

熱の移動現象（伝熱）

K&N ZOU

2022.12.15

§ 1.

熱の3つの移動形態

水の入った薬缶やかんを焔炉コンロで暖めると湯になりますが、これは焔炉から水へ熱が移った結果、水の温度が上昇したわけですね。この移った熱の大きさを熱量（amount of heat）といい、カロリー（cal）という単位で表されます。1 cal は水 1 g の温度を 14.5°C から 15.5° まで上げるのに必要な熱量のことです。物体や物質内を単位面積・単位時間あたりに通過する熱量のことを熱流束（heat flux）といい、 W/m^2 という単位で表されます。面積が $A[m^2]$ のある面内を流れる単位時間あたりの熱流量を $\dot{Q} [W]$ 、熱流束を $\dot{q} [W/m^2]$ とすると

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \quad (1.1)$$

で定義されます¹。なお、W はワットと呼ばれる単位²で、W と cal は次式の関係で結ばれます。

$$[W] = [J]/[s] = \frac{1}{4.184 \times [s]} \text{cal}, \quad 1 \text{cal} = 4.184 \times s [W] \quad (J: \text{ジュール}) \quad (1.2)$$

さて、薬缶の水がお湯になる例を上げましたが、熱の移動には熱伝導(thermal conduction)」、熱伝達(heat transfer)、熱輻射(thermal radiation)』と3つの形態に大きく分類できます。実際の伝熱形態は、これら3つのうちのいずれかに属するか、あるいはそれらの組み合わせたものとなります。

- ・熱伝導： 個体、気体、液体の中の温度差によって高温側から低温側へ熱が流れる伝熱形態。
- ・熱伝達： 加熱された固体から流れている流体で熱が伝わる、あるいは逆に、流れている流体から固定壁へ熱が伝わる伝熱形態。熱伝導では物質そのものは移動せずに熱が伝わりましたが、物質が流体の場合には流れによっても熱が伝えられます。このような熱の伝わり方を対流熱伝達（convective heat transfer）と呼んでいます。
- ・熱輻射： 熱が電磁波によって伝わる伝熱形態。高温の物体からは熱運動によって原子・分子から電磁波が放射されます。この放射された電磁波を受けた側の原子・分子は激しく振動して熱運動に変換されます。

以下にこの3つの移動形態について順次みていきます。

¹頭のドットは単位時間あたりの量であることを明示するために付けています。

² $[J]=[W] \times [s]$, $[\text{cal}]=4.184[J]$

2 - 1 . フーリエの法則

「単位時間，単位面積あたりに移動する熱流束は温度勾配に比例する」という法則をフーリエの法則といい， x 軸方向の熱流束を \dot{q} [W/m²]，熱流量を \dot{Q} [W] とすると次式で表されます。

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad \dot{Q} = \dot{q}A = -\lambda \frac{dT}{dx}A \quad (dT/dx < 0) \quad (2.1)$$

なお，熱は常に高温から低温へ流れその温度勾配 dT/dx は負となるので，熱流束 \dot{q} を正にするために負号を付けています。比例定数 λ は熱伝導率 (thermal conductivity) と呼ばれ，熱の伝わりやすさを表す物質固有の値で単位は [W/mK] です。 λ は一般に温度の関数 $\lambda(T)$ となりますが，特に断らない限り定数としておきます。

2 - 2 . 熱の収支と熱伝導方程式

内部発熱のない場合 熱伝導率 λ が一定の物体内の微小体積 (図 1) を考えます。いま，簡単のために 1 次元の場合を考えます (3 次元への拡張はこのあとすぐ)。内部発熱はなく， x 軸方向に温度勾配があり， x の位置での熱流束を $\dot{q}(x)$ ， $x + dx$ の位置での熱流束を $\dot{q}(x + dx)$ とします。単位時間あたりに微小体積 $dx dy dz$ 内に蓄積される熱量を $\Delta \dot{Q}_x dy dz$ とすると，これは流入・流出熱量の差し引き量であるので

$$\Delta \dot{Q}_x dy dz = [\dot{q}(x) - \dot{q}(x + dx)] dy dz \quad (2.2)$$

右辺の第 2 項をテイラー展開し，1 次の項までとると

$$\dot{q}(x + dx) \simeq \dot{q}(x) + \frac{d\dot{q}(x)}{dx} dx \quad (2.3)$$

となるので，フーリエの法則 (2.1) を用いれば (2.2) は

$$\begin{aligned} \Delta \dot{Q}_x dy dz &= -\frac{d\dot{q}(x)}{dx} dx dy dz = -\frac{d}{dx} \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \right) dx dy dz \\ &= \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} dx dy dz, \quad \Delta \dot{Q}_x = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

となります。3 次元への拡張は，上の議論を y 軸方向， z 軸方向に適用すれば

$$\Delta \dot{Q}_y = \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} dy, \quad \Delta \dot{Q}_z = \lambda \frac{d^2 T}{dz^2} dz \quad (2.5)$$

となるので，物体の微小体積内に蓄えられる単位時間あたりの熱流量 $\Delta \dot{Q}$ は

$$\Delta \dot{Q} = \Delta \dot{Q}_x dy dz + \Delta \dot{Q}_y dx dz + \Delta \dot{Q}_z dx dy = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz \quad (2.6)$$

となります。物体の微小体積の温度は蓄熱量 $\Delta \dot{Q} dt = \Delta Q$ により上昇し， dt 時間での温度上昇を dT とすると³

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz dt = \rho dx dy dz c_p dT \quad (c_p: \text{比熱}, \rho: \text{密度}) \quad (2.7)$$

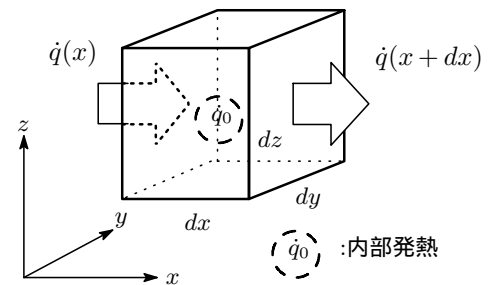


図 1: 熱の収支

³質量 m の物体の温度を ΔT だけ上げるに必要な熱量は $\Delta Q[\text{J}] = m[\text{kg}] \times c_p \times \Delta T[\text{K}]$ (c_p : 定圧比熱)

が成立します。両辺を $dxdydzdt$ で割って整理すると

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.8)$$

が得られます。これが熱伝導の基礎方程式で、放物型偏微分方程式と呼ばれます。温度 T は時間 t と位置座標 x, y, z の関数となるので $dT/dt \rightarrow \partial T/\partial t$ と偏微分に書き換えています。 $\kappa = \lambda/\rho c_p$ [m^2/s] は熱拡散率 (thermal diffusivity) と呼ばれ、熱の伝わりやすさを表す物質固有の定数です。

内部発熱がある場合 導体に電流を流した場合、導体はジュール発熱しますが、このように物体内に発熱がある場合の基礎方程式を考えます。位置 (x, y, z) における単位時間、単位体積あたりの発熱量を \dot{q}_0 とすると、時間 dt の間に微小体積 $dxdydz$ 内に発生する熱量は $\dot{q}_0 dxdydzdt$ となるので、(2.8) の熱伝導方程式は内部発熱量を加えた

$$\left[\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_0 \right] dxdydzdt = \rho c_p dxdydz dT \quad (2.9)$$

となります。これを整理して、内部発熱がある場合の基礎方程式として次式を得ます。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}_0}{\rho c_p} \quad (2.10)$$

座標変換 (舞台を整える)

熱伝導の問題ではしばしば円筒状や球状の物体からの加熱・冷却問題が取り扱われますが、それに即して基礎方程式 (2.8) を円筒座標系あるいは球面座標系に座標変換した熱伝導方程式が用いられます。

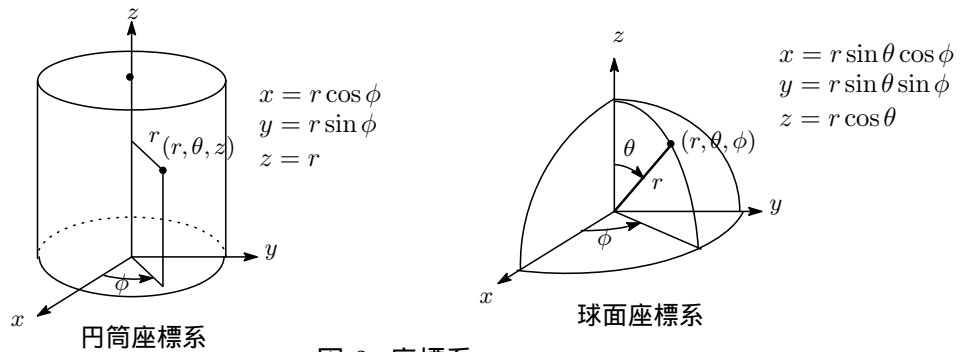


図 2: 座標系

ラプラス演算子 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ の各座標系への変換結果は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow \begin{cases} \text{円筒座標系} : \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{球面座標系} : \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{cases} \quad (2.11)$$

となるので、各座標系で表した熱伝導の基礎方程式は次のように表されます。

・円筒座標系

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

・球面座標系

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) \quad (2.13)$$

2 - 3 . 1 次元定常熱伝導

(1) 平板における定常熱伝導

単層の平板 温度 T_1 に温められた平板があり, ある時刻に平板の右面 (II 面) を温度 $T_2 (< T_1)$ に急に下げ, それ以後, 左面の面 I は温度 T_1 を, II 面は T_2 が保たれているとします。熱は高温の面 I から低温の面 II に向けて流れ, 平板内の各位置での温度は時間の経過とともに図 3 の破線に示すように低下していきます。十分に長い時間が経過すると平板内の各位置における温度はもはや時間変化しない状態となりますが, このような状態を定常状態 ($dT/dx = 0$) といいます。定常状態での平板内部の温度分布を調べると。。。板材の熱伝導率を λ とするとフーリエの法則より

$$dT = -\frac{\dot{q}}{\lambda} dx \longrightarrow T = -\frac{\dot{q}}{\lambda} x + C$$

板の両面での境界条件を $x = 0$ で $T = T_1$, $x = L$ で $T = T_2$ と設定すると

$$T_1 = C, \quad T_2 = -\frac{\dot{q}}{\lambda} L + C$$

これから積分定数を消去すれば

$$T_2 - T_1 = -\frac{\dot{q}}{\lambda} L \quad (2.15)$$

となります。したがって, 平板内の熱流束 \dot{q} は

$$\dot{q} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \text{ [W/m}^2\text{]} \quad (2.16)$$

と求められます。平板の断面積を $A \text{ [m}^2\text{]}$ とすると, 平板面からの熱流量 \dot{Q} は

$$\dot{Q} = \dot{q} A = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{L} \text{ [W]} \quad (2.17)$$

となります。これから平板内の温度分布式として次式を得ます。

$$T = -\frac{T_1 - T_2}{L} x + T_1 \quad (2.18)$$

定常状態では直線的に温度変化していることがわかります。

なお, 1次元の基礎方程式からの導出すれば, 定常状態では $dT/dt = 0$ なので

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} = 0, \quad \therefore \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \longrightarrow T = C_1 x + C_2 \quad (2.19)$$

積分定数 C_1, C_2 は境界条件より $C_2 = T_1, C_1 = (T_2 - T_1)/L$ と求まるので, 平板内の温度分布は

$$T = -\frac{T_1 - T_2}{L} x + T_1 \quad (2.20)$$

と (2.18) と同じ結果が得られます。

例.1 厚さ 1cm のステンレス鋼板の両側を 20°C と 30°C の保ったとき, 得られる熱流束はいくらか。ステンレス鋼板 (18-8 ステンレス) の熱伝導率は $\lambda = 16.5 \text{ W/mK}$ とする。

Ans. (0.2) より

$$\dot{q} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} = 16.5 \times \frac{30 - 20}{0.01} = 1.65 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$

例.2 面積 0.10 m^2 , 厚み 24mm, 熱伝導率 43 W/mK の鋼板の面 1 から $\dot{Q} = 5.6 \text{ kW}$ の熱量が流入していて, 対向面 2 は 100°C に保たれているとする。このとき, 面 1 の温度を求めよ。

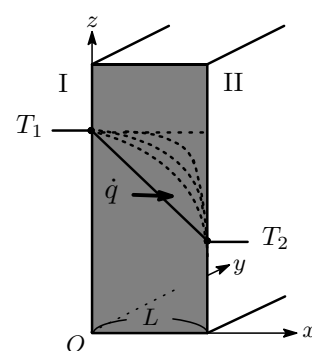


図 3: 定常熱伝導 (2.14)

Ans. (2.17) より

$$\dot{Q} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{L} \rightarrow 5600 = 43 \times 0.1 \times \frac{T_1 - 100}{0.24 \times 10^{-3}}, \quad \therefore T_1 = 131.2^\circ\text{C}$$

多層からなる平板 平板が多層に重ね合わされた多層平板の定常熱伝導を考えます。図 4 に示すように厚さ L_1, L_2, L_3 の 3 枚の平板からなり、各平板の熱伝導率を λ_i ($i = 1, 2, 3$) とします。平板内には熱源がなく、各板境界面での温度が T_1, T_2, T_3, T_4 に保たれた定常状態にあるとします。このような場合、各平板内の熱流束の増減はなく \dot{q} は一定となるので、(2.15) を各平板に適用すれば

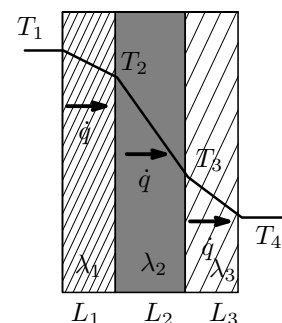


図 4: 多層平板

$$\left. \begin{array}{l} \text{第 1 層 } T_2 - T_1 = -\frac{\dot{q}}{\lambda_1} L_1 \\ \text{第 2 層 } T_3 - T_2 = -\frac{\dot{q}}{\lambda_2} L_2 \\ \text{第 3 層 } T_4 - T_3 = -\frac{\dot{q}}{\lambda_3} L_3 \end{array} \right\} \rightarrow T_1 - T_4 = \dot{q} \left(\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} \right) \quad (2.21)$$

となり、熱流束 \dot{q} と熱流量 \dot{Q} は

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3}} \quad [\text{W/m}^2], \quad \dot{Q} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{L_1}{\lambda_1 A} + \frac{L_2}{\lambda_2 A} + \frac{L_3}{\lambda_3 A}} \quad [\text{W}] \quad (2.22)$$

と求められます。 n 層の多層平板への拡張は自動的に行うことができ

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i}}, \quad \dot{Q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i A}} \quad (2.23)$$

となりますね。これらの式を眺めるとうまい具合に中間層の境界温度は含まれていないので、 \dot{q}, \dot{Q} は最外面の表面温度 T_1, T_{n+1} を測定するだけで求めることができます。

例.3 3 層の煉瓦からなる炉壁があり、定常状態で炉壁の内外の表面温度がそれぞれ $850^\circ\text{C}, 150^\circ\text{C}$ であった。煉瓦の厚みと熱伝導率は内側からそれぞれ $L_1 = 0.25\text{m}, \lambda_1 = 1.5\text{W/mK}, L_2 = 0.1\text{m}, \lambda_2 = 0.15\text{W/mK}, L_3 = 0.2\text{m}, \lambda_3 = 1.0\text{W/mK}$ とする。熱流束 \dot{q} と中間層の耐熱煉瓦両面の温度 T_2, T_3 を求めよ。

Ans. (2.22) より

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_4}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2 + L_3/\lambda_3} \rightarrow \frac{850 - 150}{(0.25/1.5) + (0.1/0.15) + (0.2/1.0)} = 677\text{W/m}^2$$

(2.21) より

$$T_2 - T_1 = -(\dot{q}/\lambda_1)L_1 \rightarrow T_2 - 850 = -(677/1.5) \times 0.25, \quad \therefore T_2 = 737^\circ\text{C}$$

$$T_4 - T_3 = -(\dot{q}/\lambda_3)L_3 \rightarrow 150 - T_3 = -(677/1.0) \times 0.2, \quad \therefore T_3 = 285^\circ\text{C}$$

(2) 円筒内の定常熱伝導

単層の円筒 内径 r_1 、外径 r_2 、長さが L の単層円筒壁内の 1 次元定常熱伝導を考えます。熱の流れは径の方向に限られます。円筒内部の半径 r のところに厚さが dr の薄い円筒を考え (図中斜線部)、壁面積を A 、単位時間に通過する熱流量を \dot{Q} とすると、フーリエの法則より

$$\dot{Q} = -\lambda \frac{dT}{dr} A, \quad A = 2\pi r L \quad (2.24)$$

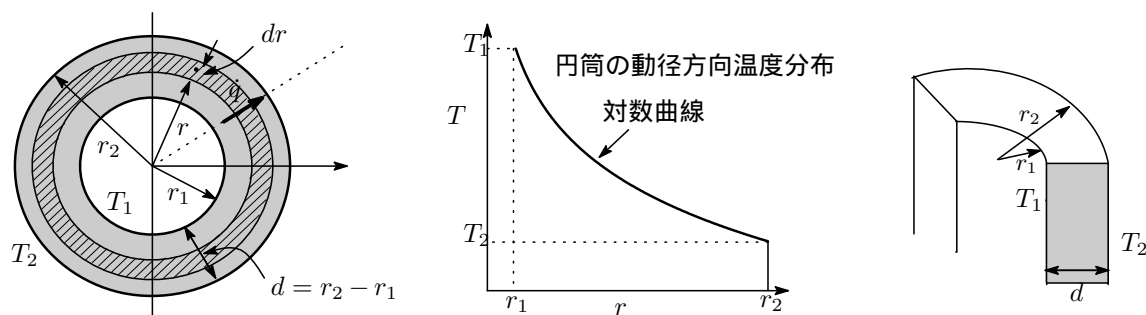


図 5: 円筒内の温度分布

定常熱伝導なので \dot{Q} は r に無関係で任意の通過面で一定。したがって, (2.24) より

$$dT = -\frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \frac{dr}{r} \rightarrow T = -\frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln r + C \quad (2.25)$$

境界条件を $r = r_1$ で $T = T_1$, $r = r_2$ で $T = T_2$ とすると

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln r_1 + C \\ T_2 &= -\frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln r_2 + C \end{aligned} \right\} \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (2.26)$$

これから円筒壁を通過する熱流量 \dot{Q} と熱流束 q は

$$\dot{Q} = 2\pi\lambda L \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \text{ [W]}, \quad q = \frac{\dot{Q}}{2\pi r L} = \left(\frac{\lambda}{r}\right) \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \text{ [W/m}^2\text{]} \quad (2.27)$$

となります。式より, 熱流量 \dot{Q} は一定ですが, 熱流束 q は半径 r に反比例するので外周面では最小の熱流束となります。円筒壁内部の温度分布は (2.25) と (2.26) の第 1 式より

$$T = T_1 - \frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln(r/r_1) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r/r_1) \quad \therefore \frac{T - T_1}{T_1 - T_2} = -\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \quad (2.28)$$

平板での温度分布は直線となりましたが, 円筒の場合は内壁と外壁の表面積が異なるために対数曲線となります (図 5)。

この場合も基礎方程式からの導出しておきます。(2.12) の円筒座標で表した 1 次元熱伝導の基礎方程式を用いれば

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (2.29)$$

この微分方程式の一般解は

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \rightarrow \frac{dT}{dr} = C_1 \frac{1}{r}, \quad \therefore T = C_1 \ln r + C_2 \quad (2.30)$$

積分定数を先程の境界条件より決めると

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= C_1 \ln r_1 + C_2 \\ T_2 &= C_1 \ln r_2 + C_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)}, \quad C_2 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \ln r_1 \quad (2.31)$$

となります。これを (2.30) に入れて整理すると円筒壁内部の温度分布を与える式を得ます。

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{r}{r_1} \quad (2.32)$$

例.4 内半径 1cm, 厚さ 1cm のステンレス鋼製円筒の内側を 20°C , 外側を 30°C に保ったとき, 外面での熱流束を求めよ。

Ans. (2.27) より

$$\dot{q} = \left(\frac{\lambda}{r}\right) \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \rightarrow \frac{16.5}{0.01 + 0.01} \times \frac{20 - 30}{\ln[(0.01 + 0.01)/0.01]} = -11.9 \text{KW/m}^2 \quad (2.33)$$

符号はマイナスなので円管の外側から内側に熱が流れる。

円管を開けば平板状になりますが，円管も平板と同様な式で表すことができれば便利です。そこで，平板の面積に相当するものとして対数平均伝熱面積と呼ばれる量を導入します。一般に a, b の対数平均は，

$$\frac{a - b}{\ln a - \ln b} \quad (2.34)$$

で定義されます。そこで，長さ L ，内径・外径半径 r_1, r_2 の内壁面，外壁面の面積 $A_1 (= 2\pi r_1 L)$ ， $A_2 (= 2\pi r_2 L)$ とする円管の対数平均伝熱面積 A_{lm} を次式で定義します。

$$A_{lm} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} \quad (\text{肉厚} : d = r_2 - r_1) \quad (2.35)$$

これを用いれば (2.27) は

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 2\pi\lambda L \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} = \lambda \frac{2\pi L(r_2 - r_1)}{\ln(2\pi L r_2 / 2\pi L r_1)} \left(\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} \right) = \lambda \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} \left(\frac{T_1 - T_2}{d} \right) \\ &= \lambda A_{lm} \frac{T_1 - T_2}{d} \end{aligned} \quad (2.36)$$

となり，これは平板熱伝導の式 (2.17) の面積 A を対数平均伝熱面積 A_{lm} で置換した形となっています。

$$\text{円管} : \dot{Q} = \lambda A_{lm} \frac{T_1 - T_2}{d} \iff \text{平板} : \dot{Q} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (2.37)$$

多層の円管 (2.37) を用いれば多層円管内の熱伝導も多層平板の議論がそのまま使えるので，例えば 3 層からなる円管の熱伝導の式は (2.23) より

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{d_1}{\lambda_1 A_{lm,1}} + \frac{d_2}{\lambda_2 A_{lm,2}} + \frac{d_3}{\lambda_3 A_{lm,3}} \right)} \quad (2.38)$$

n 層からなる円管の 1 次元定常熱伝導は d_i を i 番目の円管の肉厚として

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i A_{lm,i}}} \quad (2.39)$$

と表せます。 $d_i, A_{lm,i}$ は内側から i 層目の円管の肉厚と対数平均伝熱面積。

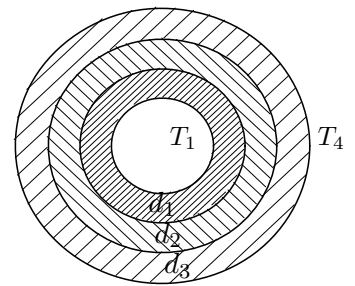


図 6: 多層円管

(3) 球殻の定常熱伝導

内径 r_1 ，外径 r_2 の球殻の 1 次元定常熱伝導を考えます。フーリエの法則より

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -\lambda A \frac{dT}{dr} \rightarrow dT = -\frac{\dot{Q}}{\lambda A} dr = -\frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda r^2} dr \quad (A = 4\pi r^2) \\ \therefore T &= \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda r} + C \end{aligned} \quad (2.40)$$

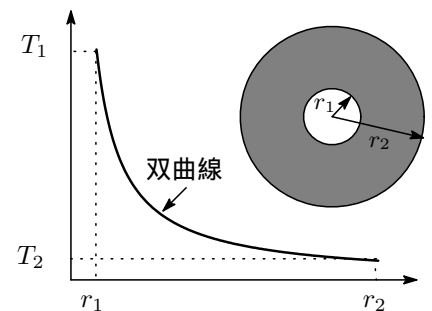


図 7: 球殻の温度分布

境界条件を $r = r_1$ で $T = T_1$, $r = r_2$ で $T = T_2$ とすると

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda r_1} + C, & T_2 &= \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda r_2} + C \\ \therefore \dot{Q} &= 4\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2}, & T &= T_1 + \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

を得ます。温度分布曲線は双曲線となります (図 7)。

基礎方程式から導出しておきます。 θ あるいは ϕ 方向の温度勾配はないので

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

が成立し, (2.13) の基礎方程式と一般解は

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) = 0, \quad \therefore T = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (2.42)$$

境界条件を $r = r_1$ で $T = T_1$, $r = r_2$ で $T = T_2$ とすると球殻内の温度分布は

$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (2.43)$$

で与えられ双曲線となります。動径方向に流れる熱流量 \dot{Q} はフーリエの法則より

$$\dot{Q} = 4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} = 4\pi r \lambda \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2}, \quad \dot{q} = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} = \left(\frac{\lambda}{r} \right) \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \quad (2.44)$$

球殻の外周面では最小の熱流束となります。

例.5 内半径 10mm, 外半径 30mm の中空球の内面温度を 100°C , 外面温度を 0°C に保つとき, 半径 20mm の位置の温度はどれだけか。

Ans. (2.43) より

$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \longrightarrow T = 100 + \frac{100 - 0}{1/0.01 - 1/0.03} \left(\frac{1}{0.02} - \frac{1}{0.01} \right) = 25^\circ\text{C} \quad (2.45)$$

(4) 断面が直線的に変化する物体の定常熱伝導

断面が直線的に変化する平板の 1 次元熱伝導を調べます。

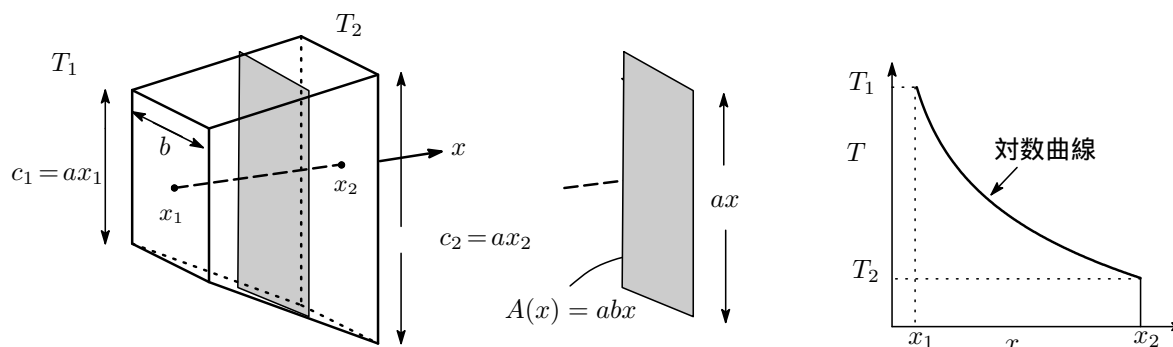


図 8: 断面が直線的に変化

図 8 に示すように, 幅 b , 高さ ax の面積を $A(x)$ とすると

$$A(x) = abx$$

フーリエの法則より

$$\dot{Q} = -\lambda A(x) \frac{dT}{dx} \longrightarrow dT = -\frac{\dot{Q}}{\lambda A(x)} dx = -\frac{\dot{Q}}{ab\lambda x} dx \quad (2.46)$$

境界条件を $x = x_1$ で T_1 , $x = x_2$ で T_2 とすると

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\dot{Q}}{ab\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x}, \quad \therefore T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q}}{ab\lambda} \ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{\dot{Q}}{ab\lambda} \ln \frac{c_2}{c_1}$$

これから

$$\dot{Q} = ab\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(c_2/c_1)}, \quad \dot{q}(x) = \left(\frac{\lambda}{x}\right) \frac{T_1 - T_2}{\ln(c_2/c_1)} \quad (2.47)$$

また, 温度分布式は

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(x_1/x_2)} \ln \frac{x}{x_1} \quad (2.48)$$

で与えられ, 温度分布は対数曲線となります (図 8)。

2 - 4 . 内部発熱のある 1 次元定常熱伝導

(1) 内部発熱している平板

平板内の至るところで一様に単位時間・単位体積あたり $\dot{q} (> 0)$ の定常発熱がある厚さ L の平板を考えます。モデルを単純化して, 図 9 に示すように面積が A の 1, 2 面の温度がそれぞれ T_1, T_2 に保たれ, それ以外の 4 面は完全に断熱されているとします。熱の流れは x 軸方向のみに生じ, 定常状態にあると

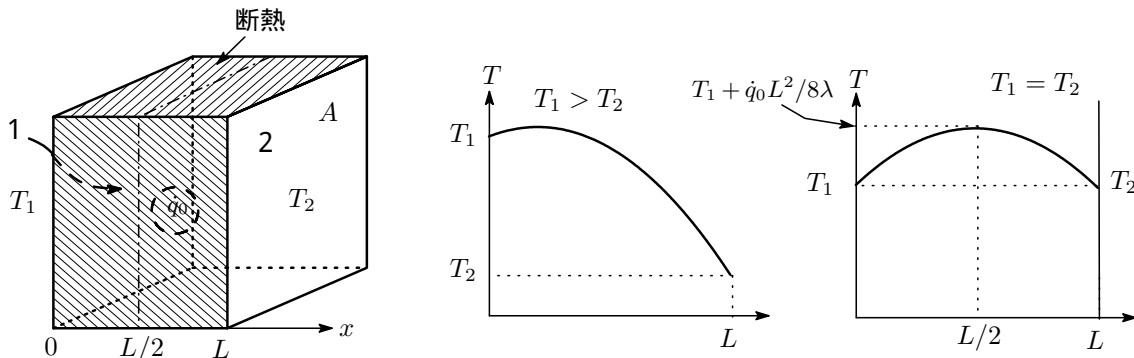


図 9: 内部発熱のある平板

すると 1 次元の定常熱伝導現象として記述できるので, (2.10) より

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} = 0 \longrightarrow T = -\frac{\dot{q}_0}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (2.49)$$

を得ます。境界条件を $x = 0$ で $T = T_1$, $x = L$ で $T = T_2$ とすると積分定数は

$$C_1 = (T_2 - T_1 + \dot{q}_0^2 L^2 / \lambda) / L, \quad C_2 = T_1$$

これから次の温度分布式を得ます。温度分布カーブは x の 2 次曲線となります (図 9)。

$$T = \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} (L - x)x + \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \quad (2.50)$$

特に $T_1 = T_2$ の場合は, 当たり前ですが $x = L/2$ を対称軸とする 2 次曲線となり, $x = L/2$ の位置で最高温度

$$T_{max} = T_1 + \dot{q}_0 L^2 / 8\lambda \quad (2.51)$$

となります。両面 1, 2 からの放熱量 \dot{Q}_1, \dot{Q}_2 を求めると、温度勾配は (2.50) より

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\dot{q}_0}{2\lambda}(L-2x) - \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (2.52)$$

したがってフーリエの法則より

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \lambda A \left(-\frac{\dot{q}_0 L}{2\lambda} - \frac{T_2 - T_1}{L} \right) \\ \dot{Q}_2 &= -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = \lambda A \left(\frac{\dot{q}_0 L}{2\lambda} - \frac{T_2 - T_1}{L} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

特に $T_1 = T_2$ の場合は \dot{Q}_1 と \dot{Q}_2 の符号が互いに反対となりますが、これは熱流 \dot{Q}_1 と \dot{Q}_2 の向きが互いに反対方向であることを意味します。両式を足せば、両面からの放熱量の総和は板内部での発熱量の総和に等しいことがわかります。

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = AL\dot{q}_0 \quad (2.54)$$

例.6 厚さ 1cm のステンレス鋼板の両側を 20°C の保ち、電流を流して $50\text{KW}/\text{m}^2$ の発熱を行ったばあい、板内の最高温度は何度になるか。

Ans. (2.51) より

$$T_{max} = T_1 + \frac{\dot{q}_0 L^2}{8\lambda} \longrightarrow T_{max} = 20 + \frac{50 \times 10^3 \times 0.01^2}{8 \times 16.5} = 20.0^\circ\text{C} \quad (2.55)$$

(2) 内部発熱のある円柱

半径 R 、長さ L の円柱があり、その内部は均一な単位体積あたり \dot{q}_0 の発熱をしていて、側壁面を内部より低い一定温度 T_1 に保ち、長時間放置して定常状態に達しているとします。この場合の基礎方程式は内部発熱のある平板のところで行ったと同様にして

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}_0}{\lambda} \quad (2.56)$$

となり、この微分方程式の一般解は

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_0}{2\lambda} r + \frac{C_1}{r} \longrightarrow T = -\frac{\dot{q}_0}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (2.57)$$

となります。いま、 $r = 0$ を代入すると左辺の T は ∞ となりますが、この不具合が生じないためには $C_1 = 0$ でなければなりません。

したがって求める解は

$$T = -\frac{\dot{q}_0}{4\lambda} r^2 + C_2 \quad (2.58)$$

となります。円柱の外半径を R とし、境界条件 $r = R: T = T_1$ として積分定数 C_2 を求め、整理すると

$$T = T_1 + \frac{\dot{q}_0}{4\lambda} (R^2 - r^2) = T_1 + \frac{\dot{q}_0 R^2}{4\lambda} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.59)$$

となり、円柱の長さ方向の断面内の温度分布は中心 $r = 0$ に頂点を持つ放物線となります (図 13)。円柱の中心温度は最高温度となり、(2.59) で $r = 0$ とおいて

$$T_{max} = T_1 + \frac{\dot{q}_0 R^2}{4\lambda} \quad (2.60)$$

また、外面の熱流束 \dot{q}_1 は

$$\dot{q}_1 = -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R} = \frac{\dot{q}_0 R}{2} \quad (2.61)$$

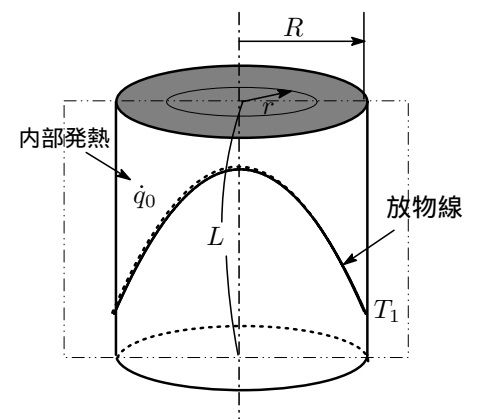


図 10: 内部発熱円柱の温度分布

となり，放熱量は $\dot{Q}_1 = 2\pi RL\dot{q}_0 = \pi R^2 L\dot{q}_0$ 。これはちょうど内部での発熱量の総和に等しいですね。

例.7 直径 200mm の熱伝導率 $\lambda = 20\text{W/mK}$ の丸棒の内部が単位体積あたりの発熱量 $\dot{q}_0 = 2 \times 10^5\text{W/m}^2$ で一様に発熱している。このとき，中心軸と表面の温度差を求めよ。

Ans. (2.60) より

$$T_{max} - T_1 = \frac{\dot{q}_0 R^2}{4\lambda} = \frac{2 \times 10^5 \times (0.1)^2}{4 \times 20} = 25^\circ\text{C}$$

例.8 内半径 r_1 ，外半径 r_2 ，熱伝導率 λ の円管が単位体積あたり \dot{q}_0 で一様に発熱している。円管の内周面は断熱されていて，外周面の温度は 0°C に保たれているとする。この場合の温度分布式を求めよ。

Ans. (2.57) からスタートします。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}_0}{\lambda} \longrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_0}{2\lambda} r + \frac{C_1}{r} \longrightarrow T = -\frac{\dot{q}_0}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (2.62)$$

$r = r_1$ の円筒内壁面は断熱されているので境界条件 $r = r_1: dT/dr = 0$ より積分定数 C_1 は

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} r_1^2$$

と求められ，次に境界条件 $r = r_2$ で $T = 0^\circ\text{C}$ とおけば積分定数 C_2 は

$$C_2 = \frac{\dot{q}_0}{4\lambda} r_2^2 - \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} r_1 \ln r_2$$

と決まり，求める温度分布式は

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\dot{q}_0}{4\lambda} r^2 + \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} r_1^2 \ln r + \frac{\dot{q}_0}{4\lambda} r_2^2 - \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} r_1^2 \ln r_2 \\ &= -\frac{\dot{q}_0}{4\lambda} (r^2 - r_2^2) + \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} r_1^2 \ln \frac{r}{r_2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

となります。また，円管内の最高温度は

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= \frac{\dot{q}_0}{2\lambda r} (r_1^2 - r^2) \longrightarrow r = r_1: T = T_{max} \\ \therefore T_{max} &= \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} r_1^2 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) + \frac{\dot{q}_0}{4\lambda} (r_2^2 - r_1^2) \text{ [K]} \end{aligned} \quad (2.64)$$

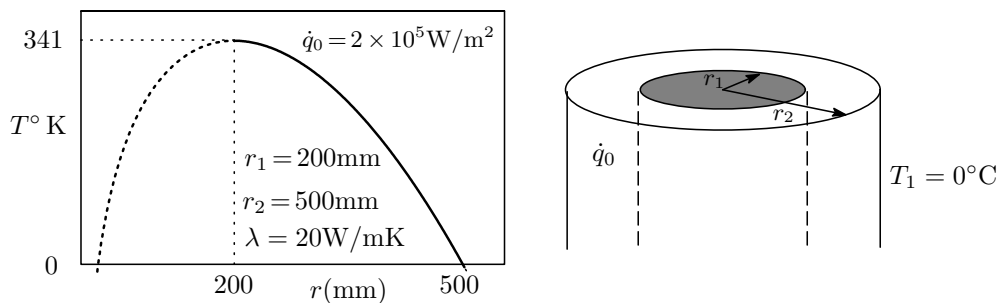


図 11: 発熱円筒の温度分布

3 - 1 . ニュートンの冷却法則

熱伝達は熱伝導と異なり、別々な2つの物質の間で熱が伝わっていく現象のこと⁴、熱の移動は「対流」と呼ばれます。いま、物体表面が流れている流体（例えば空気）に接していて、物体と流体間に熱のやりとりがあるとすると、物体の表面温度 T_w と流体温度 T_∞ との差が熱伝達での熱移動の発生力となります。物体の表面積 $A[\text{m}^2]$ から単位時間に流出あるいは流入する単位時間あたりの熱量を \dot{Q} 、熱流束を \dot{q} とすれば

$$\dot{Q} = \alpha(T_w - T_\infty)A \text{ [W]}, \quad \dot{q} = \alpha(T_w - T_\infty) \text{ [W/m}^2\text{]} \quad (3.1)$$

と表され、これをニュートンの冷却法則と呼んでいます。 α は熱伝達率(heat transfer coefficient) と呼ばれ単位は $[\text{W/m}^2\text{K}]$ です。熱伝達率 α は熱伝導率 λ のような物性値ではなく、物体の表面形状をはじめ、流体の種類や流速、層流か乱流か、などさまざまな要因の影響で変化します⁵。身近な例として扇風機に当たれば体はひんやり感じますね。

(1) 片側の壁面が外気流により冷却されている場合

大きな容器内に一定温度の液体が入っていて容器内温度は一定に保たれており、容器の外側は外気流により冷却されている場合を考えます。容器の壁の熱伝導率を λ 、厚みを L とし、熱の流れは定常状態になっていて、 $T_1 > T_2 > T_\infty$ とします。容器壁内での熱流束はフーリエの法則より

$$\dot{q} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (3.2)$$

となります。外気流は外壁からの熱流束を奪い去り、熱伝達率を α 、外気温度を T_∞ とするとニュートンの冷却法則より

$$\dot{q} = \alpha(T_2 - T_\infty) \quad (3.3)$$

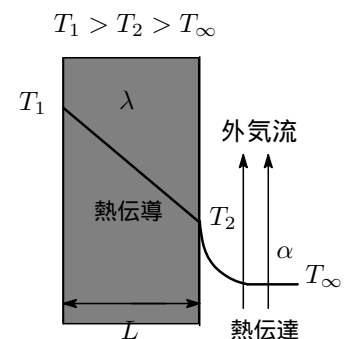
が成立します。したがって、定常状態での外壁温度 T_2 は (3.2) と (3.3) より

$$T_2 = \frac{T_1 + \frac{\alpha L}{\lambda} T_\infty}{1 + \frac{\alpha L}{\lambda}} \longleftrightarrow \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_\infty} \quad \left(T_2 = T_\infty + \frac{\dot{q}}{\alpha}, T_1 - T_2 = \frac{L}{\lambda} \dot{q} \right) \quad (3.4)$$

と求められます。 $\alpha L/\lambda$ はピオ数 B_i (Biot number) と呼ばれる無次元数で

$$B_i = \alpha L/\lambda = \frac{(\text{物体周りの熱伝達量})\alpha}{(\text{物体内部の熱伝導量})\lambda/L} = \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_\infty} \quad (3.5)$$

で定義され、流体での熱移動と物体内の熱移動との相対的な比で、同じ熱流量を生じしめるのに必要な物体内(熱伝導)の温度差と流体側(熱伝達)温度差との比です。ピオ数が小さいと(λ が大きい)物体内部での熱移動が容易となります。例えば、板厚 3cm の平板の片面を $T_1 = 50^\circ\text{C}$ に保ち、他面は外気温 $T_\infty = 8^\circ\text{C}$ 、熱伝達率 $\alpha = 10\text{W/m}^2$ の外気流にさらしたとします。板を $\lambda = 80.3\text{W/m}^2$ の鉄板とした



⁴熱伝導はある物質の中を熱が伝わっていく現象であった。

⁵静止している空気では $\alpha \approx 5\text{W/m}^2\text{K}$ 、流れている空気では $\alpha \approx 10 \sim 290\text{W/m}^2\text{K}$ 。流水では $\alpha \approx 290 \sim 5800\text{W/m}^2\text{K}$

場合と $\lambda = 0.21 \text{ W/m}^2$ のアクリル板とした場合の壁面温度 T_2 と熱流束を求めると, (3.4) と (3.2) より

$$\text{鉄板} \begin{cases} T_2 = 49.84^\circ\text{C} & (T_1 - T_2 = 0.16^\circ\text{C}) \\ \dot{q} = 428.3 \text{ W/m}^2\text{K} \end{cases}, \quad \text{アクリル板} \begin{cases} T_2 = 25.3^\circ\text{C} & (T_1 - T_2 = 24.7^\circ\text{C}) \\ \dot{q} = 172.9 \text{ W/m}^2\text{K} \end{cases}$$

となります。熱伝導率の大きな鉄板に比べて熱伝導率の小さなアクリル板のほうが両面間の温度差が大きく、また、熱流束も約 60%程度少ないことがわかります（断熱効果が高い）⁶。

3 - 2 . 熱通過率 (coefficient of overall heat transmission)

冬になると床暖房が重宝されますが、これは床下に高温のお湯が流れ、その熱が床を通して床上へに伝わり、更にその熱が部屋の空気を温めるというわけですね。お湯の熱が床板を通して部屋に移動するというので、この移動した熱の割合を熱通過率 $[\text{W/m}^2\text{K}]$ と呼んでいます。

(1) 平板壁を挟む熱の通過

厚さ L 、熱伝導率 λ の平板壁を挟んで左側に温度 T_{in} の高温流体が、右側に温度 T_∞ の流体が流れていて、 $T_{in} > T_1 > T_2 > T_\infty$ とします。このとき、高温流体から低温流体に伝わる熱量を求めます。

流体 1 から平板に流入する熱流束 \dot{q} は、熱伝達率を α_{in} としてニュートンの冷却則より

$$\dot{q} = \alpha_{in}(T_{in} - T_1) \quad (3.6)$$

\dot{q} は平板内を熱伝導で伝わる熱流束に等しく、いま定常状態を考えているので、 \dot{q} は平板右壁から流体 2 に熱伝達で伝わる熱流束に等しくならねばなりません。したがって、

$$\begin{cases} \text{流体 1 から壁面へ熱伝達} & \dot{q} = \alpha_{in}(T_{in} - T_1) \quad \therefore T_{in} - T_1 = \frac{\dot{q}}{\alpha_{in}} \\ \text{板内部の熱伝導} & \dot{q} = \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2) \quad \therefore T_1 - T_2 = \frac{\dot{q}L}{\lambda} \\ \text{壁面から流体 2 への熱伝達} & \dot{q} = \alpha_{out}(T_2 - T_\infty) \quad \therefore T_2 - T_\infty = \frac{\dot{q}}{\alpha_{out}} \end{cases} \quad (3.7)$$

が成立します。この 3 式の辺々を加えると

$$T_{in} - T_\infty = \dot{q} \left(\frac{1}{\alpha_{in}} + \frac{1}{\alpha_{out}} + \frac{L}{\lambda} \right)$$

これから平板を通過する熱流束 \dot{q} と熱流量 \dot{Q} は

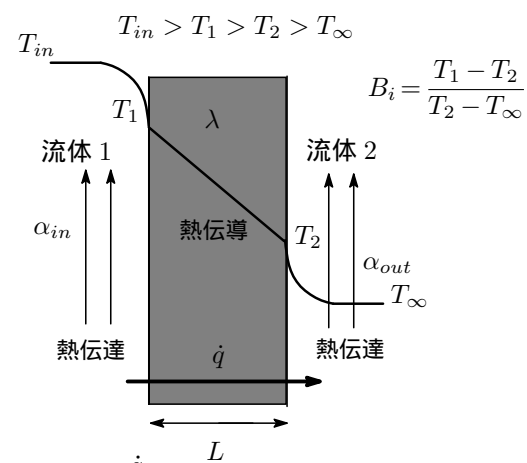
$$\dot{q} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{in}} + \frac{1}{\alpha_{out}} + \frac{L}{\lambda}} (T_{in} - T_{out}) = K(T_{in} - T_{out}) \quad (3.8)$$

$$\dot{Q} = KA(T_{in} - T_{out}) \quad (A: \text{壁面積})$$

となります。比例係数 K は

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_{in}} + \frac{1}{\alpha_{out}} + \frac{L}{\lambda} \quad (3.9)$$

で、 K を平板の熱通過率 $[\text{W/m}^2\text{K}]$ あるいは単位面積あたりの総コンダクタンスと呼ばれ、熱伝導率と同じ次元 $[\text{W/m}^2\text{K}]$ を持ちます。また、 K の逆数 $1/K$ を全熱抵抗 (total thermal resistance) といい



⁶熱湯を注いだカップヌードルを手で持てるのは紙 ($\lambda = 0.06 \text{ W/m}^2\text{K}$) の断熱効果による。

ます。 $R=1/K$ とし、

$$\left[\begin{array}{l} \cdot \text{高温流体側の熱伝達抵抗} : R_1 = 1/\alpha_{in} \\ \cdot \text{壁内の熱伝導抵抗} : R_2 = L/\lambda \\ \cdot \text{低温流体側の熱伝達抵抗} : R_3 = 1/\alpha_{out} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

とおくと、(3.9) は

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{\alpha_{in}} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{out}} \quad (3.11)$$

したがって、熱流束 \dot{q} は

$$\dot{q} = \frac{T_{in} - T_{out}}{R} = \frac{T_{in} - T_{out}}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.12)$$

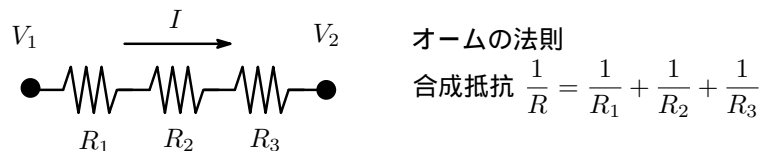
と表せます。ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{温度差} \quad T_{in} - T_{out} \rightarrow \text{電圧 (電位差)} V \\ \text{熱流束} \quad \dot{q} \rightarrow \text{電流} I \\ \text{全熱抵抗} \quad R \rightarrow \text{直列合成電気抵抗} R \end{array} \right. \quad (3.13)$$

に対応付けると、(3.12) は電気のオームの法則

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

と同じ形をしていることがわかります。



n 層の板から構成されている場合も同様に計算すれば

$$\begin{aligned} T_{in} - T_{\infty} &= \dot{q} \left(\frac{1}{\alpha_{in}} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{out}} \right) \\ \frac{1}{K} &= \frac{1}{\alpha_{in}} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{out}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

となります。

例.9 厚さ $L=15\text{mm}$ の 2 枚のベークライト板 ($\lambda=0.33\text{W/mK}$) に挟まれたヒーターが $\dot{Q}=24\text{W}$ で発熱しており、板の外表面は $T_{\infty}=8^{\circ}\text{C}$ の外気にさらされている。外気流体の熱伝達率を $\alpha=5\text{W/m}^2\text{K}$ 、ベークライト 1 枚の伝熱面積を $A=0.05\text{m}^2$ としたとき、板の内、外面温度 (T_1, T_2) を求めよ。ただし、発熱体の熱量はすべてベークライト板を通過するものとする。

Ans. 1 枚のベークライトを通過する熱量は $\dot{Q}/2=12\text{W}$ 。
ニュートンの冷却則より外面温度 T_2 は

$$\dot{Q}/2 = \alpha(T_2 - T_{\infty})A \rightarrow 12 = 5 \times (T_2 - 8) \times 0.05, \quad \therefore T_2 = 56^{\circ}\text{C}$$

内面温度 T_1 は

$$\dot{Q}/2 = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} A \rightarrow 12 = -0.33 \times \frac{56 - T_1}{15 \times 10^{-3}} \times 0.05 \quad \therefore T_1 = 66.9^{\circ}\text{C}$$

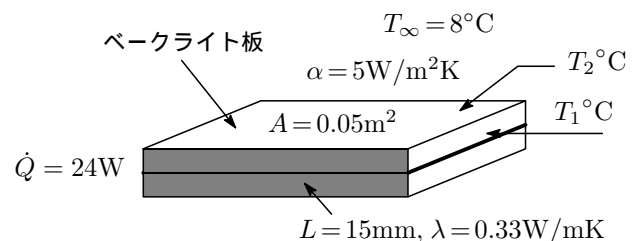


図 12: ヒーターを挟んだベークライト板

例.10 .63 [薄いヒーターの両面を厚さ $L_r=1.5\text{mm}$ のゴム板で挟んだカーペットが厚さ $L_w=20\text{mm}$ の木製床板に敷かれている。室温は 20°C 、床下の気温は -5°C 、カーペット上面と床下板面における熱伝達率を共に $5\text{W/m}^2\text{K}$ とする。ヒーターの発熱量が 100W/m^2 のとき、カーペットの上面温度はいくらか。

Ans. ヒーターの温度を T_1 [K] とし、カーペットの上面温度、下面温度をそれぞれ T_2, T_3 とします。カーペットの上下に接している媒質は異なるので、ヒーターの発熱による上面、下面側への熱流束は同じではなく、上面側への熱流束を \dot{q}_1 、下面側への熱流束を \dot{q}_2 とします。また、上面側の空気の温度を $T_{\infty 1}$ 、下面側の床下の温度を $T_{\infty 2}$ としておきます。

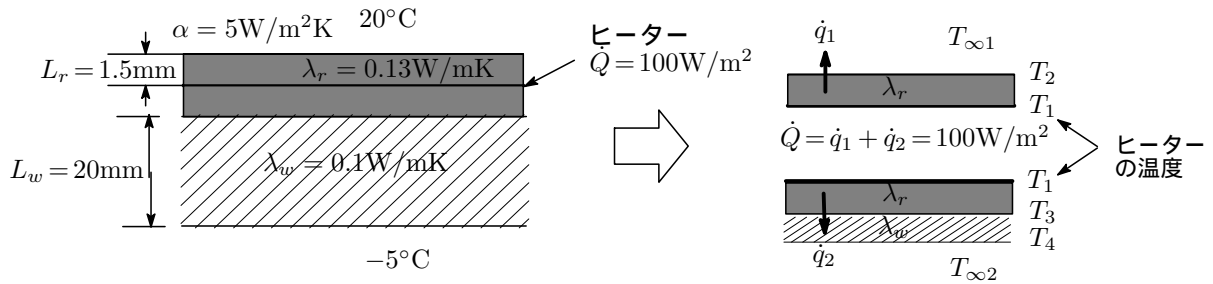


図 13: ヒーター暖房

カーペットの上面側の熱流束 \dot{q}_1 は (3.7) より

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{\dot{q}_1 L_r}{\lambda_r}, \quad T_2 - T_{\infty 1} = \frac{\dot{q}_1}{\alpha} \\ \therefore \dot{q}_1 &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L_r}{\lambda_r} \right)^{-1} (T_1 - T_{\infty 1}) \\ &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1.5 \times 10^{-3}}{0.13} \right)^{-1} (T_1 - 293.15) = 4.73(T_1 - 293.15) \text{ W/m}^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

次に下面側の熱流束 \dot{q}_2 は (3.14) より⁷

$$\begin{aligned} T_1 - T_{\infty 2} &= \dot{q}_2 \left(\frac{L_r}{\lambda_r} + \frac{L_w}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha} \right) \\ \therefore \dot{q}_2 &= \left(\frac{L_r}{\lambda_r} + \frac{L_w}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} (T_1 - T_{\infty 2}) \\ &= \left(\frac{1.5 \times 10^{-3}}{0.13} + \frac{20 \times 10^{-3}}{0.1} + \frac{1}{5} \right)^{-1} (T_1 - 268.15) = 2.43(T_1 - 268.15) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ヒーターの発熱量 \dot{q} は 100 W/m^2 であるので

$$\dot{q} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 100 \quad (3.17)$$

(3.15), (3.16), (3.17) よりヒーターの温度 T_1 は

$$T_1 = 298.63 \text{ [K]} \rightarrow 25.5^\circ\text{C}$$

となります。カーペットの上側温度 T_2 は

$$\dot{q}_1 = \alpha(T_2 - T_{\infty 1}) = 4.73(T_2 - 293.15), \quad \therefore T_2 = 298.33 \text{ K} \rightarrow 25.2^\circ\text{C}$$

例.11 厚さ 6mm の単層ガラス窓と、厚さ 3mm の硝子板の中間に 10mm の空気層を有する二重ガラス窓がある。空気層の流動はないとして両者の熱抵抗を比較せよ、ガラスの熱伝導率は 0.74 W/mK 、熱伝達率は室内側を 6.0 W/mK 、室外側を 15 W/mK 、空気層の熱伝導率を 0.025 W/mK とする。

Ans. 単層ガラス窓と二重ガラス窓の全熱抵抗をそれぞれ R_s, R_w とすると具体的な数値を入れて

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{1}{\alpha_1} + \frac{2d}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2} = 0.241 \text{ m}^2\text{K/W} \\ R_w &= \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda_1} + \frac{\ell}{\lambda_2} + \frac{d}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2} \\ \therefore R_w &= R_s + \frac{\ell}{\lambda_2} = 0.641 \text{ m}^2\text{K/W} \rightarrow \frac{R_w}{R_s} = 2.66 \end{aligned} \quad (3.18)$$

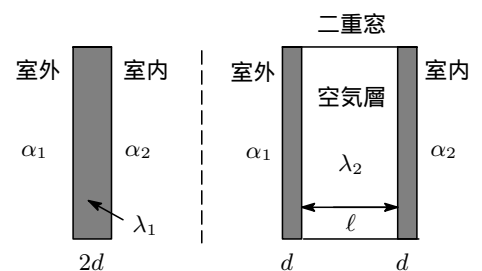


図 14: 単層ガラス窓と二重窓

⁷ $T_1 - T_3 = \dot{q} L_r / \lambda_r, T_3 - T_4 = \dot{q} L_w / \lambda_w, T_4 - T_{\infty 2} = \dot{q} / \alpha$ から求めてもよい。

(2) 円筒壁の熱通過

内半径 r_1 [m] , 外半径 r_2 [m] , 長さ L [m] , 熱伝導率 λ [W/mK] の円筒の内側と外側を温度が異なる流体が流れている場合を考えます。

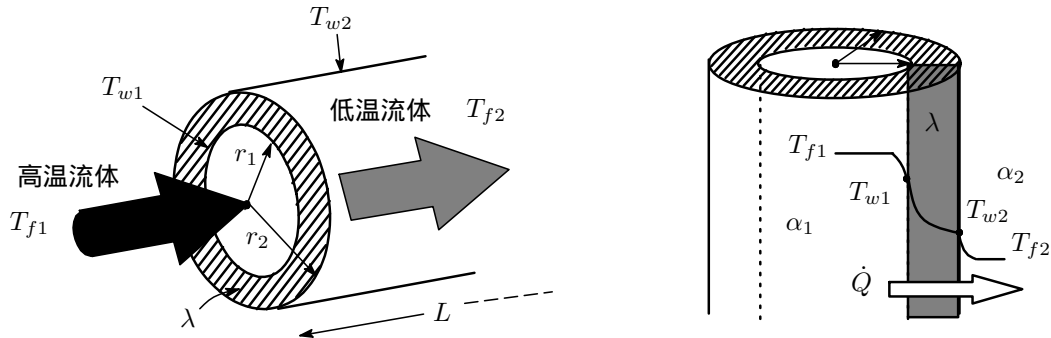


図 15: 円筒壁の熱通過

円筒内側の流体の温度を T_{f1} , 外側の流体の温度を T_{f2} , 円筒内壁面の温度を T_{w1} , 外壁面の温度を T_{w2} とし, 高温流体から円筒内壁面への熱伝達率を α_1 , 外壁面から低温流体への熱伝達率を α_2 とします。そうすると, 熱流量は次式で表されます。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{高温流体} \rightarrow \text{円筒内壁: 熱伝達熱量} \quad \dot{Q}_{f1} = \alpha_1(T_{f1} - T_{w1})2\pi r_1 L \\ \text{円筒内壁} \rightarrow \text{円筒外壁: 熱伝導熱量} \quad \dot{Q}_w = 2\pi\lambda L \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\ln(r_2/r_1)} \\ \text{円筒外壁} \rightarrow \text{低温流体: 熱伝達熱量} \quad \dot{Q}_{f2} = \alpha_2(T_{w2} - T_{f2})2\pi r_2 L \end{array} \right. \quad (3.19)$$

熱は円筒の半径方向だけに伝わり, 軸方向には伝わらない(1次元熱伝導・熱伝達)ものとし, 定常状態であるとすると,

$$\dot{Q}_{f1} = \dot{Q}_w = \dot{Q}_{f2} = \dot{Q} \quad (3.20)$$

となるので, (3.19) の辺々を足し合わせると

$$\left. \begin{array}{l} T_{f1} - T_{w1} = \frac{\dot{Q}}{2\pi\alpha_1 r_1 L} \\ T_{w1} - T_{w2} = \frac{\dot{Q} \ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda L} \\ T_{w2} - T_{f2} = \frac{\dot{Q}}{2\pi\alpha_2 r_2 L} \end{array} \right\} \rightarrow T_{f1} - T_{f2} = \frac{\dot{Q}}{2\pi L} \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2 r_2} \right)$$

となります。これから円筒の単位長さあたりの熱通過量は

$$\dot{Q}/L = 2\pi k(T_{f1} - T_{f2}), \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2 r_2}} \quad (3.21)$$

となります。比例定数 k [W/m²K] は円筒の熱通過率と呼ばれます。 n 層の多層円筒の熱通過率は上の議論を自動的に拡張すればいいので, その詳細は略して結果を示すと

$$k' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{1}{\alpha_2 r_{i+1}}} \quad (3.22)$$

となります。

例.12 内径 $d_1=100\text{mm}$ ，外径 $d_2=110\text{mm}$ ，熱伝導率 $\lambda_1 = 52.3\text{W/mK}$ の鋼管内部を $T_f = 250^\circ\text{C}$ の流体が流れていて，鋼管は $T_{f2} = 15^\circ\text{C}$ の外気に接している。

管の内壁，外壁面における熱伝達係数をそれぞれ $\alpha_1 = 46.5\text{W/m}^2\text{K}$ ， $\alpha_2 = 5.8\text{W/m}^2\text{K}$ とするとき，管の単位長さあたりの熱流量 \dot{Q} を求めよ。また，管の外側に熱伝導率 $\lambda_2 = 0.047\text{W/mK}$ の保温材を厚さ 30mm 巻くと，熱損失は何%減るか。

Ans. (3.21) より

$$\dot{Q}/L = 2\pi k(T_{f1} - T_{f2}) = 2\pi k(250 - 15)$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\alpha_2 r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{46.5 \times 0.05} + \frac{1}{52.3 \times \ln \frac{0.055}{0.05}} + \frac{1}{5.8 \times 0.055}} = 0.280 [\text{W/m}^2\text{K}]$$

$$\therefore \dot{Q}/L = 413.98 [\text{W/m}]$$

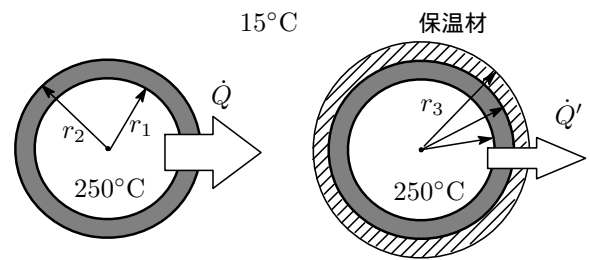
保温材を巻いた場合，(3.22) より

$$k' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\lambda_2 \ln \frac{r_3}{r_2}} + \frac{1}{\alpha_2 r_3}} = 0.0853 [\text{W/m}^2\text{K}]$$

$$\therefore \dot{Q}'/L = 2\pi k'(T_{f1} - T_{f2}) = 126.0 [\text{W/m}]$$

熱損失の減少分は

$$\frac{\dot{Q} - \dot{Q}'}{\dot{Q}} \times 100 = 69.6\%$$



3 - 3 . フィンの放熱とフィン効率 (fin efficiency)

(1) フィンの放熱

図 16 に示すような長さ L の板状フィンが温度 T_w の基板に取り付けられ，一定温度下で放熱している場合を考えます。フィンから放熱される熱流量 \dot{Q}_f とフィンの長さ方向の温度分布を求めていきます。

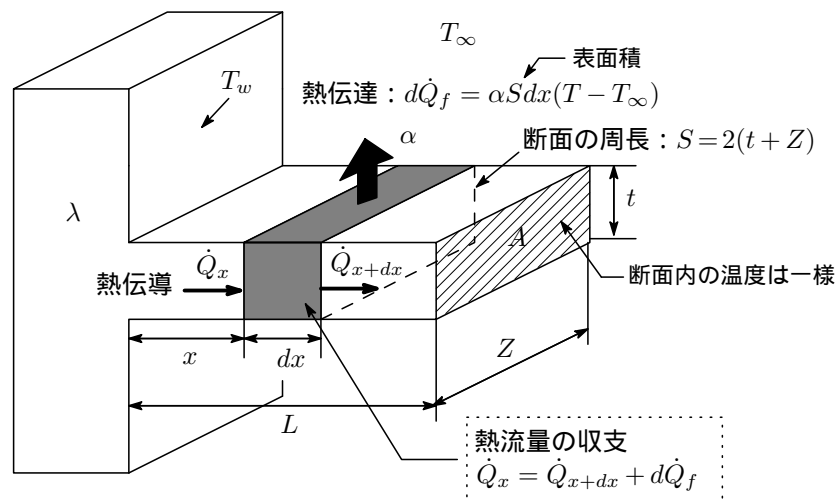


図 16: フィンの伝熱

周囲の流体温度を T_∞ ，フィン材の熱伝導率を λ ，フィンの厚みは非常に薄く（断面積 A ），断面内の温度は一樣とみなせ，フィン表面と周囲流体との間の熱伝達率 α は場所によらず一定であるとします。そうすると，フィンの温度は基板からの距離 x のみの関数となります。

さて、任意の距離 x における微小距離 dx 部の熱収支を考えます。左面から熱伝導により流入する熱流量を \dot{Q}_x とすると、その一部 $d\dot{Q}_c$ は熱伝達により外部に放出され、残りは熱伝導で右面から流出していくので

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + d\dot{Q}_c \quad (3.23)$$

が成立します。各熱流量は

$$\begin{cases} \dot{Q}_x = -\lambda A \frac{dT}{dx} \\ \dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}_x}{dx} dx = -\lambda A \frac{dT}{dx} - \lambda A \frac{d^2T}{dx^2} dx \\ d\dot{Q}_f = \alpha S dx (T - T_\infty) \end{cases} \quad (3.24)$$

と表せるので、熱収支の式 (3.23) は

$$\begin{aligned} -\lambda A \frac{dT}{dx} &= -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) + \alpha S dx (T - T_\infty) \\ \therefore \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\alpha S}{\lambda A} (T - T_\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

となり、 $\theta = T - T_\infty$ 、 $m = \sqrt{\alpha S / \lambda A}$ とおけば、これは調和振動子の微分方程式と同じ形となります。

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

この一般解は

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (3.26)$$

です。積分定数 C_1, C_2 は境界条件から決めます。フィン先端では熱の出入りが無視できる（あるいはフィン先端が断熱されている）として境界条件を

$$\begin{cases} x = 0 : \theta = \theta_0 (= T_w - T_\infty) \longrightarrow C_1 + C_2 = T_w - T_\infty \\ x = L : \frac{d\theta}{dx} = 0 \longrightarrow C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

とすれば積分定数は

$$C_1 = \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} (T_w - T_\infty), \quad C_2 = \frac{e^{m(2L-x)}}{1 + e^{2mL}} (T_w - T_\infty)$$

となり、これを (3.26) に入れて整理するとフィン内の温度分布を与える式として

$$\begin{aligned} \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} &= \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \\ \therefore T &= T_\infty + (T_w - T_\infty) \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (m = \sqrt{\alpha S / \lambda A}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

が得られます。

いま、図 17 に示すように、長さ $L = 100\text{mm}$ 、幅 40mm 、厚み 5mm のフィンが $T_w = 120^\circ\text{C}$ の基板に付けられていて、熱伝導率 $\lambda = 20.1\text{W/mK}$ とします。周辺温度は $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ で熱伝達率 $\alpha = 15\text{W/m}^2\text{K}$ としたとき、フィンの x 方向の温度曲線を (3.28) より求めると、温度は根元 ($x = 0$) から先端に向かって低下し、周囲との温度差 $T - T_\infty$ はますます小さくなる、つまりフィンの放熱量は減少していきま

す。フィン全体の放熱量 \dot{Q}_f は (3.24) より

$$\begin{aligned}\dot{Q}_f &= \alpha S \int_0^L (T - T_\infty) dx = \frac{\alpha S (T_w - T_\infty)}{\cosh mL} \int_0^L \cosh m(L-x) dx \\ &= \frac{\alpha S}{m} (T_w - T_\infty) \tanh mL = 7.0 \text{ [W]}\end{aligned}\quad (3.29)$$

となります。なお, m はフィンが直方体形状か円柱形状かによって異なり, それぞれ次式で表されます。

$$\text{フィンの形状} \begin{cases} \text{直方体のフィン (幅 } a, \text{ 厚み } b) : m = \sqrt{2\alpha(a+b)/\lambda ab} \\ \text{円柱フィン (半径 } r) : m = \sqrt{2\alpha/\lambda r} \end{cases} \quad (3.30)$$

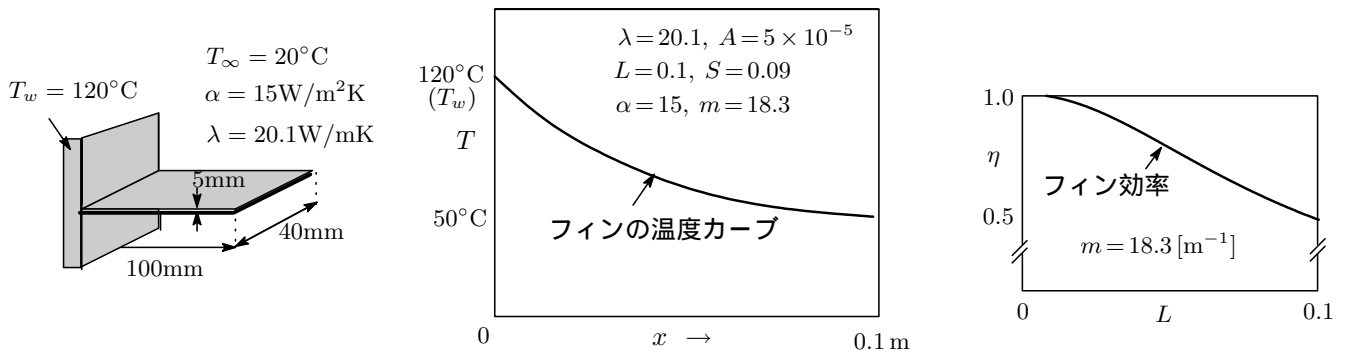


図 17: フィンの温度分布とフィン効率 η

(2) フィン効率

ところで, フィンの温度が先端まで変化せずに根元の温度 T_w と同じであれば, これは理想的な放熱フィンとなり, このときの放熱量を \dot{Q}_w とすると

$$\dot{Q}_w = \alpha S (T_w - T_\infty) \int_0^L dx = \alpha S L (T_w - T_\infty) = 13.5 \text{ [W]} \quad (3.31)$$

となって, 約 2 倍の放熱となります。フィンの放熱の度合いを示す量としてフィン効率 η があり, これは次式で定義されます。

$$\eta = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_w} = \frac{1}{mL} \tanh mL \quad (3.32)$$

mL を増やすと η は急激に低下することがわかります。上の場合ではフィン効率は $\eta = 7.0/13.5 = 0.512$ です。フィン効率 η を用いればフィンからの全放熱量 \dot{Q}_f は R をフィンの全面積として次式から求められます。

$$\dot{Q}_f = \eta \alpha S L (T_w - T_\infty) = \eta \alpha R (T_w - T_\infty) \quad (3.33)$$

例.13 壁面温度 $T_w = 200^\circ\text{C}$, 外気温度 $T_\infty = 20^\circ$, 熱伝達率 $\alpha = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$ の対流にさらされた壁に, アルミニウム ($\lambda = 237 \text{ W/mK}$) 製の長さ $L = 20 \text{ cm}$, 直径 $d = 3 \text{ cm}$ の円柱フィンを 1 つ取り付けました。フィン効率を求め, フィン部分からの放熱量を求めよ。また, フィンの材料が銅の場合 ($\lambda = 398 \text{ W/mK}$) はどうなるか。

Ans. $L = 0.2 \text{ m}$, $r = 0.03/2 \text{ m}$, $R = 2\pi r L = 0.019 \text{ m}^2$, $\lambda = 237 \text{ W/mK}$, $\alpha = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$, $T_w = 200^\circ\text{C}$, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$

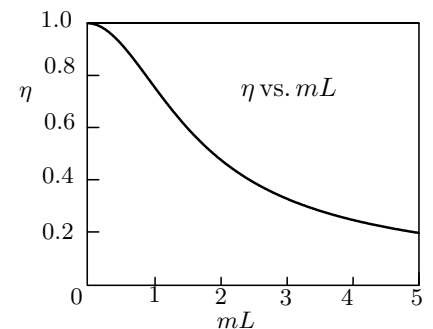


図 18: フィン効率

$$\begin{cases} Al & m = \sqrt{2\alpha/\lambda r} = 2.90/\text{m} \\ Cu & m = \sqrt{2\alpha/\lambda r} = 2.24/\text{m} \end{cases}$$

フィン効率とフィンからの放熱量は

$$Al \begin{cases} \eta = \frac{1}{mL} \tanh mL = 0.90 \\ \dot{Q}_f = \eta \alpha R (T_w - T_\infty) = 45.8 W \end{cases} \quad Cu \begin{cases} \eta = \frac{1}{mL} \tanh mL = 0.93 \\ \dot{Q}_f = \eta \alpha R (T_w - T_\infty) = 47.7 W \end{cases}$$

§ 4. 放射（輻射）熱伝達（Radiation Heat Transfer）

4 - 1 . 黒体放射とプランクの法則

物質は固体・液体等にかかわらず絶対零度でないかぎり、その温度レベルに応じた強さのエネルギーを物質の表面（数 μm から数 mm の深部）から様々な方向に電磁波の形で放射しています。これを放射熱と呼んでいます。その伝播速度は光速（約 $3 \times 10^8 \text{m}$ ）で、空間を隔てて伝熱されていきます。放射熱はいろいろな波長の電磁波からなり、物体表面の単位面積・単位時間あたりに放射されるエネルギーを全放射熱流束 $E [\text{W}/\text{m}^2]$ といい、物質温度 T の関数となります。放射熱は光線と同じく波長 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ の範囲に含まれるエネルギーを $\dot{q}_\lambda d\lambda$ とすると

$$\dot{q} = \int_0^\infty \dot{q}_\lambda d\lambda \quad [\text{W}/\text{m}^2] \quad (4.1)$$

で表され、 $\dot{q}_\lambda [\text{W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}]$ は単色放射熱流束と呼ばれ、これは波長 λ と温度 T の関数です。

放射により放出された熱エネルギー $\dot{Q} [\text{W}]$ が物体の表面に当たると、一般的に一部は表面で反射され、一部は吸収され、残りは物体を透過します。物体に吸収されるエネルギーを \dot{Q}_a 、反射されるエネルギーを \dot{Q}_r 、透過するエネルギーを \dot{Q}_t とすると、それぞれ

$$\text{吸収率} : \alpha = \frac{\dot{Q}_a}{\dot{Q}}, \quad \text{反射率} : r = \frac{\dot{Q}_r}{\dot{Q}}, \quad \text{透過率} : t_r = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}} \quad (4.2)$$

で表されます。気体では反射率は $r \sim 0$ で吸収率 α も小さく、透過率は $t_r \sim 1$ ですが、液体や固体⁸では吸収率 α がかなり大きく透過率 t_r はほとんど 0 の傾向にあります。表面に入射するすべての放射熱エネルギーを吸収する仮想的な物体を黒体（black body）⁹と呼んでいます。黒体は

$$r = t_r = 0, \quad \alpha = 1 \quad (4.3)$$

と定義できます¹⁰。温度 $T [\text{K}]$ で物体から放射されるある波長 $\lambda [\mu\text{m}]$ の E_λ のうち、黒体から放射される $E_{\lambda b} [\text{W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}]$ が最大であり、これはプランクの法則と呼ばれる次式で表されます。

$$E_{\lambda b} = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]} \quad (4.4)$$

ここで定数 C_1, C_2 は

$$C_1 = 3.742 \times 10^8 \text{W} \cdot \mu\text{m}^4/\text{m}^2, \quad C_2 = 1.439 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

ご周知のとおりプランクの法則は量子力学誕生の端緒となった法則ですね。 $E_{\lambda b}$ は絶対温度 T に対して極大値を持つカーブを描きます。黒体は吸収が 100% であるばかりでなく、熱放射もまたその温度において最大値となります。ちなみに、 $T = 1000 \text{K}$ の黒体から放射される波長 $\lambda = 3 \mu\text{m}$ （中赤外線）の

⁸なお、固体でもガラスは $\lambda < 2.8 \mu\text{m}$ 以下、石英は $3.5 \mu\text{m}$ 以下、NaCl は $2 \sim 15.4 \mu\text{m}$ 程度の範囲で t_r が 1 に近い。

⁹炭は黒体に近いとみなせます。

¹⁰ $r = 1$ の物体は白体と呼ばれます。

単色放射熱流束を (4.4) より求めると $E_{\lambda b} = 1.282 \times 10^4 \text{ W/m}^2 \cdot \mu\text{m}$ となります。

(1) レイリー・ジーンズの式

いま, $\lambda T \gg C_2$ として (4.4) の分母の指数関数部をテイラー展開し第 2 項までとると

$$e^{C_2/\lambda T} \simeq 1 + \frac{C_2}{\lambda T}$$

これを (4.4) に代入すると

$$E_{\lambda b} = \frac{C_1 T}{C_2 \lambda^4} \quad (4.5)$$

を得ます。長波長領域の単色放射熱流束は波長の 4 乗で減少することがわかります。(2.6) をレイリー・ジーンズの式と呼んでいます。

(2) ウィーンのと式とウィーンの変位則

一方, $\lambda T \ll C_2$ の場合は $\exp(C_2/\lambda T) \gg 1$ となるので, (4.4) は

$$\dot{q}_{\lambda b} = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-C_2/\lambda T} \quad (4.6)$$

とおけ, $\dot{q}_{\lambda b}$ は短波長領域では指数関数的に増加することがわかります。これをウィーンのと式と呼んでいます。また, 単色放射熱流束 $\dot{q}_{\lambda b}$ が最大値を示す波長を λ_{max} とすると, (4.4) より

$$\left(\frac{\partial \dot{q}_{\lambda b}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_{max}} = 0 \longrightarrow \lambda_{max} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{T} [\mu\text{m}]$$

が得られ¹¹, 黒体からの放射のピークの波長は温度に反比例することがわかります。これをウィーンの変位則と呼んでいます。

(3) ステファン・ボルツマンの法則

絶対温度 T で黒体から放射される全放射熱流束は (4.4) を (4.1) に入れて

$$\dot{q}_b = \int_0^\infty \dot{q}_{\lambda b} d\lambda = \int_0^\infty \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]} d\lambda = 5.67 \times 10^{-8} T^4 = \sigma T^4 \quad (4.7)$$

と得られます。 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ はステファン・ボルツマン定数と呼ばれ, 黒体から放射される全放射熱流束は絶対温度の 4 乗に比例することがわかります。したがって, 絶対温度 T [K], 表面積 A [m²] の黒体から放射される熱流量 \dot{Q}_b は

$$\dot{Q}_b = \dot{q}_b A = \sigma T^4 A \quad (4.8)$$

となります。 T が高ければ高いほど E_b は急激に増加し, 大体 300°C 以上の高温域での伝熱に関係してきます (逆に低温域では放射熱は無視できる)。

(4) ランベルトの余弦法則

微小な dA_1 面から放射された熱エネルギーは dA_1 を中心とした半径 r の上半球面上に向かいます。 dA_1 面の法線上の点 O での強度を \dot{q}_0 とすると, 法線から θ 傾いた面での強度 \dot{q} は

$$d\dot{q} = d\dot{q}_0 \cos \theta [\text{W/m}^2] \quad (4.9)$$

¹¹ 具体的な計算方法は Wiki 等を参照されたし。

で表され、これをランベルトの余弦法則と呼んでいます。図 19・右に示す微小角 $d\theta$ で切られる球帯部

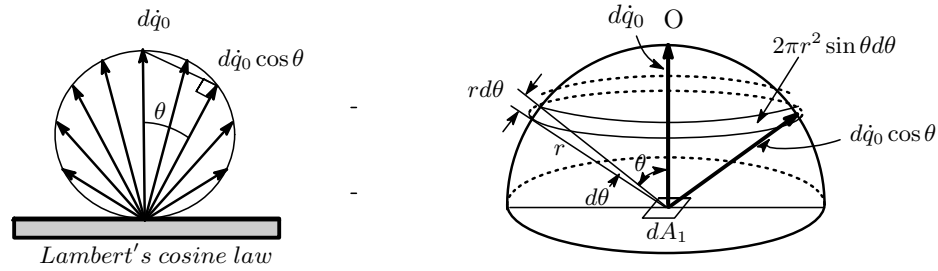


図 19: ランベルトの余弦法則

の面積は $2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ であるので、単位時間にその球帯が受ける熱放射エネルギーは

$$d\dot{q}_\theta = d\dot{q} \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = d\dot{q}_0 \cdot 2\pi r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (4.10)$$

したがって、 dA_1 から単位時間に放射される全エネルギー $\sigma T_1^4 dA_1$ は

$$\sigma T_1^4 dA = \int_0^{\pi/2} d\dot{q}_\theta d\theta = 2\pi r^2 d\dot{q}_0 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi r^2 d\dot{q}_0 \text{ [W]} \quad (4.11)$$

となり、これから点 O での放射強度 $d\dot{q}_0$ と球帯の放射強度 $d\dot{q}_\theta$

$$\begin{aligned} \therefore d\dot{q}_0 &= \sigma T_1^4 \frac{dA}{\pi r^2} \\ \therefore d\dot{q} &= \sigma T_1^4 \frac{dA_1 \cos \theta}{\pi r^2} \text{ [W/m}^2\text{]} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となります。これが dA_1 面から角 θ 方向に放射される熱放射の強さです。

4 - 2 . 灰色体からの熱放射

実在する物質からの放射熱は黒体で成り立つプランクの法則には従わず、それよりも小さくなります。そこで、実在の物質の全放射熱流束を $\dot{q}(T)$ 、単色放射熱流束を $\dot{q}_\lambda(T)$ とし、それぞれ黒体との比をとって

$$\varepsilon = \frac{\dot{q}(T)}{\dot{q}_b(T)}, \quad \varepsilon_\lambda = \frac{\dot{q}_\lambda(\lambda, T)}{\dot{q}_{\lambda b}(\lambda, T)} \quad (0 < \varepsilon, \varepsilon_\lambda < 1) \quad (4.13)$$

を定義し、 ε を放射率 (emissivity)、 ε_λ を単色放射率 (monochromatic emissivity) と呼んでいます。単色放射率 ε_λ が波長に無関係に一定である物体を灰色体 (gray body) といい、厳密には灰色体は存在しませんが、酸化した金属表面や耐火煉瓦などの非金属表面などは灰色体と考えられます。物質の放射率がわかっているならば (4.13) より全放射熱流束は次式から求められます。

$$\dot{q} = \varepsilon \dot{q}_b = \varepsilon \sigma T^4 \quad (4.14)$$

なお、放射率 ε は温度の影響を受けるのみか、同一物質でも表面状態によって変化します。平滑な面は粗面より小さく、よく磨かれた金属面では $\varepsilon \sim 0.02$ と、ほとんどの熱放射を反射してしまうものもあります。ちなみに、 700°C に加熱された鏡面表面のステンレスヒーターからの放射熱流束は、放射率を $\varepsilon = 0.4$ とすれば $E = 2.03 \times 10^4 \text{ W/m}^2$ となります。

(1) キルヒホッフの法則

単色吸収率 α_λ と単色放射率 ε_λ は等しいというのをキルヒホッフの法則と呼んでいます。

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda \quad (4.15)$$

エネルギーをよく吸収する物質ほどよく放射することを意味しています。黒体では $\alpha_\lambda = 1$ で、一般の物質では $\alpha_\lambda < 1$ ですから、(4.15) より黒体は放射率が最大となることがわかります。

例.14 真空の電球内で直径 0.1mm，長さ 100mm のフィラメントが 20W の発熱をしている。放射率を $\varepsilon = 0.65$ としたとき，フィラメントの表面温度を求めよ。

Ans. フィラメントの表面積は $A = \pi \times (0.1 \times 10^{-3})^2 \times 100 \times 10^{-3}$ であるので表面からの熱流束は $\dot{q} = 20/A = 6.366 \times 10^4 \text{W/m}^2$ 。フィラメントの表面温度は (4.14) より

$$T = \left(\frac{\dot{q}}{\varepsilon \sigma} \right)^{1/4} = \left(\frac{6.366 \times 10^4}{0.65 \times 5.67 \times 10^{-8}} \right)^{1/4} = 2038.7 \text{ K} \quad (4.16)$$

4 - 3 . 物体間の放射伝熱量

放射熱線は光線と同じく四方に発散するので，物体間の放射伝熱を考える場合は物体の位置関係が伝熱量に影響します。両物体の伝熱面が互いに平行であるとき伝熱量は最大となり，また，光の明るさが距離の 2 乗に反比例して変化するように放射伝熱量も両物体間の距離の 2 乗に反比例して変化します。

(1) 無限に長い平行平板間の放射伝熱

図 21 に示す無限に長い灰色体平行平板間の放射伝熱を考えます。灰色体 1, 2 の温度と放射率をそれぞれ $T_1, \varepsilon_1, T_2, \varepsilon_2$ とします ($0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$)。

まず，面 1 から放射される熱流束を考えます。(キルヒホッフの法則より放射率は吸収率に等しいことを念頭に置いて) 面 1 からはステファン・ボルツマン則より $\sigma \varepsilon_1 T_1^4$ の放射熱流束が放射され，面 2 はその内の $\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 T_1^4$ を吸収し，残りの $\sigma \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2) T_1^4$ は反射 (放射) します。放射された熱流束は面 1 で $\sigma \varepsilon_1^2 (1 - \varepsilon_2) T_1^4$ だけ吸収され，残りの $\sigma \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) T_1^4$ は面 1 から放射されます。以降，この繰り返しが無限に続きます。したがって，面 1 から面 2 への熱流束を $\dot{q}_{1 \rightarrow 2} [\text{W/m}^2]$ とするとこれは公比が $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)$ の無限等比級数で表され，その和は

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1 \rightarrow 2} &= \sigma T_1^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 [1 + (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + (1 - \varepsilon_1)^2 (1 - \varepsilon_2)^2 + \dots] \\ &= \sigma T_1^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)]^n = \sigma T_1^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1 - [(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)]^{\infty}}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \\ &\doteq \sigma T_1^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} = \frac{\sigma T_1^4}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

となります。温度 T_2 の面 2 から放射される熱流束も全く同様にして求められ

$$\dot{q}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma T_2^4}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} \quad (4.18)$$

となります。結局，面 1 から面 2 への正味の熱流束 \dot{q} はこれらの差し引いた分なので

$$\dot{q} = \dot{q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{q}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} [\text{W/m}^2] \quad (4.19)$$

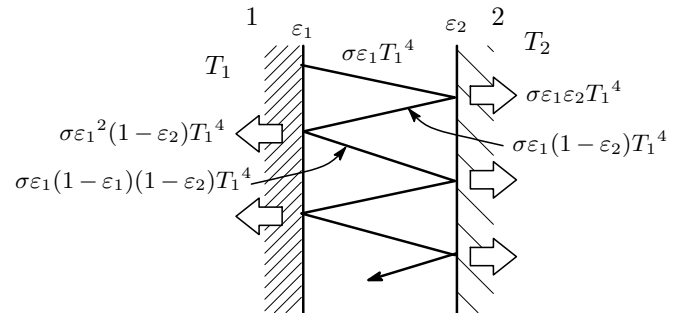


図 20: 面間の放射伝熱 : 1 → 2

となります。

例.15 対向した広い2枚の平行平板の一方は放射率 $\epsilon_1 = 0.97$ の平板で温度は 180°C に保たれており，他方は放射率 $\epsilon_2 = 0.85$ で温度 15°C に保たれている。この2平面間の放射による熱流束を求めよ。

Ans/ (4.19) より

$$\dot{q} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} = \frac{5.67 \times 10^{-8}}{1/0.97 + 1/0.85 - 1} \times [(180 + 273.15)^4 - (15 + 273.15)^4] = 1.656 \text{ KW/m}^2]$$

(2) 物体1が物体2に完全に囲まれている場合の放射伝熱

物体の表面積を A_1 ，物体2のを A_2 とすると，物体1から $\sigma\epsilon_1 T_1^4 A_1$ の熱量流が放射され，物体2はその内の $\sigma\epsilon_1 \epsilon_2 T_1^4 A_1 A_2$ 吸収し，残りの $\sigma\epsilon_1 A_1 (1 - A_2 \epsilon_2) T_1^4$ は反射する。あとはこの繰り返しで，前節の $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1 A_1, \epsilon_2 \rightarrow \epsilon_2 A_2$ と置き換えて計算すればよく，その結果

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma A_1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} (T_1^4 - T_2^4) \quad (4.20)$$

を得ます。物体1に対してそれを取り囲む物体2が非常に大きい場合は $A_1/A_2 \rightarrow 0$ となるので，(4.20) は

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \sigma\epsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (4.21)$$

となり，これは，物体2が $\epsilon_2 = 1$ の黒体である場合と同じ結果を与えます。

例.16 電気炉の中で壁面が 1400K に保たれている。ここに放射率 $\epsilon = 0.3$ ，温度 $T = 600\text{K}$ ，表面積 $A = 0.01\text{m}^2$ の耐熱材料を置いた。耐熱材料を灰色体とみなし，耐熱材料への正味の放射熱量 \dot{Q} を求めよ。

Ans. (4.21) より

$$\dot{Q} = \sigma\epsilon A (T_1^4 - T_2^4) = 5.67 \times 10^{-8} \times 0.3 \times 0.01 \times (1400^4 - 600^4) = 631.4 \text{ W} \quad (4.22)$$

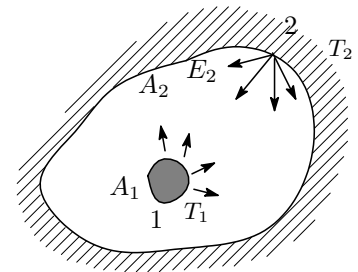


図 21: 面間の放射伝熱: 1 → 2

4 - 4 . 形態係数 (shape factor)

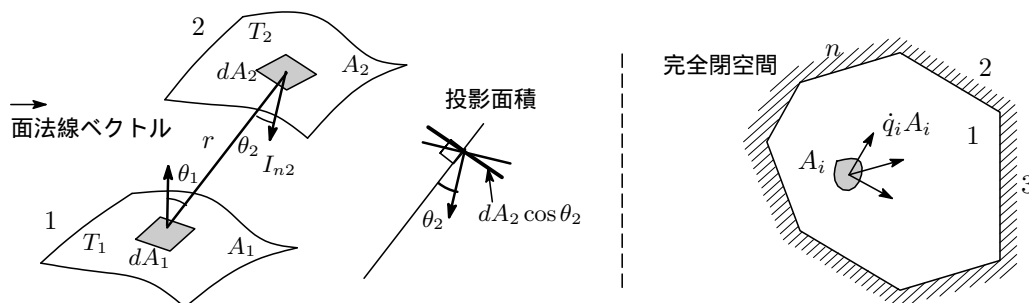


図 22: 形態係数

上で見てきたように，物体が無限に続く平行平板の場合や他の物体に完全に包囲されている場合は，物体1の面 A_1 から放射された全熱流束は物体2の面 A_2 に到達・入射し，逆も同様でした。一方，両者が限定された大きさの面の場合は，面 A_1 から放射された全熱流束がすべて面 A_2 に到達・入射するわけではなく，その一部は周囲へ消失します。一方の面へ到達する熱流束は2面間の幾何学的な位置関係の影響を受けるわけです。それではどれだけの量が届くのか，その割合を形態係数 (radiation shape

factor)と呼んでいます。以下にこれを定式化していきます。

図 22・左に示すように黒体 1, 2 の面積を A_1, A_2 , 温度を T_1, T_2 とします。微小面積 dA_1 から角 θ_1 方向に放射される熱放射の強さは (4.12) で与えられていて

$$d\dot{q} = \sigma T_1^4 \frac{dA_1 \cos \theta_1}{\pi r^2} \quad [\text{W/m}^2]$$

でした。 dA_1 から見通した dA_2 の投影面積は $dA_2 \cos \theta_2$, したがって面 2 の上の微小面積 dA_2 が dA_1 から受ける単位時間あたりの熱量 $d\dot{Q}_{1 \rightarrow 2}$ は

$$d\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi r^2} dA_1 \cos \theta_1 dA_2 \cos \theta_2 \quad [\text{W}] \quad (4.23)$$

で, 面 1 から面 2 への単位時間あたりの熱流量 $\dot{Q}_{1 \rightarrow 2}$ はこれを積分して

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \int d\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \sigma T_1^4 \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad [\text{W}] \quad (4.24)$$

となります。ここで

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \sigma T_1^4 A_1 F_{12} \quad (4.25)$$

とおけば, 形態係数は

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (4.26)$$

と表せます。同様にして, 面 2 から面 1 に到達する熱流量 $\dot{Q}_{2 \rightarrow 1}$ は

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = \sigma T_2^4 \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 = \sigma T_2^4 A_2 F_{21} \quad [\text{W}] \quad (4.27)$$

$$F_{21} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

となり, F_{21} は A_2 から A_1 をみたときの形態係数です。 F_{12} と F_{21} は A_1 から A_2 をみたか, あるいは A_2 から A_1 をみたかの違いだけで

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (4.28)$$

の関係があり, これを形態係数の相互関係と呼んでいます。この関係によりいずれか一方の形態係数が分かれば他方は容易に求めることができます。 $T_1 > T_2$ のとき dA_1 から dA_2 への正味の熱流量 (伝熱量) \dot{Q} は (4.24) から (4.27) を差し引いたものなので

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad [\text{W}] \quad (4.29)$$

となります。

図 22・右に示すような完全閉空間では面 i から放射された熱流量 $A_i \dot{q}_i$ は必ずどこかの面に到達しているはずなので

$$\dot{q}_i A_i = \dot{q}_i A_i F_{i1} + \dot{q}_i A_i F_{i2} + \cdots + \dot{q}_i A_i F_{in} = \dot{q}_i A_i \sum_{j=1}^n F_{ij}, \quad \therefore \sum_{j=1}^n F_{ij} = 1 \quad (4.30)$$

が成立します。(4.29) を形態係数の総和関係と呼んでいます。

例.17 微小面 dA_1 から距離 L にある半径 R の平行円板 A_2 に対する形態係数 F_{12} を求めよ。
Ans. 図 23 より

$$\cos \theta_1 = L/r, \quad \cos \theta_2 = L/r, \quad L^2 + \rho^2 = r^2$$

また,

$$\int_{A_1} dA_1 = A_1, \quad dA_2 = \rho d\phi d\rho$$

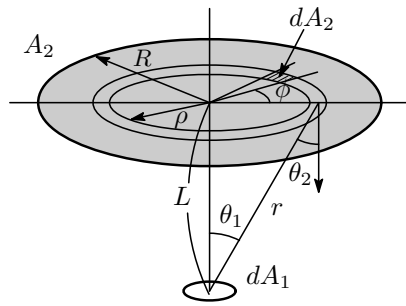


図 23: 微小平板から円板への熱放射

であるので

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 = \frac{1}{\pi} \int_{A_2} \frac{L^2}{r^4} dA_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{L^2}{(L^2 + \rho^2)^2} \rho d\phi d\rho = 2 \int_0^R \frac{L^2}{(L^2 + \rho^2)^2} \rho d\rho \end{aligned}$$

ここで $L^2 + \rho^2 = X$ とおくと $2\rho d\rho = dX$ となるので

$$F_{12} = \int_{L^2}^{L^2+R^2} \frac{L^2}{X^2} dX = \frac{R^2}{L^2 + R^2}$$

$L \rightarrow 0$ で $F_{12} \rightarrow 1$ となりますね。

例.18 太陽を表面温度 5780K の黒体とみなしたとき、単位時間・単位面積あたりの放射エネルギーを求めよ。また、地表の太陽放射に垂直な単位面積に単位時間あたり入射する太陽エネルギーの熱流束を求めよ。太陽の直径は $d = 1.39 \times 10^6 \text{ Km}$ 、太陽と地球の距離は $L = 1.49 \times 10^8 \text{ Km}$ とする。

Ans. 太陽の単位時間。単位面積あたりの放射エネルギーはステファン・ボルツマンの関係式より

$$\dot{q}_b = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times 5780^4 = 6.33 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \quad (4.31)$$

次に、地球を 1、太陽を 2 とし、太陽から地球に届く熱流束を $\dot{q}_{2 \rightarrow 1}$ 、太陽から見た地球の形態係数を F_{21} とすると、例 17 の結果を使えば

$$\begin{aligned} \dot{q}_{2 \rightarrow 1} &= \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} / A_2 = \sigma T_2^4 F_{21} = \sigma T_2^4 \frac{(d/2)^2}{L^2 + (d/2)^2} \\ &\doteq \dot{q}_b \left(\frac{d/2}{L} \right)^2 = 6.33 \times 10^7 \times \left(\frac{1.39 \times 10^6 / 2}{1.49 \times 10^8} \right)^2 = 1377.2 \text{ [W/m}^2] \end{aligned} \quad (4.32)$$

となります。この値は大気圏外で人工衛星などで測定される値とほぼ一致し、太陽定数と呼ばれます。地表に到達するまでに大気圏で反射・吸収等されるので地表に到達する熱エネルギーはこの約 17%程度といわれています。

§ 5.

非定常熱伝導 (Unsteady Thermal Conduction)

熱伝導が定常状態ではない非定常熱伝導を考えます。これは温度が時間と共に時々刻々変わるので、非定常熱伝導の基礎方程式では (2.8), (2.10) の左辺が $\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$ となり、いわゆる放物型偏微分方程式と呼ばれるものになります。

5 - 1 . 1 次元非定常熱伝導

厚さ L の無限に広い平板の 1 次元非定常熱伝導を考えます。この基礎方程式は

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

となります。 $\kappa (= \lambda / \rho c_p)$ [m²/s] は既に登場した熱拡散率で、物質固有の値をとります。いま、一様な温度 T_p にある平板が $t = 0$ で温度 $T_1 (< T_p)$ の環境に入れられたとします。その瞬間、平板の表面温度は T_1 に下がりますが、内部の温度分布はどのように時間的な変化していくか、それを知るには (5.1) の偏微分方程式を解かねばなりません。

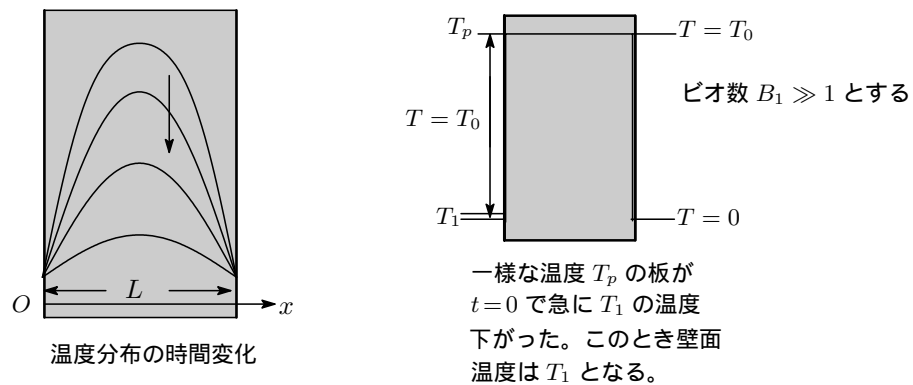


図 24: 非定常熱伝導

初期条件と境界条件を次のように設定します (図 25・右参照)。

$$\begin{cases} \text{初期条件} & t = 0 \rightarrow T = T_0 \\ \text{境界条件} & x = 0, L \rightarrow T = 0 \quad (t \text{ に関係しない}) \end{cases} \quad (5.2)$$

問題の方程式は変数分離型なので、変数分離法によって解いていきます。解を

$$T(t, x) = \theta(t) \cdot X(x) \quad (5.3)$$

と置いて (5.1) に入れると

$$\frac{1}{\kappa \theta(t)} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \quad (= -\lambda^2) \quad (5.4)$$

となります。左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数で、両辺が常に等しいということは t や x に無関係な定数でなければなりません。そこで定数を $-\lambda^2$ とおくと¹²

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta} d\theta + \kappa \lambda^2 dt = 0 \\ \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

¹²熱伝導率の λ と間違えないように。

を得ます。この第2式の解を

$$X(x) = A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x$$

とおくと, (5.2) の境界条件より

$$\begin{aligned} X(0) &= A_n = 0 \\ X(L) &= B_n \sin \lambda_n L = 0, \quad \therefore \lambda_n = n\pi/L \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.6)$$

となり

$$X(x) = B_n \sin(n\pi/L)x \quad (5.7)$$

が得られます。次に, 第1式の解は初期条件を考慮して

$$d \ln \theta = -\kappa(n\pi/L)^2 dt \longrightarrow \therefore \theta(t) = \theta(0)e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t} \quad (5.8)$$

と得られます。したがって (5.3) は, 定数項をまとめて C_n と書けば

$$T(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t} \quad (5.9)$$

が得られます。これに初期条件 $t = 0 : T = T_0$ を入れると

$$T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (5.10)$$

となります¹³。係数 C_n は次の正弦関数の直交性を使って求めていきます。

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & : m \neq n \\ L/2 & : m = n \end{cases}$$

(5.10) の両辺に $\sin(m\pi/L)x$ を掛けて積分すると左辺は

$$\int_0^L T_0 \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{T_0 L(1 - \cos m\pi)}{m\pi} = \begin{cases} \frac{2L}{m\pi} T_0 & : m = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & : m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.11)$$

一方, 右辺は (0.5) より

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} m = 1 : C_1 L/2 \\ m = 2 : C_2 L/2 \\ m = 3 : C_3 L/2 \\ \vdots \end{cases} \quad (5.12)$$

ここで m を改めて n とおいて (5.11) と (5.12) より係数 C_n を求めると

$$C_n = \begin{cases} T_0 \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} & : n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & : n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

となります。したがって求める温度分布式 (5.9) は

$$\frac{T(t, x)}{T_0} = \frac{4}{\pi} \left[e^{-\pi^2 \kappa t / L^2} \sin \frac{\pi}{L} x + \frac{1}{3} e^{-(3\pi)^2 \kappa t / L^2} \sin \frac{3\pi}{L} x + \frac{1}{5} e^{-(5\pi)^2 \kappa t / L^2} \sin \frac{5\pi}{L} x + \dots \right] \quad (5.14)$$

となります。 $\kappa t / L^2$ はフーリエ数 F_o (Fourie number) と呼ばれる無次元数で, 熱伝導による熱移動量と物体が持つ熱量の比を表し, 非定常熱伝導問題では無次元時間として使われます。フーリエ数が大き

¹³左辺はフーリエの正弦展開となっている。

くなると指数関数部は急減し，大体 $F_o \geq 0.05$ になると (5.14) の第 2 項以降は無視でき，(5.14) は

$$T/T_0 = \frac{4}{\pi} e^{-\pi^2 \kappa t / L^2} \sin \frac{\pi}{L} x \quad (5.15)$$

と表せます。図 25 に平板内温度分布の時間変化を示します。時間の経過（フーリエ数増加）に伴って温度は一様分布に近づいていく様子がわかります。

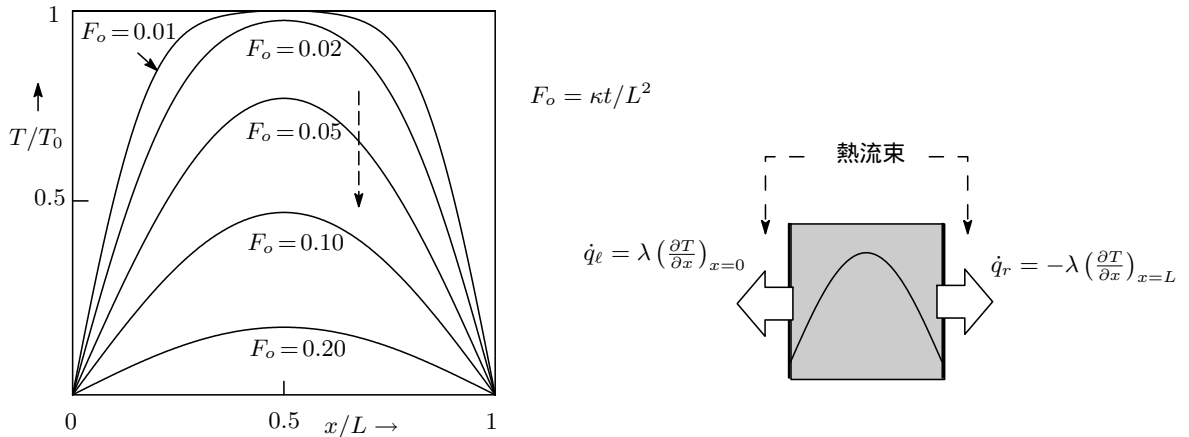


図 25: 平板内温度分布の時間変化

熱流束 \dot{q} は平板表面 $x = 0$ での温度勾配を用いて求めます。座標軸の方向，両面からの熱移動を考慮すると熱流束は

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_l &= \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} && \because \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} > 0 \\ \dot{q}_r &= -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} && \because \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} < 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \dot{q} = 2\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \quad (5.16)$$

$F_o \geq 0.05$ に対しては

$$\dot{q} = 2\lambda \frac{4}{\pi} \left[\frac{d}{dx} \left(e^{-\pi^2 \kappa t / L^2} \sin \frac{\pi}{L} x \right) \right] = \frac{8\lambda T_0}{L} e^{-\pi^2 \kappa t / L^2} \quad (5.17)$$

となります。

例.19 初期温度 50°C ，厚さ 20mm の杉板（熱拡散率 $\kappa = 0.18 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ の両面を 10°C に保つとする。1 分後，5 分後，10 分後の板の中心温度を求めよ。

Ans.

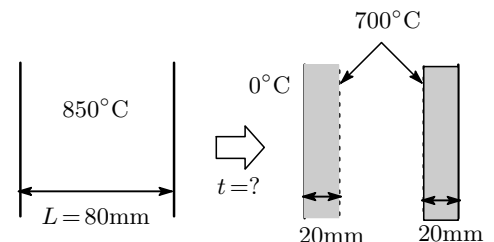
$$\alpha = \begin{cases} 1 \text{ 分後} & \alpha = \frac{0.18 \times 10^{-6}}{(20 \times 10^{-3})^2} \times 60 = 0.027 \\ 5 \text{ 分後} & \alpha = 0.135 \\ 10 \text{ 分後} & \alpha = 0.27 \end{cases}, \quad x/L = 0.5$$

初期温度は 50°C ，両面は 10°C に保たれているので，(5.14) の左辺は $T \rightarrow T - 10$ ， $T_0 \rightarrow 50 - 10$ と置けばよく，上の値を代入すれば

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T - 10}{50 - 10} = \begin{cases} 1 \text{ 分後} & 0.937 & T = 47.5^\circ\text{C} \\ 5 \text{ 分後} & 0.336 & T = 23.4^\circ\text{C} \\ 10 \text{ 分後} & 0.27 & T = 13.5^\circ\text{C} \end{cases}$$

例.20

無限平板とみなせる十分に広くて長い，厚さ 80mm の鋼板を 850°C まで加熱し， 0° の油槽に投入して表面から 20mm の深さまで焼入れしたい。焼入れのための所要時間を求めよ。鋼板と冷却油との間の熱伝達率は十分に大きいものとし熱抵抗はないものとする。焼入れ温度は 700°C ，熱拡散率は $\kappa = 7.0 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ，熱伝導率 $\lambda = 30 \text{W/m}\cdot\text{K}$ ，フーリエ数 $F_o > 0.1$ とする。



Ans. $F_0 > 0.1$ であるので (5.15) より

$$T/T_0 = \frac{4}{\pi} e^{-\pi^2 \kappa t / L^2} \sin \frac{\pi}{L} x \quad \therefore t = -\frac{L^2}{\pi^2 \kappa} \ln \left[\frac{T}{T_0} \frac{\pi}{4 \sin(x/L)\pi} \right]$$

焼入れ所要時間は $L = 80 \times 10^{-3}$, $\kappa = 7.0 \times 10^{-6}$, $x = 20 \times 10^{-3}$, $T = 700^\circ\text{C}$, $T_0 = 850^\circ\text{C}$ を上式に代入して $t = 8.26$ s となります。

5 - 2 . 集中熱容量モデル (lumped capacitance model)

物体の寸法が十分小さく、また、熱伝導率 λ が大きければ物体内での温度伝搬が速くて場所による温度差はみられず、温度分布は一様とみなすことができます。これはビオ数が $B_i \ll 1$ の場合にあたり、このような取り扱いを集中熱容量法と呼んでいて、ビオ数が $B_i \ll 1$ となる物体を集中熱容量モデルと呼んでいます。体積が V の物体を一定の熱量 \dot{Q} [W] で加熱 (冷却) する場合、物体の温度の時間的な変化は

$$c_p \rho V \frac{dT}{dt} = \dot{Q} \quad (5.18)$$

で表されます。 c_p は比熱、 ρ は密度、 \dot{Q} は単位時間あたりの加熱量。物体の質量を m とすると $m = \rho V$ 。

さて、周囲温度 T_∞ 、熱伝達率 α の気流中にある物体の温度変化を考えます。 \dot{Q} はニュートンの冷却法則 (3.1) より物体の表面積を A とすると $\dot{Q} = \alpha A (T_\infty - T)$ と与えられるので、(5.18) は

$$mc \frac{dT}{dt} = \alpha A (T_\infty - T) \longrightarrow \frac{dT}{T_\infty - T} = \frac{\alpha A}{mc} dt \quad (5.19)$$

となり、この微分方程式の解は容易に求められて

$$T = T_\infty + C \exp \left(-\frac{\alpha A}{mc} t \right)$$

積分定数は初期条件を $t = 0$ で $T = T_0$ として $C = T_0 - T_\infty$

と求まります。ここで時定数を

$$\tau_c = \frac{mc_p}{\alpha A} \text{ [s]} \quad (5.20)$$

と定義すると上式は

$$T = T_\infty - (T_\infty - T_0) e^{-t/\tau_c} \quad (5.21)$$

これを整理して

$$\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = 1 - e^{-t/\tau_c} \quad \text{or} \quad \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} = e^{-t/\tau_c} \quad (5.22)$$

を得ます。時定数 τ_c が小さいほど速やかに定常状態に移行していきます。 t/τ_c は以下に示すようにフーリエ数 F_0 とビオ数 B_i の積であらわされる無次元数です。

$$\frac{t}{\tau_c} = \frac{\alpha A}{mc_p} t = \frac{\alpha}{\rho c_p} \frac{A}{V} t = \frac{\alpha t}{\rho c_p L} = F_0 \cdot B_i \quad \left[F_0 = \frac{\kappa t}{L^2} = \frac{\lambda t}{\rho c_p L^2}, B_i = \frac{\alpha L}{\lambda} \right] \quad (5.23)$$

したがって、フーリエ数とビオ数を用いれば (5.22) は

$$T = T_\infty - (T_\infty - T_0) e^{-F_0 \cdot B_i} \quad (5.24)$$

と表せます。

例.21 直径 $d = 1.0$ mm の球状测温接点を持つ熱電対が温度 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ の空气中に置かれている。あるとき、空気

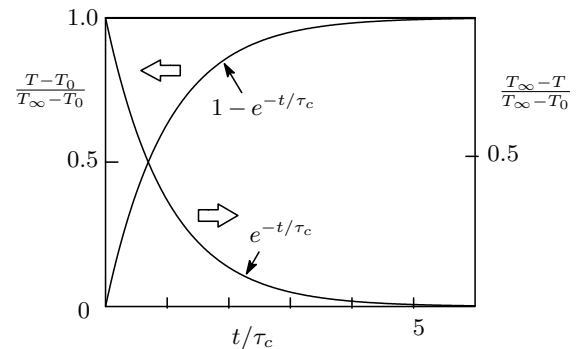


図 26: 集中熱容量モデルの温度変化

流の温度が急に $T_\infty = 200^\circ\text{C}$ に変化すると、熱電対温度 T の応答を求めよ。ただし、熱電対の測温部と気流との間の熱伝達率は $\alpha = 250\text{W/m}^2\text{K}$ 、測温接点材質の密度、熱伝導率、比熱はそれぞれ $\rho = 9300\text{kg/m}^3$ 、 $\lambda = 45\text{W/mK}$ 、 $c_p = 0.18\text{kJ/kgK}$ とする。

Ans. 測温部を球とみなしてビオ数を計算すると

$$Bi = \alpha(d/2)/\lambda = 250 \times (1.0 \times 10^{-3}/2)/45 = 0.0028 \ll 0.1$$

となるので、集中熱容量法が使えます。時定数 τ_c は各数値を代入して

$$\tau_c = \frac{mc_p}{\alpha A} = 1.12 \text{ s}$$

したがって、(5.21) より

$$T = T_\infty - (T_\infty - T_0)e^{-t/\tau_c} = 200 - 180e^{-t/1.12}$$

参考文献

- [1] 平田哲夫・田中誠・石川正昭，羽田義昭「例題でわかる伝熱工学」森北出版，2007
- [2] 丸茂栄佑，矢尾匡永，牧野州秀「伝熱工学」コロナ社，2016
- [3] 杉山均，佐野正利，永橋優純，加藤直人「はじめて学ぶ移動現象論」森北出版，2014