

自然対流熱伝達

Natural Convection Heat Transfer

KENZOU

2023.02.04 (立春)

静止している流体内に流体より温度の高い物体を置くと物体表面近くの流体は熱膨張によって密度が小さくなり浮力が生じます。この浮力が流体に働く重力より大きくなると、物体表面近くの流体部分は上向きに上昇し、表面から少し離れた重い部分の流体は沈降するので流体の移動が生じます。この流動は強制的ではなく自然に起こるのでこれを自然対流と呼んでいます。本レポートは「強制対流熱伝達」の姉妹編で自然対流熱伝達を扱います。「熱の移動現象(伝熱)」→「強制対流熱伝達」→「自然対流熱伝達」といった3部作構成となっています。

§ 1. 垂直平板からの層流自然対流熱伝達

1 - 1 . 自然対流熱伝達の基礎方程式

図1に示すように、 x 軸を平板に沿って垂直上向きに、 y 軸をそれと直角にとり、表面温度が $T_w (> T_\infty)$ の垂直平板からの層流熱伝達を考えます。流体には粘性摩擦力と流れの駆動力となる浮力だけが作用するものとします。

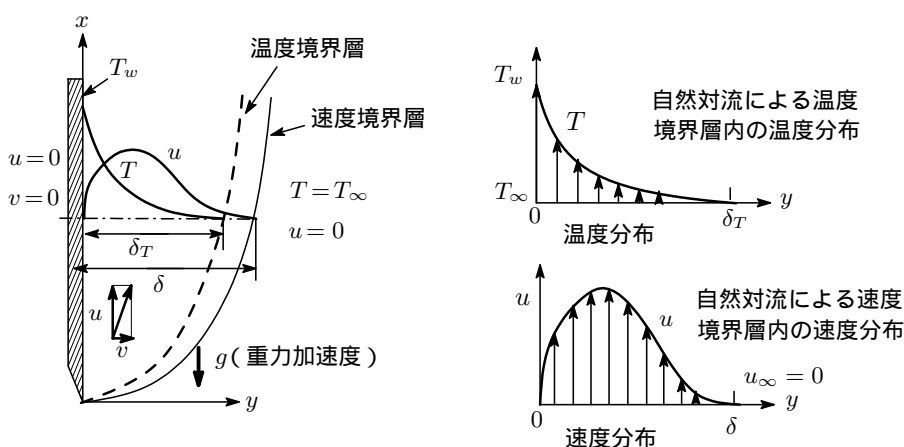


図 1: 垂直平板からの層流自然対流熱伝達

境界層内の速度分布、温度分布を求めるための基礎方程式は、強制対流では次の3つの方程式(質量保存則、運動量方程式、エネルギー方程式)でした。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 質量保存則} \quad : \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 2) \text{ 運動量方程式} \quad : \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 3) \text{ エネルギー方程式} : u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (a = \lambda / \rho c_p) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

一方、自然対流では1)と3)の質量保存則とエネルギー方程式はそのまま成り立ちますが、2)の運

動量方程式の右辺には体積力としての浮力項 $g(\rho_\infty - \rho)$ を加える必要があり

$$\text{運動量方程式: } \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(\rho_\infty - \rho) \quad (1.2)$$

となります。 g は重力加速度, ρ_∞ は流体の密度, ρ は境界層内の流体の密度。温度変化がそれほど大きくない範囲では, 浮力項に現れる密度 ρ 以外の物性値は温度によって変化しないと仮定します。これをブシネスク¹近似と呼んでいます (フランス語読みではブジネー?)。

さて, (1.2) は密度 ρ の温度依存性が顕にでていないので扱いにくく, 流体の体膨張係数 β を用いて次のように書き直してやります。 β は定義より

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad [\text{K}^{-1}] \quad (V=1/\rho: \text{比容積}) \quad (1.3)$$

で, この式は温度変化の大きくない範囲では

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\rho - \rho_\infty}{T - T_\infty}$$

と近似できるので, 浮力項は

$$g(\rho_\infty - \rho) = \rho g \beta (T - T_\infty)$$

と表わせ, (1.2) の運動量方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (\nu = \mu/\rho) \quad (1.4)$$

と書けます。これで垂直平板自然対流の基礎方程式が揃いました。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{質量保存則} \quad : \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \text{運動量方程式} \quad : u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \\ \text{エネルギー方程式} : u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

強制対流と自然対流の基礎方程式 (1.1) と (1.5) を比較すればわかるように, 自然対流の場合には運動量方程式とエネルギー方程式とが T を通して相互に干渉しあうので互いに独立ではなく, 連立方程式として取り扱っていく必要があります。解析の方法として強制対流熱伝達のところでやった流れ関数を用いる方法もありますが, ここでは積分法 (プロフィール法) と呼ばれる手法を取り上げます。

平板が一様に等温であるとし, 境界条件を以下のように設定します。

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \quad : u = 0, v = 0, T = T_w \\ y = \infty \quad : u = 0, T = T_\infty \end{array} \right. \quad (1.6)$$

補足: 流体が理想気体であれば

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = \frac{1}{T} \quad \because pV = RT, dV/dT = R/p \rightarrow \beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = \frac{R}{p} \frac{p}{RT} = \frac{1}{T}$$

流体が空気の場合, 体膨張係数 β は膜温度を T_f として

$$\beta = \frac{1}{T_f} \quad \text{ただし, } T_f = (T_w + T_\infty)/2 \quad (1.7)$$

が使われます。

¹Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929): フランスの数学者・物理学者。フランス語の発音ではブジネー。

1 - 2 . 積分法 (プロファイル法) による近似計算

積分法 (プロファイル法) と呼ばれる方法²で, 境界層内の速度分布や温度分布を適当に仮定し, (1.5) の連立方程式の近似解を求めます³。いま, 簡単化のために速度境界層と温度境界層の厚さは近似的に等しく, $\delta = \delta_T$ としておきます (これはプラントル数が $Pr = 1$ の場合に相当しますが, 後で分かるようにそれに縛られることはありません 図 4 参照。)

1) 運動量方程式を積分型へ

運動量方程式の両辺を 0 から速度境界層の厚さ δ まで積分すると

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy + g\beta \int_0^\delta (T - T_\infty) dy \quad (1.8)$$

上式の左辺を部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \int_0^\delta \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy &= \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + [uv]_0^\delta - \int_0^\delta \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_0^\delta u \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + (uv)_{y=\delta} \quad (\because y = 0 : u, v = 0) \\ &= \int_0^\delta \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + (uv)_{y=\delta} \quad (\because \text{質量保存則適用}) \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy + (uv)_{y=\delta} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy \end{aligned} \quad (1.9)$$

となります。最後の式の導出は質量保存則から

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy &= - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad \rightarrow \quad v_{y=\delta} = - \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = - \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy \\ \therefore (uv)_{y=\delta} &= -u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = 0 \quad (\because u_{y=\delta} = u_\infty = 0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

を使いました。右辺も同様にして

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy + g\beta \int_0^\delta (T - T_\infty) dy &= \nu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^\delta + g\beta \int_0^\delta (T - T_\infty) dy \\ &= -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + g\beta \int_0^\delta (T - T_\infty) dy \quad (\because y = \delta : \partial u / \partial y = 0) \end{aligned} \quad (1.11)$$

したがって, 境界層内運動量積分方程式は次式で表されます。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy = g\beta \int_0^\delta (T - T_\infty) dy - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1.12)$$

2) エネルギー方程式を積分型へ

同様にエネルギー方程式を温度境界層の厚さ $\delta_T (\equiv \delta)$ まで積分します。

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left(a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dy \quad (1.13)$$

²積分法を自然対流熱伝達に最初に適用したのはスクワイヤーといわれています。Herbert Brian Squire(1909-1961) : 英国の航空宇宙工学者

³注 : 連続関数であれば微分と積分の順序を変えることができることに留意。 $\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx$

左辺を部分積分し，質量保存則と (1.10) を使えば

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy + \int_0^\delta \left(v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy &= \int_0^\delta \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy + [vT]_0^\delta - \int_0^\delta \left(T \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_0^\delta \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + v_{y=\delta} T_\infty \quad (\because T_{y=\delta} = T_\infty) \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta (Tu) dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta (T_\infty u) dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta (T - T_\infty) u dy \end{aligned} \quad (1.14)$$

右辺も同様にして

$$\int_0^\delta \left(a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dy = a \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_0^\delta = -a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\because (\partial T / \partial y)_{y=\delta} = 0) \quad (1.15)$$

したがって，エネルギー積分方程式は次式となります。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta (T - T_\infty) u dy = -a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1.16)$$

3) 速度分布，温度分布のプロファイル

境界層内の速度・温度分布のプロファイルを以下のように y のべき乗で表し，各係数は境界条件を満たすように決めていきます。

$$\bullet \text{ 速度分布: } u/u_\infty = a + by + cy^2 + dy^3 \quad (1.17)$$

$$\bullet \text{ 温度分布: } T = A + By + Cy^2 \quad (1.18)$$

・速度分布

次の境界条件から (1.17) の係数を決めていきます。

$$\text{境界条件} \begin{cases} y = 0 : u = 0 & \longrightarrow a = 0 \\ y = \delta : u = 0 & \longrightarrow b + \delta c + \delta^2 d = 0 \\ y = \delta : \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \longrightarrow b + 2\delta c + 3\delta^2 d = 0 \\ y = 0 : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g\beta}{\nu}(T_w - T_\infty) & \longrightarrow -\frac{g\beta}{\nu}(T_w - T_\infty) = 2u_\infty c \end{cases} \quad (1.19)$$

となるので，右の3元連立方程式を解いて各係数は次のように決まります。

$$\left(\begin{array}{l} a = 0, \quad c = -\frac{1}{2} \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu u_\infty} \\ b = \frac{1}{4} \frac{\delta g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu u_\infty}, \quad d = \frac{1}{4} \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\delta \nu u_\infty} \end{array} \right) \quad (1.20)$$

これを (1.17) に入れて整理すると，速度分布式として

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)\delta^2}{4\nu u_\infty} \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \quad (1.21)$$

を得ます。ここで

$$u_x \equiv u_\infty \cdot \frac{g\beta(T_w - T_\infty)\delta^2}{4\nu u_\infty} \quad (1.22)$$

と置くと (1.21) は

$$\frac{u}{u_x} = \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \quad (1.23)$$

と表せます (図 2)。この無次元式からわかるように u_x は速度の次元をもつので，これを代表速度と呼ぶことにします。なお， u_x , δ はいずれも x の関数で $u_x = u_x(x)$, $\delta = \delta(x)$ です。

・温度分布

同様に次の境界条件から (1.18) の係数を決めていくと

$$\text{境界条件} \begin{cases} y = 0 : T = T_w & \longrightarrow A = T_w \\ y = \delta : T = T_\infty & \longrightarrow A + \delta B + \delta^2 C = T_\infty \\ y = \delta : \partial T / \partial y = 0 & \longrightarrow B + 2\delta C = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\therefore A = T_w, \quad B = \frac{2(T_\infty - T_w)}{\delta}, \quad C = -\frac{T_\infty - T_w}{\delta^2}$$

となり, これを (1.18) に入れて整理すると次式を得ます。

$$\begin{aligned} T &= T_w + (T_\infty - T_w) \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \\ &= T_w + (T_\infty - T_w) \left[1 - \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \\ \therefore \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} &= \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.25)$$

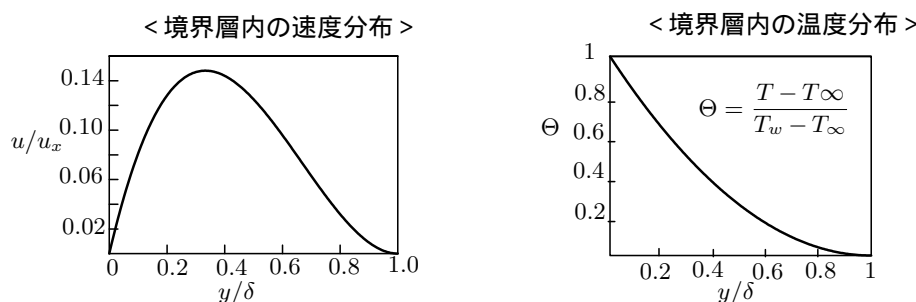


図 2: 速度分布と温度分布

例.1 垂直加熱平板に沿う自然対流境界層において, 最大速度が現れる壁面からの距離を求めよ。また, 最大速度 u_{max} が $u_{max}/u_x = 4/27$ となることを示せ。

Ans.1 (1.23) より

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_x} &= \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \longrightarrow \frac{1}{u_x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \left(1 - 4\frac{y}{\delta} + 3\frac{y^2}{\delta^2} \right) = \frac{1}{\delta} \left(1 - 3\frac{y}{\delta} \right) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) = 0 \\ \therefore y/\delta &= 1/3 \text{ or } y/\delta = 1 \end{aligned}$$

最大速度は壁面からの距離 $y/\delta = 1/3$ のところで, $u_{max}/u_x = (1/3) \times (1 - 1/3)^2 = 4/27$ //

4) 運動量/エネルギー方程式の解を求める

速度分布のプロファイル (1.23) を運動量積分方程式 (1.12) に入れて各項を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left\{ u_x \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \right\}^2 dy = \frac{1}{105} \frac{d}{dx} (u_x^2 \delta) \\ g\beta \int_0^\delta (T - T_\infty) dy &= g\beta (T_w - T_\infty) \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 dy = \frac{1}{3} g\beta (T_w - T_\infty) \delta \\ \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} &= \nu \frac{u_x}{\delta} \end{aligned}$$

同様に温度分布のプロファイル (1.18) をエネルギー積分方程式 (1.16) に入れて次式を得ます。

$$\begin{cases} (1.12) \rightarrow \frac{1}{105} \frac{d}{dx} (u_x^2 \delta) = \frac{1}{3} g\beta (T_w - T_\infty) \delta - \nu \frac{u_x}{\delta} \\ (1.16) \rightarrow \frac{1}{30} \frac{d}{dx} (u_x \delta) = \frac{2a}{\delta} \end{cases} \quad (1.26)$$

この連立微分方程式を解くために u_x と δ が x のべき関数で表せると仮定します。 C_1, C_2 を未知数として

$$u_x = C_1 x^m, \quad \delta = C_2 x^n \quad (1.27)$$

と置き, (1.26) に入れると次式が得られます。

$$\begin{cases} \frac{2m+n}{105} C_1^2 C_2 x^{2m+n-1} = \frac{C_2}{3} g\beta(T_w - T_\infty) x^n - \frac{C_1}{C_2} \nu x^{m-n} \\ \frac{m+n}{30} C_1 C_2 x^{m+n-1} = \frac{2a}{C_2} x^{-n} \end{cases} \quad (1.28)$$

この等号が任意の x に対して成り立つためには両辺の x の指数が等しくなければならないので, m, n は

$$\left. \begin{cases} 2m+n-1 = n = m-n \\ m+n-1 = -n \end{cases} \right\} \rightarrow m = 1/2, \quad n = 1/4$$

となり, (1.28) に入れると

$$\begin{cases} \frac{1}{84} C_1^2 C_2 = \frac{1}{3} g\beta(T_w - T_\infty) C_2 - \nu \frac{C_1}{C_2} \\ \frac{1}{40} C_1 C_2 = 2 \frac{a}{C_2} \end{cases} \quad (1.29)$$

この連立方程式を解いて未知数 C_1, C_2 を求めます。(1.29) は 2 元 2 次連立方程式なので根は 4 組ありますが, そのうちの正の実根の組をとって

$$\begin{aligned} C_1 &= 5.16\nu \left(\frac{\nu}{a} + \frac{20}{21} \right)^{-1/2} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{1/2} \\ C_2 &= 3.94 \left(\frac{\nu}{a} \right)^{-1/2} \left(\frac{\nu}{a} + \frac{20}{21} \right)^{1/4} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-1/4} \end{aligned} \quad (1.30)$$

を得ます。(1.27) の u_x, δ は, プラントル数 $Pr = \nu/a$ として

$$\begin{aligned} u_x &= 5.16\nu \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{-1/2} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{1/2} x^{1/2} \\ \delta &= 3.94 Pr^{-1/2} \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{1/4} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-1/4} x^{1/4} \end{aligned} \quad (1.31)$$

となり, これで自然対流境界層内の速度場, 温度場はすべて解けたこととなります。代表速度 u_x は \sqrt{x} に比例して増大し, 境界層厚さ δ は x の $1/4$ 乗に比例するので, 壁に沿って細長く成長することがわかります⁴。

グラスホフ数 (Grashof number)

次式で定義される無次元数の局所グラスホフ数

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2} \simeq \frac{\text{浮力}}{\text{粘性力}} \quad (1.32)$$

を導入すると, 境界層厚さは

$$\frac{\delta}{x} = 3.94 Pr^{-1/2} \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{1/4} Gr_x^{-1/4} \quad (1.33)$$

と表せます。グラスホフ数は自然対流を特徴づける無次元量で, 自然対流における浮力 $\sim g\beta(T_w - T_\infty)$ と粘性力 $\sim \nu$ の比を表し, グラスホフ数が高いほど浮力が粘性力より大きいことを意味し, 自然対

⁴強制対流では δ は x の $1/2$ 乗に比例。

流の強さを示す指標となります。図 3 に示すように、垂直平板の境界層は先端から発達しはじめ、ある条件になると層流から乱流に遷移します。層流から乱流への遷移はかなり広いプラントル数の範囲でグラスホフ数だけで決まることが知られていて、遷移が生じる先端からの距離を x_c 、臨界グラスホフ数を Gr_c とすると

$$Gr_c = 2.1 \times 10^9 Pr^{-3/5} \quad (0.7 < Pr < 2000) \quad (1.34)$$

$$Gr_c = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x_c^3}{\nu^2}$$

の経験式が提案されています。なお、垂直平板の自然対流の場合、 Gr_c は $10^8 \sim 10^9$ とされています。

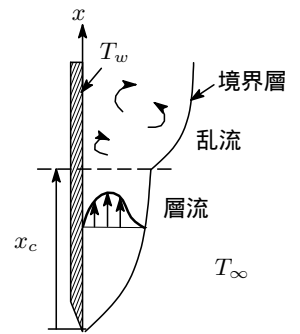


図 3: 垂直平板に沿う境界層の遷移

レイリー数 (Rayleigh number)

次式で定義される無次元量を局所レイリー数と呼んでいて、グラスホフ数とプラントル数の積で与えられます。

$$Ra_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu\alpha} = Gr_x Pr \quad (1.35)$$

レイリー数は浮力と熱拡散の比を表す無次元数で、レイリー数が小さい場合は熱拡散の影響が大きく自然対流は発生しません。一方、レイリー数が大きくなると浮力の影響が大きくなり自然対流が発生します。その境界におけるレイリー数を臨界レイリー数と呼んでいます。

< 一口 Memo >

プラントル数 (Pr) : 速度境界層と温度境界層の厚さの関係を表す。

$$Pr < 1 : \delta < \delta_T, \quad Pr = 1 : \delta = \delta_T, \quad Pr > 1 : \delta > \delta_T$$

グラスホフ数 (Gr) : 臨界値 $Gr_x \approx 10^9$ 以上で層流から乱流に遷移。

レイリー数 (Ra) : $Ra = Pr \cdot Gr$ 。臨界レイリー数以上では自然対流によって熱伝達され、それ以下では熱伝導によって伝達される。水や気体では $Ra > 10^{10}$ で完全に乱流へ遷移。

ヌセルト数 (Nr) : ヌセルト数が大きいと伝熱は対流が効いていることを示す。

例.2 大気圧下 300K の静止空気中に温度 380K に加熱された平板を鉛直においた。このとき、下端から上方へ 1cm および 10cm の位置における速度境界層厚さを求めよ。

また、境界層が乱流に遷移するグラスホフ数を $Gr_x = 10^9$ とした場合に遷移し始める位置とその位置における境界層厚さはどのくらいか。340K における空気の物性値を以下に示す。

$$\nu = 1.99 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \quad Pr = 0.718, \quad \beta = 1/T_f = 2.94 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Ans.2 膜温度は $T_f = (T_w + T_\infty)/2 = (380 + 300)/2 = 340\text{K}$ 。

グラスホフ数は

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2} = \frac{9.8 \times 2.94 \times 10^{-3} \times (380 - 300) \times x^3}{1.99 \times 10^{-5}} = \begin{cases} x = 1\text{cm} : Gr_{x=1\text{cm}} = 6266 \\ x = 10\text{cm} : Gr_{x=10\text{cm}} = 6.27 \times 10^6 \end{cases}$$

境界層厚は

$$\delta = 3.94 Pr^{-1/2} \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{1/4} Gr_x^{-1/4} x = \begin{cases} x = 1\text{cm} : \delta = 0.006\text{m} (6\text{mm}) \\ x = 10\text{cm} : \delta = 0.011\text{m} (11\text{mm}) \end{cases}$$

乱流へ遷移する位置と境界層厚さは

$$x = \left[\frac{\nu^2}{g\beta(T_w - T_\infty)} \right]^{1/3} \times 10^9 = 0.542 \text{ m} (\approx 54 \text{ cm}), \quad \delta_{x=56\text{cm}} = 0.016 \text{ m} = 16 \text{ mm} \quad //$$

1 - 3 . 熱伝達率とヌセルト数

1) 局所熱伝達率と局所ヌセルト数

局所熱伝達率⁵

$$\alpha_x = \frac{\dot{q}}{T_w - T_\infty} = \frac{-\lambda((\partial T/\partial y)_{y=0})}{T_w - T_\infty} \quad (1.36)$$

に (1.25) と (1.31) , (1.33) を入れると

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{2\lambda}{\delta} = 0.508Pr^{1/2}(0.952 + Pr)^{-1/4} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2} \right]^{1/4} \frac{\lambda}{x} \\ &= 0.508Pr^{1/2}(0.952 + Pr)^{-1/4}Gr_x^{1/4} \frac{\lambda}{x} \quad (\propto x^{-1/4}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

となり, 局所熱伝達率 α_x は平板先端からの距離 x の $-1/4$ 乗に比例して減少することがわかります (→ 温度境界層厚さの $\delta_T \propto x^{1/4}$ に対応)。局所ヌセルト数は $Nu_x = \alpha_x x / \lambda$ より⁶

$$Nu_x = 0.508Pr^{1/2}(0.952 + Pr)^{-1/4}Gr_x^{1/4} \quad (1.38)$$

と表わせ, 局所レイリー数 Ra_x を用いれば

$$Nu_x = 0.508Pr^{1/4}(0.952 + Pr)^{-1/4}Ra_x^{1/4} \quad (1.39)$$

となります。

以上, 積分法による近似解法をみてきました。LeFevre はより厳密な取り扱いを行って, プラントル数が 0 から無限大までの範囲で十分な近似精度を有する

$$Nu_x = 0.60Ra_x^{1/4} \left(\frac{Pr}{1 + 2.005\sqrt{Pr} + 2.033Pr} \right)^{1/4} \quad (0 < Pr < \infty) \quad (1.40)$$

を提案しています⁷。この式を少し変形すると

$$Nu_x = 0.504Pr^{1/4}(0.5 + Pr^{1/2} + 1.01Pr)^{-1/4}Ra_x^{1/4} \quad (1.41)$$

となり, 積分法の近似解 (1.39) とよく似ていますね。図 4 を見れば, 積分法による近似解は LeFevre のより厳密な解に概ね近いことがわかります。

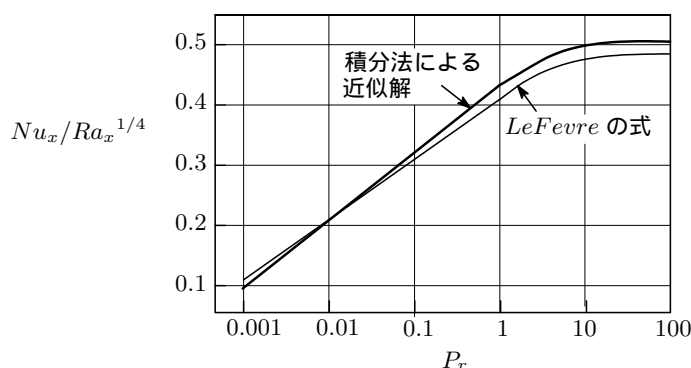


図 4: 積分法の近似解と厳密解の比較

⁵ レポート「強制対流熱伝達」の (1.3) 式参照。

⁶ 前掲 Rep の (1.6) 式参照。対流による伝熱量と静止流体の熱伝導伝熱量の比を表す。

⁷ LeFevre, E.J., Laminar Free Convection from a Vertical Plane Surface, Proc. 9th Intl. Congress Appl. Mechanics, Vol. 4, (1956)

2) 平均熱伝達率と平均ヌセルト数

長さ l の等温垂直平板に対する平均熱伝達率 α_m は

$$\alpha_m = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx = \frac{4}{3} \alpha_{x=l} \quad (1.42)$$

と求められます。平均ヌセルト数は (1.37) と (1.42) より

$$Nu_{m,l} = \frac{\alpha_m l}{\lambda} = 0.679 Pr^{1/4} (0.952 + Pr)^{-1/4} Ra_l^{1/4} \quad (1.43)$$

$$(Ra_l = g\beta(T_w - T_\infty)l^3/\nu a)$$

この式は $Pr = 0.72 \sim 1.0$ の範囲において

$$Nu_{m,l} \cong 0.56 Ra_l^{1/4} \quad (1.44)$$

で近似できます。

ヌセルト数の実験式

鉛直平板の自然対流熱伝達について古くから知られている実験式として

$$Nu_{m,l} = C Ra_l^n \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc} Ra_l & C & n \\ 10^4 \sim 10^9 & 0.59 & 1/4 \\ 10^9 \sim 10^{18} & 0.10 & 1/3 \end{array} \right] \quad (1.45)$$

があります。また, Churchill と Chu は層流域から乱流域を含む広範囲のレイリー数域に適用できる実験式として

$$Nu_{m,l} = \left\{ 0.825 + \frac{0.387(Ra_l)^{1/6}}{[1 + (0.492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2 \quad (0.1 \leq Ra_l \leq 10^{12}) \quad (1.46)$$

を提案⁸しています。いずれの実験式も膜温度 $T_f = (T_w + T_\infty)/2$ での物性値を用います。

熱流束と伝熱量

熱流束 \dot{q} と伝熱量 \dot{Q} は次式で与えられます。

$$\dot{q} = \alpha_m (T_w - T_\infty) = \frac{\lambda}{l} Nu_{m,l} (T_w - T_\infty) \quad [\text{W}/\text{m}^2] \quad (1.47)$$

$$\dot{Q} = \dot{q} A \quad [\text{W}] \quad (A: \text{表面積})$$

例3. $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ の室内に高さ 60cm, 幅 50cm の壁掛型パネルヒーターが置かれ, 部屋側の片面からのみ自然対流によって放熱している。このパネルヒーターの表面の平均温度を $T_w = 80^\circ\text{C}$ になるようにするにはヒーターの発熱量を何 W にすればよいか。なお, 50°C における空気物性値は $\lambda = 2.78 \times 10^{-2} \text{ [W/mK]}$, $\nu = 0.185 \times 10^{-4} \text{ [m}^2/\text{s]}$, $a = 2.62 \text{ [m}^2/\text{s]}$, $Pr = 0.708$, 体膨張係数は $\beta = 1/T_\infty$ より求めよ。

Ans.3 膜温度 T_f と体膨張係数 β は

$$T_f = (20 + 80)/2 = 50^\circ\text{C} \quad \beta = 1/T_\infty = 1/(273 + 20) = 3.4 \times 10^{-3}/\text{K}$$

代表長さ l を流れの向きと平行の長さとして $l = 60 \times 10^{-1} \text{ [m]}$ 。レイリー数とグラスホフ数は

$$Ra_l = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)l^3}{\nu a} = 8.97 \times 10^8, \quad Gr_l = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)l^3}{\nu^2} = 1.27 \times 10^9$$

⁸Churchill,S.W & Chu,H.H.S.,Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection for a Vertical Plate,International Journal Heat Mass Transfer,Vol.18(1975)

となり、乱流の要素も混じっていると考えられます。そこで平均ヌセルト数を Churchill & Chu の (1.46) より計算すると $Nu_{m,l} = 118.75$ となり、平均熱伝達率は

$$\alpha_m = Nu_{m,l} \frac{\lambda}{l} = 118.75 \times \frac{2.78 \times 10^{-2}}{0.6} = 5.5 [\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$$

と求められます。A をパネルヒータの面積とすれば、発熱量 $\dot{Q}[\text{W}]$ は

$$\dot{Q} = \alpha_m (T_w - T_\infty) \times A = 5.5 \times (80 - 20) \times (0.6 \times 0.5) = 99.0 [\text{W}]$$

となります。ちなみに、(1.45) の実験式を使えば、 $Ra_l = 9 \times 10^8$ であるので $C = 0.59$, $n = 1/4$ として

$$Nu_{m,l} = 0.59 Ra_l^{1/4} = 102.1, \quad \alpha_m = 4.73 [\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$$

これから $\dot{Q} = 85.1 [\text{W}]$ となり、(1.46) による値よりも約 14% 低い値を与えます。//

§ 2.

水平平板からの層流自然対流熱伝達

流体中に水平に平板を置いた場合の水平伝熱面からの自然対流を考えます。この場合、図 5 に示すように、伝熱面が加熱面であるか冷却面であるか、またそれが上向きか下向きか、それぞれの場合に分けて扱う必要があります。

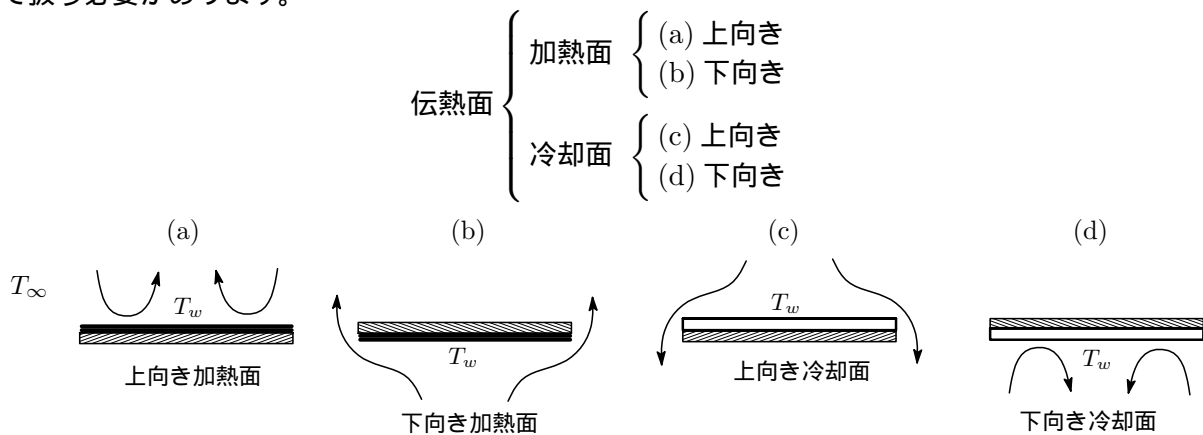


図 5: 水平伝熱面の自然対流

加熱面が (a) 上向き、あるいは冷却面が (d) 下向きのケースでは、レイリー数 Ra_l が大きくなると伝熱面に沿う流れは層流から乱流に遷移しますが、加熱面が下向きの (b) あるいは冷却面が上向き (c) のケースでは伝熱面上の流れは層流であることが多いといわれます。

伝熱面温度 T_w が一樣の場合、平均ヌセルト数は (1.45) の実験式から求めますが、水平平板の場合には C と n の値は次表のとおりです (物性値は膜温度での値)。代表長さ L は伝熱面の面積 A を周囲長

	$PrGr$	C	n
(a) or (d)	$10^4 \sim 10^7$	0.54	1/4
	$10^7 \sim 10^{11}$	0.15	1/3
(b) or (d)	$10^5 \sim 10^{11}$	0.27	1/4

表 1: 水平伝熱面の自然対流実験式の C と n の値

P で割った $L = A/P$ が使われます⁹。

⁹代表長 L のとり方は、水平平板が正方形では一辺の長さ、矩形では二辺の平均、直径 d の円形では $0.9d$ 、それ以外は面積を周辺長で割った値などありますが、表 1 では (??) を使います。

例 4. 内部に発熱がある幅 $a = 80\text{mm}$, 奥行き $b = 40\text{mm}$ の電子素子が温度 $T_\infty = 24^\circ\text{C}$ の空气中に水平に設置され, 自然対流により冷却されている。この素子の上面の表面温度が表面一様に $T_w = 110^\circ\text{C}$ であるとする, 放熱量 $\dot{Q}[\text{W}]$ はいくらになるか。ただし, 下面と 4 側面からの放熱はないものとする。なお, 物性値は膜温度での値を用いよ。

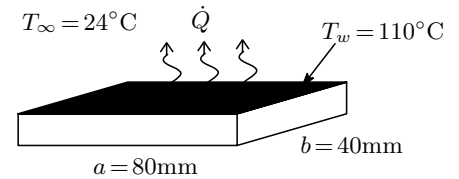
Ans.4 膜温度は $T_f = (T_w + T_\infty)/2 = (110 + 24)/2 = 67^\circ\text{C} = 340\text{K}$ 。その温度での空気物性値は

$$\nu = 1.99 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 2.9 \times 10^{-2} \text{W}/\text{mK}$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = 2.94 \times 10^{-3} / \text{K}, \quad Pr = 0.718$$

代表長さは

$$L = \frac{A}{P} = \frac{0.080 \times 0.040}{2 \times (0.080 + 0.040)} = 0.0133\text{m}$$



グラスホフ数とレイリー数は

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2} = 1.47 \times 10^4, \quad Ra_L = Gr_L Pr = 1.06 \times 10^4$$

流れは層流となっています。平均ヌセルト数は表 1 より $C = 0.54$, $n = 1/4$ に当たるので

$$Nu_{m,L} = 0.54 Ra_L^{1/4} = 5.48$$

平均熱伝達率は

$$\alpha_m = \frac{\lambda}{L} Nu_{m,L} = \frac{2.9 \times 10^{-2}}{1.33 \times 10^{-2}} \times 5.48 = 11.9 \text{W}/\text{m}^2\text{K}$$

したがって, 放熱量は

$$\dot{Q} = \alpha_m (T_w - T_\infty) A = 11.9 \times (110 - 24) \times 0.0032 = 3.27 \text{W} \quad //$$

§ 3.

密閉空間内の自然対流熱伝達

3 - 1 . 縦に長い密閉空間

縦に長い長方形 (幅 L , 高さ H) の密閉空間があり, その上下は断熱され, 左右 2 枚の垂直壁の一方は高温 T_1 に, 他方が低温 T_2 に保たれているとします (図 6)。この場合, 高温壁に沿って上昇流が, 低温壁面に沿って下降流が生じ, 密閉空間内には循環する流れが発生します。静止した空気は熱伝導率は低いので断熱効果は高いですが, 自然対流が発生すると対流によって熱が持ち去られるので熱流量は大幅に増加します。いま, この空間を流れる熱流量 \dot{Q} を用いて平均熱伝達率 α_m を次式で定義します。

$$\dot{Q} = \alpha_m (T_1 - T_2) A \quad (A: \text{壁面積}) \quad (3.1)$$

平均ヌセルト数とレイリー数は

$$Nu_{m,L} = \frac{\alpha_m L}{\lambda} \quad (3.2)$$

$$Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g\beta(T_1 - T_2)L^3}{\nu a}$$

なお, 縦に長い密閉空間の自然対流の様相は, 空間のアスペクト比 (H/L) によって異なる様相を呈しますが, 概ね次のようです (図 6・右図参照)。

- (1) レイリー数が小 ($Ra_L < 10^3$) : 浮力によって生じる流れは極めて弱く自然対流はほとんど起こらない。熱は主に熱伝導によって伝わる。
- (2) レイリー数 → 大 : 浮力による流れが発生し, Ra_L の増加とともに次第に壁面近傍に境界層が形成されてくる。熱は熱伝導と熱伝達によって伝わる。

- (3) レイリー数 \Rightarrow 大々：さらにレイリー数が増加すると境界層内の流速は増大し，境界層厚は薄くなり，空間の中央部にはあまり動かず温度分布がほぼ均一な流体部分が存在するようになる。
- (4) レイリー数 \Rightarrow 大大々：壁面境界層は遷移領域をへて乱流に移行。

このような流動状況に変化に応じてヌセルト数 $Nu_{m,L}$ は Ra_L の増大に伴い上昇します。

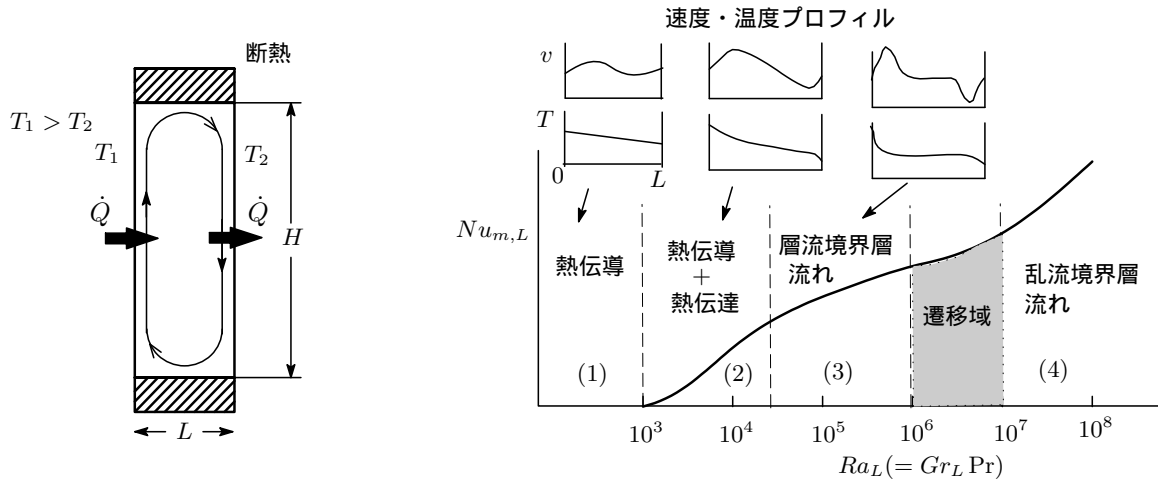


図 6: 縦長密閉空間内の自然対流 / 自然対流の様相に及ぼすレイリー数の影響

実験式

縦に長い密閉空間内の自然対流熱伝達については，アスペクト比やレイリー数の範囲に応じて次の経験式¹⁰が知られています。

$$Nu_{m,L} = 0.22 \left(\frac{Pr}{0.2 + Pr} Ra_L \right)^{0.28} \left(\frac{H}{L} \right)^{-1/4} : (2 < H/L < 10, Pr < 10^5, 10^3 < Ra_L < 10^{10})$$

$$Nu_{m,L} = 0.18 \left(\frac{Pr}{0.2 + Pr} Ra_L \right)^{0.29} : (1 < H/L < 2, 10^{-3} < Pr < 10^5, Ra_L Pr / (0.2 + Pr) > 10^3)$$
(3.3)

3 - 2 . 水平方向に長い密閉空間

水平方向に幅広い密閉空間内の伝熱は，高温面が (a) 上にある場合と (b) 下側にある場合の 2 つに分けられます。上下対向面間の距離を L とします。

(a) 高温面が上側の場合：加熱されて密度が小さい流体は密度の大きな重い流体の上側に存在するため，流体層は安定で何らの流れも生じないので $Nu_{m,L} \approx 1$ 。伝熱は熱伝導のみによります。

(b) 高温面が下側の場合：この場合は，レイリー数

$$Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} \quad (3.4)$$

の値が約 1710 より小さいときは，浮力は粘性抵抗に打ち勝てずに流体の流動は生じず，伝熱は熱伝導のみによります。ヌセルト数は $Nu_{m,L} \approx 1$ 。一方， $Ra_L > 1710$ になると対流が発生しはじめ，概ね $1710 < Ra_L < 5 \times 10^4$ の範囲において，上昇流部と下降流部からなる規則正しく並んだ 6

¹⁰Catton,L, "Natural Convection in Enclosures", Proc.6th Int.Heat Transfer Conf., Toronto, Canada, Vol6(1978)

角形のセル,いわゆるベナールのセル (Bernard cell)¹¹が形成されます。そして, $Ra_L > 5 \times 10^5$ になるとセル状の流動は破壊され乱流に遷移します。

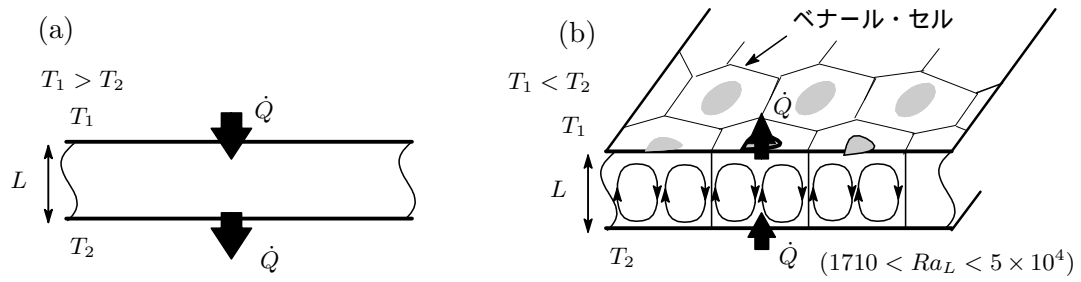


図 7: 水平方向に長い密閉空間の自然対流

¹¹フランスの物理学者アンリ・ベナールの熱対流実験で発見 (1900 年) された。

参考文献

- [1] 望月貞成，村田章「伝熱工学の基礎」日進出版森北出版，2015
- [2] 杉山均・佐野正利・永橋優純・加藤直人「はじめて学ぶ移動現象論」森北出版，2014
- [3] 平田哲夫・田中誠・石川正昭・羽田喜昭「例題でわかる伝熱工学」森北出版，2007

本レポートに掲載した例題は主にこれらの参考図書から引用させていただきました。