarrow B + 3D\delta_T^2 = 0, \quad B\delta_T + D\delta_T^3 = T_\infty - T_w \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\therefore A = T_w, \quad B = \frac{3}{2} \frac{T_\infty - T_w}{\delta}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2} \frac{T_\infty - T_w}{\delta_T^3}$$

したがって

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \quad (3.62)$$

となります。局所熱伝達率は (1.3) と (3.62) より

$$\alpha_x = \frac{-\lambda(\partial T/\partial y)_{y=0}}{T_w - T_\infty} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_T} \quad (3.63)$$

そこで次に温度境界層の厚さ δ_T を求めていきます。(3.49) , (3.62) を (3.59) に入れて積分し， $\zeta = \delta_T/\delta$ において整理すると

$$\begin{cases} \text{左辺} : \int_0^{\delta_T} (T_\infty - T) u dy = (T_\infty - T_w) u_\infty \delta \left(\frac{3}{20} \zeta^2 - \frac{3}{280} \zeta^4 \right) \\ \text{右辺} : a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = (T_\infty - T_w) \frac{3}{2} \frac{a}{\delta \zeta} \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\therefore u_\infty \frac{d}{dx} \left[\delta \left(\frac{3}{20} \zeta^2 - \frac{3}{280} \zeta^4 \right) \right] = \frac{3}{2} \frac{a}{\delta \zeta}$$

となりますが， $\zeta < 1$ を仮定¹²すると ζ^4 の項は ζ^2 の項に対して無視できるので上式は

$$\frac{3}{20} u_\infty \frac{d}{dx} (\delta \zeta^2) = \frac{3}{2} \frac{a}{\delta \zeta} \rightarrow \frac{3}{20} u_\infty \delta \zeta \left(\zeta^2 \frac{d\delta}{dx} + 2\delta \zeta \frac{d\zeta}{dx} \right) = \frac{3}{2} a \quad (3.65)$$

となります。これに

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} x \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \sqrt{\frac{70}{13}} \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}$$

を入れて整理すると， ζ^3 を従属変数とする 1 階常微分方程式となります。

$$4x \zeta^2 \frac{d\zeta}{dx} + \zeta^3 = \frac{13}{14} \frac{a}{\nu} \rightarrow \frac{4}{3} x \frac{d(\zeta^3)}{dx} + \zeta^3 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \quad (Pr = \nu/a) \quad (3.66)$$

となります。境界条件を $x = x_0 : \zeta = 0$ として解を求め，その後で $x_0 \rightarrow 0$ とすると

$$\zeta = 0.976 Pr^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{4/3} \right]^{1/3} \xrightarrow{x_0=0} \zeta = \frac{\delta_T}{\delta} = 0.976 Pr^{-1/3} \quad (3.67)$$

¹¹ 近似の精度は温度，速度プロファイルの仮定の的確性によります。

¹² $\delta_T < \delta : Pr > 1$ を想定。

したがって、温度境界層と速度境界層の厚さの比として

$$\frac{\delta}{\delta_T} = 1.02Pr^{1/3} \quad (3.68)$$

の関係が得られます。温度境界層の厚さは (3.67) より

$$\delta_T = \frac{4.53}{Pr^{1/3}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \quad (3.69)$$

局所熱伝達率は (3.63) より

$$\alpha_x = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_T} = 0.331Pr^{1/3} \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (3.70)$$

局所熱流束 \dot{q} は

$$\dot{q} = \alpha_x(T_w - T_\infty) \quad (3.71)$$

から求められます。また、局所ヌセルト数は

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.331Pr^{1/3} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = 0.331Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (3.72)$$

補足：

(3.67) で $x_0 \rightarrow 0$ としなければ図 13 に示すように平板先端部に非伝熱部分をもつ等温平板のケースに適用できます。この場合

$$\delta_T/\delta = 0.976Pr^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{4/3} \right]^{1/3} \quad (3.73)$$

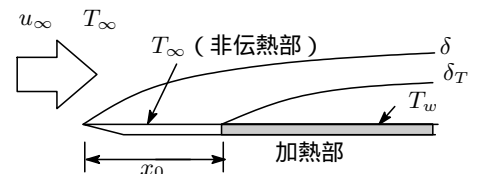


図 13: 途中から加熱がある場合

§ 4.

水平円管内の層流熱伝達

4 - 1 . 円管内の流れの様子

一様な速度 u_∞ で流体が水平に置かれた円管内に入った場合、図 14 に示すように円管の入り口から下流に向かって速度境界層が発達しはじめ、速度分布は下流に向かうにつれて変化していきます。そし

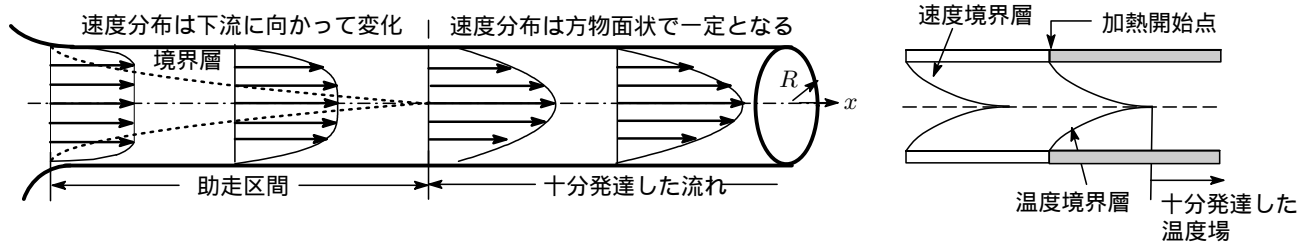


図 14: 円管内の層流の様子

て円管の入り口からある距離になると速度境界層は管の中心まで成長し、それより下流では流れの速度分布は放物面状となってもはや速度分布は変化しない一定の流れとなります。この流れを十分発達した流れ、ポアゼイコ流とか十分発達した速度場と呼んでいます。流れが十分に発達するまでの区間を速度助走区間、その長さを速度助走距離と呼んでいます。入り口がラッパ形の直径 D の円管の場合、層流の速度助走距離 l_u は次式で与えられます。

$$l_u/D = 0.05Re_D \quad (Re_D = u_m D/\nu < 2300, u_m : \text{平均流速}, D : \text{管の直径}) \quad (4.1)$$

十分に発達した流れでは円管の半径 r 方向の流速は 0 で圧力は一定、さらに速度 u は流れの方向 x 方向に変化しないので運動量の変化もありません。

円管を加熱した場合，図 14・右に示すように加熱開始点から温度境界層が発達し始めます。速度境界層と同様に温度境界層が円管の中央部に達するまでの区間を温度助走区間，それより下流を十分発達した温度場と呼んでいます。プラントル数 $Pr(= \nu/a)$ が大きい流体では温度が伝わりにくいため，温度境界層の発達が遅く，助走区間は長くなります。逆にプラントル数が非常に小さい場合は温度が伝わりやすいので温度境界の発達は早く，助走区間は短くなります。温度伝導率 a の大小が温度助走区間の長さに関係しています。

4 - 2 . 円管内の層流熱伝達

1) 十分に発達した流れの速度分布

十分に発達した流れの速度分布を求めていきます。円管の内半径を R ，任意の断面での圧力および圧力勾配 dp/dx は一定とします。図 15 に示すように，距離 x における円管の半径 r の微小体積要素に注目すると，十分に発達した流れでは運動量の時間的変化はなく，微小体積要素に作用する圧力とせん断力が釣り合いの状態にあることから

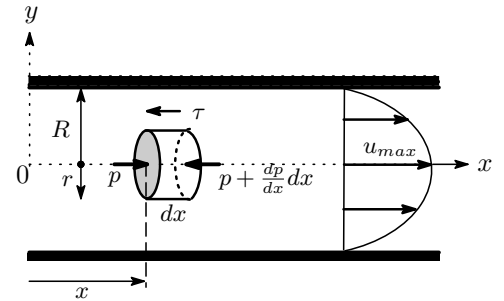


図 15: 円管内の速度分布

$$\pi r^2 \left[p - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \right] - 2\pi r \tau dx = 0$$

$$\pi r^2 dp = -2\pi r \tau dx = 2\pi r \mu dx \frac{du}{dr} \quad (\because \tau = -\mu(du/dr)) \quad (4.2)$$

$$\therefore du = \frac{1}{2\mu} r dr \frac{dp}{dx} \longrightarrow u = \frac{1}{4\mu} r^2 \left(\frac{dp}{dx} \right) + C$$

なお， $\tau = -\mu(du/dr)$ の負号は $du/dr < 0$ なので $\tau > 0$ として表すために付けています。積分定数 C は境界条件 $r = R : u = 0$ より決まり，その結果，円管内の速度分布は

$$u(r, x) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2) \quad (dp/dx < 0 : \text{一定}) \quad (4.3)$$

で表され，円管の中心 $r = 0$ で最大速度を示す放物形 of 速度分布となります。流れ方向の圧力勾配 dp/dx は一定としているので，この分布は流れ方向に対して変わりません。最大流速 u_{max} は上式より

$$u_{max} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.4)$$

となるので，速度分布は次式で表せます。

$$u(r) = u_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

円管を単位時間に通過する体積流量を \dot{V} [m^3/s] とすると

$$\dot{V} = \int_S u(r) dS = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.6)$$

となります。平均速度を u_m とすると， $u(r)$ を円管の全断面積 $S(= \pi R^2)$ について積分平均して

$$u_m = \frac{1}{S} \int_S u(r) dS = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.7)$$

と得られます。(4.4) と (4.7) から，最大流速 u_{max} は平均流速 u_m の 2 倍の速さの関係にあることがわかり，平均流速を使えば (4.5) は次式となります。

$$u(r) = 2u_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.8)$$

管摩擦係数 C_f を

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} \quad (4.9)$$

と定義すると、壁面のせん断力は

$$\tau_w = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dx} = \frac{4\mu}{R} u_m \quad (4.10)$$

となるので、管摩擦係数は

$$C_f = -\frac{R}{\rho u_m^2} \frac{dp}{dx} = \frac{16}{Re_D} \quad (Re_D = u_m D / \nu, \nu = \mu / \rho) \quad (4.11)$$

ここで、 Re_D は円管の直径 $D (= 2R)$ を代表長さとしたレイノルズ数です。

2) 温度分布とエネルギー方程式

速度分布が十分発達した管内流のある点より加熱が開始され、以降壁温が一定に保たれる場合について考えます。加熱開始点より温度境界層が発達し始めます。流れ方向 x 軸方向の温度勾配は半径方向

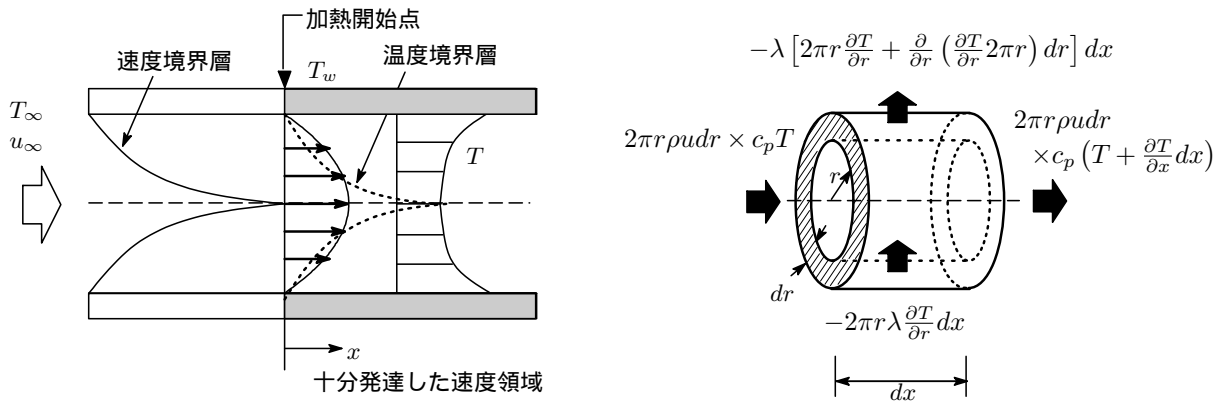


図 16: 微小円管要素に流入・流出するエネルギー

の温度勾配に比べ十分に小さい ($\partial T / \partial r \gg \partial T / \partial x$) ので x 方向の熱伝導は無視し、図 16 に示す微小円管要素へのエネルギー収支を考えます。 ρ を流体の密度、 c_p を定圧比熱、 λ を熱伝導率とすると

(1) 左側からの流入エネルギー： $2\pi r \rho u dr \times c_p T$

(2) 右側からの流出エネルギー： $2\pi r \rho u dr \times c_p \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right)$

(3) 内壁からの流入エネルギー： $-2\pi r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} dx$

(4) 外壁からの流出エネルギー： $-\lambda \left[2\pi r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r \right) dr \right] dx$

エネルギーの収支バランス「流入エネルギー流量 = 流出エネルギー流量」から (1)+(3)=(2)+(4) が成立するので、これから次式を得ます (エネルギー方程式を円筒座標表示することでも得られる)。

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (4.12)$$

これに (4.8) を入れて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 2u_m \frac{\rho c_p}{\lambda} r \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.13)$$

となり、 r で積分して

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = 2u_m \frac{\rho c_p}{\lambda} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + C_1, \quad \therefore \frac{\partial T}{\partial r} = 2u_m \frac{\rho c_p}{\lambda} \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4R^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{C_1}{r}$$

を得ます。境界条件 $r = 0 : \partial T / \partial r = 0$ より $C_1 = 0$ となり、さらに r で積分すると

$$T(r, x) = 2u_m \frac{\rho c_p}{\lambda} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + C_2$$

境界条件を $r = 0 : T = T_0$ (円管の中心温度) より $C_2 = T_0$ となるので、距離 x における円管断面の r 方向の温度分布式

$$T(r, x) = \frac{2u_m}{a} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{R^2}{4} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] + T_0, \quad (a = \lambda / \rho c_p: \text{熱拡散率}) \quad (4.14)$$

が得られます。円管の壁面温度 T_w は (4.14) に $r = R$ を代入して

$$T_w = \frac{3u_m R^2}{8a} \frac{\partial T}{\partial x} + T_0 \quad (4.15)$$

また、壁面の温度勾配は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{u_m R}{2a} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.16)$$

となります。円管断面での平均温度 T_m は $T(r, x)$ を円管の全断面積について積分平均すれば

$$T_m(x) = \frac{1}{S} \int_S T(r, x) dS = \frac{1}{S} \int_0^R 2\pi r T(r, x) dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R r T(r, x) dr \quad (4.17)$$

となります。

以上のことから十分に発達した速度場での温度場 $T(r, x)$ が満たす方程式 (エネルギー方程式) として

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{or} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{2u_m [1 - (r/R)^2]} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (4.18)$$

を得ます。この方程式の解は、最初に Graetz¹³により円管の壁面温度 T_w が一定に保たれている場合について境界条件を

$$\begin{cases} x = 0, r < R : T = T_\infty \\ x > 0, r = 0 : \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ x > 0, r = R : T = T_w \end{cases} \quad (4.19)$$

と設定して求められています。ここではその解法に立ち入ることはやめて、偏微分方程式を数値解析した結果を図 17 に載せておきます。詳細は伊藤章「Excel で気軽に移動現象論」丸善出版、平成 26 年を参照ください。

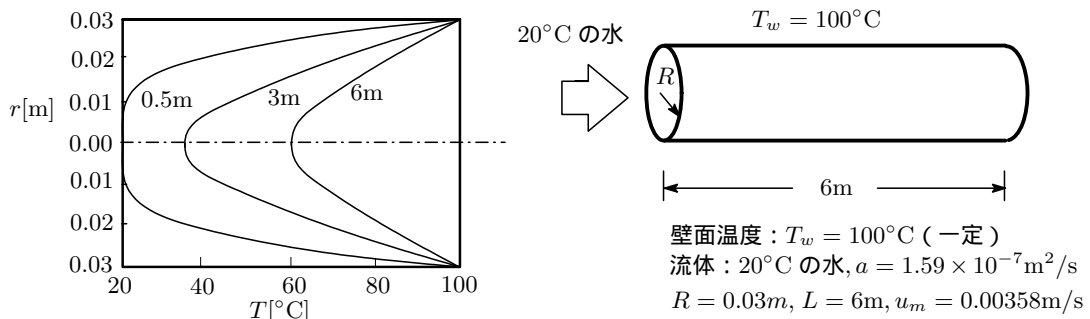


図 17: 円管内の温度分布 (壁温一定)

3) 熱伝達率と混合平均温度

平板上の強制対流熱伝達では温度境界層の外側には一定温度 T_∞ の流体の流れ (主流) が存在し、壁から流体への熱流速 \dot{q} は、主流の温度 T_∞ を基準温度として、 $\dot{q} = \alpha_x (T_w - T_\infty)$ で与えられました¹⁴。

¹³Leo Graetz (1856-1941): ドイツの物理学者

¹⁴(1.2) 参照

一方，速度場が十分に発達した管内流の場合，一定温度 T_∞ を保つ主流は存在せず流れ方向，半径方向に温度が変化するので基準となる適当な温度が存在しません。そこで通常，以下に定義される混合平均温度（bulk temperature）を基準温度として用いられます。

$$T_b(x) = \frac{\int_0^R 2\pi r u(r, x) T(r, x) dr}{\int_0^R 2\pi r u(r, x) dr} = \frac{1}{\dot{V}} \int_0^R 2\pi r u(r, x) T(r, x) dr \quad (4.20)$$

上で定義した混合平均温度は，位置 x において流れを断熱容器にとりだしそれを十分に攪拌・混合したときの流体の平均温度に当たります。(4.20) に (4.3)，(4.6) と (4.14) をいれて積分を実行すると

$$T_b = \frac{7}{48} \frac{u_m R^2}{a} \frac{\partial T}{\partial x} + T_0 \quad (4.21)$$

が得られます。さて，管内流の場合には混合平均温度 T_b を基準温度として局所熱伝達率 α_x を

$$\alpha_x = \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_b} = \frac{\lambda(\partial T/\partial r)_{r=R}}{T_w - T_b}, \quad (\partial T/\partial r > 0) \quad (4.22)$$

と決めています。 \dot{q}_w は管内壁からの熱流束です。

次に，壁面温度 T_w が一定の場合と壁面からの熱流束 \dot{q}_w が一定の場合についてみていきます。

(a) 壁面温度 T_w が一定の場合（等温壁）

円管の加熱区間全域にわたる平均熱伝達率 α_m を求めます。まず，円管内の微小体積要素 $\pi R^2 dx$ を考えます。壁面温度 T_w が一定の場合， $d(T_w - T_b) = -dT_b$ が成り立ちます。長さ dx の管壁からの熱伝達で流入する熱流量 \dot{Q}_x は円管の微小側面積 $2\pi R dx$ に熱流束 \dot{q}_w を掛けた $Q_x = \dot{q}_w 2\pi R dx$ で，この熱流量により混合平均温度 T_b の dx 間の温度上昇 dT_b が生じるので

$$\dot{q}_w \cdot 2\pi R dx = \dot{m} c_p dT_b \quad (\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho \pi R^2 u_m: \text{質量流量}) \quad (4.23)$$

が成り立ちます。(4.22) と (4.23) より \dot{q}_w を消去して整理すると

$$\frac{d(T_w - T_b)}{T_w - T_b} = \frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{2\pi R}{\dot{m} c_p} \alpha_x dx, \quad (\Delta T = T_w - T_b) \quad (4.24)$$

となり，これを加熱開始点 $x=0$ から任意の位置 x まで積分すると

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T} \frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{2\pi R}{\dot{m} c_p} \int_0^x \alpha_x dx, \quad \therefore \ln \frac{\Delta T}{\Delta T_1} = -\frac{2\pi R}{\dot{m} c_p} \int_0^x \alpha_x dx \quad (4.25)$$

ただし， $\Delta T_1 = T_w - T_{b1}$ で T_{b1} は加熱開始点における流体の温度。 $T_b(x)$ は次式で与えられます。

$$T_b(x) = T_w - (T_w - T_{b1}) \exp\left(-\frac{2\pi R}{\dot{m} c_p} \int_0^x \alpha_x dx\right) \quad (4.26)$$

なお，速度場，温度場が十分に発達した領域では α_x は x によらずに一定値を取るようになることが知られています（後述）。このような領域では T_b は指数関数的に変化し $T_b(x) \rightarrow T_w$ と壁面温度 T_w に漸近していきます（図 18：伊藤章「Excel で気軽に移動現象論」より）。

さて，加熱開始点から伝熱区間の円管長を l とし，伝熱区間の入口・出口の混合平均温度をそれぞれ T_{b1}, T_{b2} ，総伝熱量を \dot{Q} とすると

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_{b2} - T_{b1}) = \dot{m} c_p (\Delta T_1 - \Delta T_2) \quad (4.27)$$

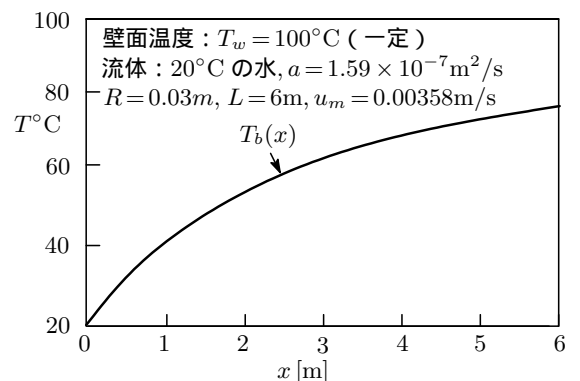


図 18: 円管内の混合平均温度分布 (T_w 一定)

(4.25) より

$$\dot{m}c_p = -2\pi Rl \left(\frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx \right) / \ln(\Delta T_2 / \Delta T_1)$$

これを (4.27) に代入して

$$\dot{Q} = A \left(\frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx \right) \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2 / \Delta T_1)}, \quad (A = 2\pi Rl : \text{内壁表面積}) \quad (4.28)$$

平均熱伝達率 α_m は定義 (1.5) より

$$\dot{Q} = \alpha_m A \Delta T_m, \quad (\Delta T_m : \text{管壁と流体との温度差}) \quad (4.29)$$

ここで

$$\alpha_m = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx, \quad \Delta T_m = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2 / \Delta T_1)} \quad \begin{cases} \Delta T_1 = T_w - T_{b1} \\ \Delta T_2 = T_w - T_{b2} \end{cases} \quad (4.30)$$

とおけば, (4.28) は (4.29) に一致することがわかります。 ΔT_m は対数平均温度差と呼ばれ, 対数平均温度差を用いて平均熱伝達率 α_m を

$$\dot{Q} = A \alpha_m \Delta T_m \quad (4.31)$$

で定義するとき, この α_m を対数平均温度差を用いて定義された平均熱伝達率と呼んでいます。

局所ヌセルト数の x 軸方向の分布近似式として

$$Nu_x(x^*) = 1.077x^{*-1/3} - 0.7 \quad (x^* < 0.001)$$

$$Nu_x(x^*) = 3.657 + 6.874 \times (1000x^*)^{-0.488} \exp(-57.2x^*) \quad (x^* > 0.001)$$

$$\text{ただし} \quad \begin{pmatrix} Nu_x = \alpha_x D / \lambda \\ x^* = (x/D) / (Re_D Pr) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

が知られています。 x^* の逆数はグレイツ数 G_z と呼ばれる無次元数で, 次式で定義されます。

$$G_z = (Re_D Pr) / (x/D) \quad (\equiv 1/x^*) \quad (4.33)$$

(4.32) より, 局所ヌセルト Nu_x は流れが下流に向かい x^* が 0.05 程度に達する範囲 (温度助走区間) までは単調減少しますが, $x^* \geq 0.05$ の領域ではほとんど一定値 $Nu_x(x^*) = 3.66$ に収斂していきます。したがって x^* が 0.05 以降の下流領域 (温度場が十分発達) では局所熱伝達率 α_x は一定値となります (図 19)。温度助走区間の長さを l_T とすると次式で見積もれます。

$$l_T/D \simeq 0.05 Re_D Pr, \quad (Re_D = u_m D / \nu \leq 2300 : \text{層流}, Pr = \nu/a) \quad (4.34)$$

平均ヌセルト数 $Nu_m = \alpha_m D / \lambda$ についてはいろいろな近似式があるようですが, (Hausen) の実験式を載せておきます。

$$Nu_m = \frac{\alpha_m D}{\lambda} = 3.66 + \frac{0.0668}{0.04x^{*1/3} + x^*} \quad (4.35)$$

伝熱区間が十分に長いと Nu_m は十分に発達した温度場の局所ヌセルト数の値 3.66 に一致します。

(b) 壁面からの熱流束 \dot{q}_w が一定の場合 (等熱流束)

壁面からの熱流束 q_w が一定の等熱流束条件下で (4.23) を積分すると

$$\dot{q}_w 2\pi R x = \dot{m}c_p (T_b(x) - T_{b1}), \quad \therefore T_b(x) = T_{b1} + \frac{\dot{q}_w 2\pi R}{\dot{m}c_p} x \quad (4.36)$$

となり, 混合平均温度 T_b は x 方向に対して直線的に上昇することがわかります (図 20)。

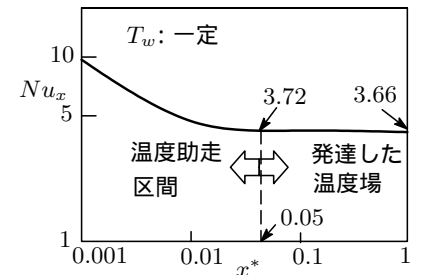


図 19: 局所ヌセルト数

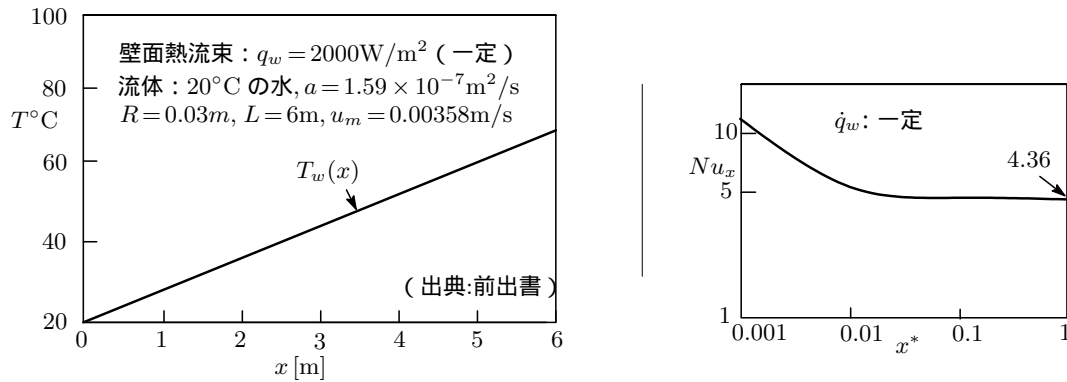


図 20: 円管内壁の温度分布 / ヌセルト数 (\dot{q}_w 一定)

伝熱区間出口における混合平均温度 T_{b2} は, $x=l$ とおけば

$$T_{b2} = T_{b1} + \frac{\dot{q}_w 2\pi R l}{\dot{m} c_p} \quad (4.37)$$

となります。これと (4.22) より, 壁面温度 T_w の x 方向の分布 $T_w(x)$ は

$$T_w(x) = T_b(x) + \frac{\dot{q}_w}{\alpha_x} \quad (4.38)$$

と求められます。速度場, 温度場が十分に発達した領域では α_x は x によらずに一定値を取るようになることから, $T_w(x)$ は $T_b(x)$ より \dot{q}_w/α_x だけ大きく, また x に対して $T_b(x)$ と同じ変化率で直線的に変化することがわかります。つまり, 壁面温度と混合温度の差を一定に保って一様に増加していきます。

(4.22) に (4.15), (4.16), (4.21) を入れて整理すると局所熱伝達率は

$$\alpha_x = \frac{24}{11} \frac{\lambda}{R} = \frac{48}{11} \frac{\lambda}{D} \quad (4.39)$$

となります。局所ヌセルト数は壁温一定の場合より値は若干大きいですが同様な傾向を示し, x^* が大きくなると Nu_x は一定値 4.36 に漸近します。

$$Nu_x = \frac{\alpha_x D}{\lambda} = \frac{48}{11} = 4.36 \quad (4.40)$$

$\dot{q}_w = \text{一定}$ のもとで速度場, 温度場が十分に発達した領域での温度分布式を求めておきます。

(4.18) のエネルギー方程式を再掲すると

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{2u_m [1 - (r/R)^2]} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (a = \lambda/\rho c_p) \quad (4.41)$$

まず, 左辺から。無次元温度 θ と無次元数 η を次式で定義すると

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_b - T_w}, \quad \eta = \frac{r}{R}$$

$$T(r, x) = T_b(x)\theta(\eta) + T_w(x)(1 - \theta(\eta)) \quad (4.42)$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_b}{dx}\theta(\eta) + \frac{dT_w}{dx}(1 - \theta(\eta))$$

十分に発達した温度場では $\dot{q}_w/\alpha_x = \text{一定}$ となるので, (4.38) より

$$\frac{dT_w}{dx} = \frac{dT_b}{dx} \quad (4.43)$$

したがって, (4.42) は (4.23) を用いて

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_b}{dx}\theta(\eta) + \frac{dT_b}{dx}(1 - \theta(\eta)) = \frac{dT_b}{dx} = \frac{2\pi R \dot{q}_w}{\dot{m} c_p} = \frac{2\dot{q}_w}{\rho c_p u_m R} \quad (4.44)$$

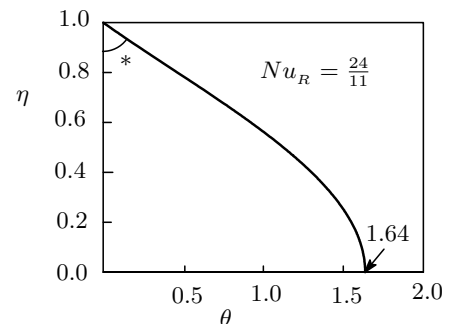


図 21: 十分発達した温度場の分布

となります。次に右辺の括弧内は

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{\eta R} \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = -\frac{1}{\eta R^2} (T_w - T_b) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{1}{\eta R^2} \frac{\dot{q}_w}{\alpha_x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{1}{\eta R^2} \frac{\dot{q}_w}{\alpha_x} \theta' \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \frac{\partial \eta}{\partial r} = -\frac{1}{R^2} \frac{\dot{q}_w}{\alpha_x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{R^2} \frac{\dot{q}_w}{\alpha_x} \theta'' \\ \therefore \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{\dot{q}_w}{R^2 \alpha_x} \left(\theta'' + \frac{1}{\eta} \theta' \right)\end{aligned}\quad (4.45)$$

(4.44) と (4.45) を (4.41) に入れて整理すると

$$\begin{aligned}\frac{2\dot{q}_w}{\rho c_p u_m R} &= -\frac{\lambda / \rho c_p}{2u_m(1-\eta^2)} \left[\frac{\dot{q}_w}{R^2 \alpha_x} \left(\theta'' + \frac{1}{\eta} \theta' \right) \right] \\ \therefore 2(1-\eta^2) &= -\frac{1}{2Nu_R} \left(\theta'' + \frac{1}{\eta} \theta' \right), \quad (Nu_R = \alpha_x R / \lambda)\end{aligned}\quad (4.46)$$

となり、この2階常微分方程式を次の境界条件のもとで解くと

$$\left. \begin{array}{l} \text{円管の中心} \dots \eta = 0 : \theta' = 0 \\ \text{円管の内壁} \dots \eta = 1 : \theta = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \theta(\eta) = \frac{Nu_R}{4} (3 - 4\eta^2 + \eta^4)\quad (4.47)$$

を得ます。

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=R} = Nu_R \eta (\eta^2 - 2) \Big|_{\eta=R} = -Nu_R\quad (4.48)$$

図 21 の*の傾きの大きさがヌセルト数に対応しています。

例.7 内径 25mm、壁温 340K の円管に温度 300K の空気が平均流速 1.0m/s で流入している。加熱区間に入るときに流速分布はすでに十分発達している。このとき、温度場の助走区間長さは加熱開始点からどの程度になるか。また、円管の入口から加熱開始点までの最小長さはどの程度必要か。\$T_f = 320\text{K}\$ における空気の物性値は \$v = 1.79 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}\$, \$Pr = 0.719\$ とする。

Ans.7 レイノルズ数は \$Re_D = u_m D / \nu = 1 \times 0.025 / (1.79 \times 10^{-5}) = 1397 < 2300\$ となるので、流れは層流。したがって、温度助走区間の長さは (4.34) より

$$l_T \simeq (0.05 Re_D Pr) D = 0.05 \times 1397 \times 0.719 \times 0.025 = 1.26 \text{ [m]}$$

速度助走区間の長さは (4.1) より

$$l_u \simeq 0.05 Re_D D = 0.05 \times 1397 \times 0.025 = 1.75 \text{ [m]}$$

となるので、加熱開始点は円管の入り口から最短でも約 1.8m 以上必要となります。

例.8 内径が \$D = 2\text{cm}\$ の円管内を \$20^\circ\text{C}\$ の空気が平均速度 \$2\text{m/s}\$ で流れている。管入り口から熱流束 \$\dot{q}_w = 500\text{W/m}^2\$ で一様に管内壁を加熱した場合、管入り口から \$50\text{cm}\$, \$1\text{m}\$ における管内断面の混合平均温度を求めよ。ただし、流れは層流で、\$20^\circ\text{C}\$ の空気の密度は \$\rho = 1.161\text{kg/m}^3\$、比熱は \$c_p = 1.0\text{kJ/kg}\cdot\text{K}\$ とする。

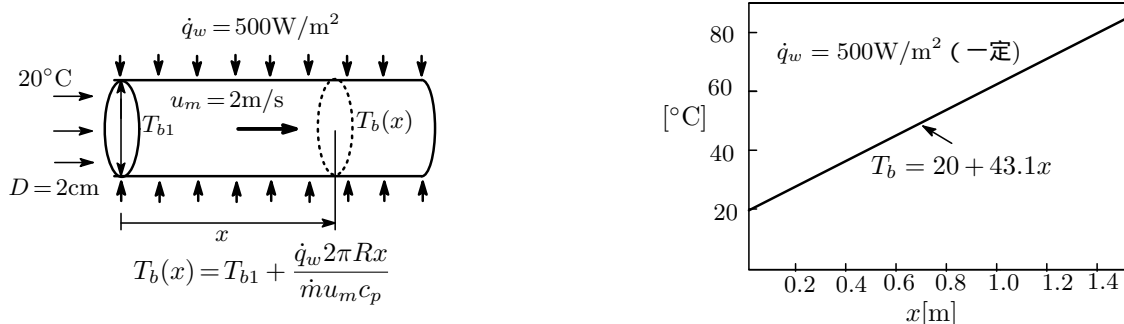


図 22: 等熱流束下での混合平均温度

Ans.8 (4.36) より

$$\begin{aligned} T_b(0.5) &= T_{b1} + \frac{\dot{q}_w 2\pi R \times 0.5}{\rho \pi r^2 u_m c_p} \\ &= 20 + \frac{500 \times 2\pi \times 0.01 \times 0.5}{1.161 \times \pi \times 0.01^2 \times 2 \times 10^3} = 41.5^\circ\text{C} \\ T_b(1.0) &= T_{b1} + \frac{\dot{q}_w 2\pi R \times 1}{\dot{m} c_p} = 63.1^\circ\text{C} \end{aligned}$$

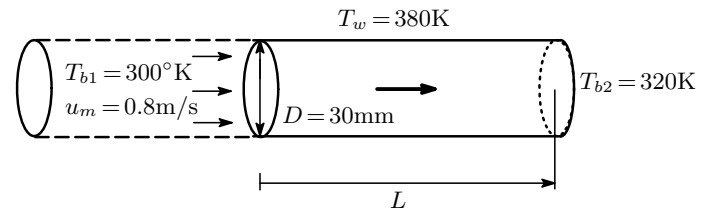
例.9 壁温が 380K に加熱されている内径 30mm の円管に、助走区間を通過して十分に発達した速度分布を持つ空気流 (平均流速 0.80m/s, 温度 300K, 大気圧) が流入している。出口で空気の混合平均温度が 320K であるとき, この加熱管の長さ L はいくらか。平均熱伝達率も求めよ。ただし物性値は $T_f = 300\text{K}$ での値 $\nu = 1.58 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$, $\lambda = 2.61 \times 10^{-2}\text{W}/\text{mK}$, $Pr = 0.717$, $\rho = 1.176\text{kg}/\text{m}^3$, $c_p = 1.01 \times 10^3\text{J}/\text{kgK}$ を用いよ。

Ans.9

レイノルズ数は

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} = \frac{0.80 \times 0.030}{1.58 \times 10^{-5}} = 1.52 \times 10^3 < 2300$$

となるので流れは層流。加熱管の入口・出口の混合平均温度はそれぞれ $T_{b1} = 300\text{K}$, $T_{b2} = 320\text{K}$ であるので, 円管からの総伝熱量 \dot{Q} は (4.27) より



$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_{b2} - T_{b1}) = \rho \pi (D^2/4) u_m c_p (320 - 300) = 13.4\text{W}$$

求める管長を L とすると, 平均熱伝達率 α_m は (4.30), (4.31) より

$$\alpha_m = \frac{\dot{Q}}{A \Delta T_m} = \frac{\dot{Q}}{A \frac{(T_w - T_{b2}) - (T_w - T_{b1})}{\ln[(T_w - T_{b1})/(T_w - T_{b2})]}} = \frac{13.4}{\pi \times 0.03 \times L \times \frac{80 - 60}{\ln[80/60]}} = \frac{2.045}{L} [\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$$

また, ハウゼンの式 (4.35) と上式より

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\lambda}{D} \left(3.66 + \frac{0.0668}{0.04 x^{*1/3} + x^*} \right), \quad x^* = \frac{L/D}{Re_D Pr} = 0.0306L \\ &= \frac{2.61 \times 10^{-2}}{0.03} \left(3.66 + \frac{0.0668}{0.04 \times (0.0306L)^{1/3} + 0.0306L} \right) \\ &= 3.184 + \frac{0.0581}{0.0125L^{1/3} + 0.0306L} \\ \therefore \frac{2.045}{L} &= 3.184 + \frac{0.0581}{0.0125L^{1/3} + 0.0306L} \end{aligned}$$

この非線形代数方程式の解は Excel のゴールシーク機能を使えば容易に求められて

$$L = 0.323\text{m}$$

と得られます。平均熱伝達率 α_m は

$$\alpha_m = \frac{2.045}{L} = \frac{2.045}{0.323} = 6.33 [\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$$

- 2023.02.25 § 4. 水平円管内の層流熱伝達追記
- 2023.02.11 別解：積分法（プロファイル法）による近似解追記。

参考文献

- [1] 一色尚次「伝熱工学」森北出版コロナ社，1978
- [2] 望月貞成，村田章「伝熱工学の基礎」日進出版森北出版，2015
- [3] 丸茂栄佑，矢尾匡永，牧野州秀「伝熱工学」コロナ社，2016
- [4] 菊池義弘，松村幸彦「伝熱学 基礎と要点」共立出版，2009