B. 単純ばり

●任意の１点に集中荷重がかかるケース

- K氏：第１話で片持ちばりの反力と断面力の計算のやり方を見てきた。第２話では単純ばりラーメンを取り上げよう。まず単純ばりから。
- コニー：単純ばりは第１話で仮想切断を考察したときに登場したわね。
- K氏：うん，２つの支点で支えられ一端がピン支点，もう一端がローラ支点のはりのことだね。第１話で説明したように，ピン支点は水平反力と鉛直力反力の２つ，ローラー支点の方は鉛直反力だけが生じる。ではさっそく次のような単純ばりのケースを考えていこう。

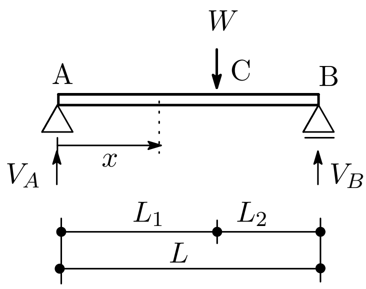


図 2.1: 単純梁

（1）反力　力のつり合いの式から

$$\sum Y = -W + V_A + V_B = 0 \qquad \therefore\ V_A + V_B = W$$

A点回りのモーメントのつり合いを考えると

$$\sum M = L_1 \times W - L \times V_B = 0 \qquad \therefore\ V_B = \frac{L_1}{L}W$$

したがって $V_A = \dfrac{L_2}{L}W$ と求められる。

（2）断面力

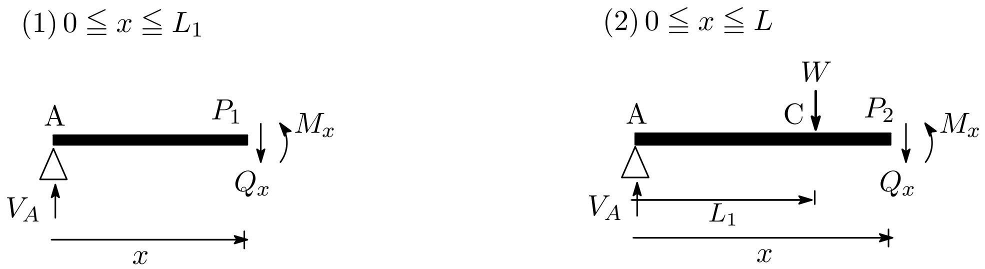


図 2.2: 単純ばりの断面力を求める

(1) AC間の任意の位置 P_1 で仮想切断し，力のつり合いから

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = V_A = \frac{L_2}{L}W$$

点 P_1 まわりのモーメントのつり合いから

$$\sum M = x \times V_A - M_x = 0 \qquad \therefore\ M_x = xV_A = \frac{L_2}{L}Wx$$

(2) CB の任意の位置 P_2 で仮想切断し，力のつり合いから

$$\sum Y = V_A - W - Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = V_A - W = -V_B = -\frac{L_1}{L}W$$

点 P_2 まわりのモーメントのつり合いから

$$\sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W - M_x = 0 \qquad \therefore\ M_x = \frac{L_1 W}{L}(L - x)$$

以上の結果をまとめておくと

・反力　：　$V_A = \dfrac{L_2}{L}W,$　　$V_B = \dfrac{L_1}{L}W$

・せん断力　：　$Q_{AC} = \dfrac{L_2}{L}W,$　　$Q_{CB} = -\dfrac{L_1}{L}W$

・曲げモーメント　：　$M_{AC} = \dfrac{L_2}{L}Wx,$　　$M_{CA} = \dfrac{L_1}{L}W(L - x)$

（最大値/$x = L_1$）　：　$M_{max} = \dfrac{L_1 L_2}{L}W = L_1 V_A = L_2 V_B$

$W = 30$kN，$L = 5$m，$L_1 = 3$m，$L_2 = 2$m とした場合，$V_A = 12$ kN，$V_B = 18$ kN，$M_{max} = 36$ kNm で Q 図，M 図は次の通りだ。

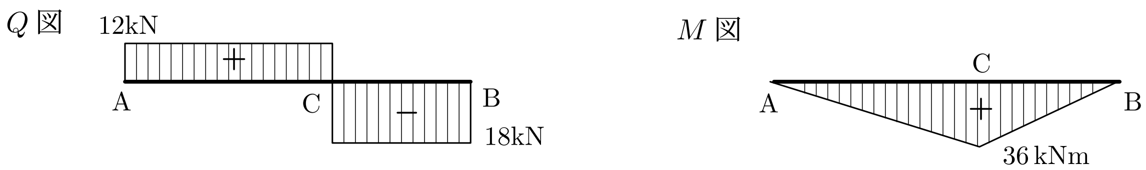


図 2.3: 単純梁の Q 図・M 図

●２点に荷重がかかるケース

- K 氏：次は 2 点に荷重がかかる場合を取り上げよう。

  (1) 反力 力のつり合いの式から

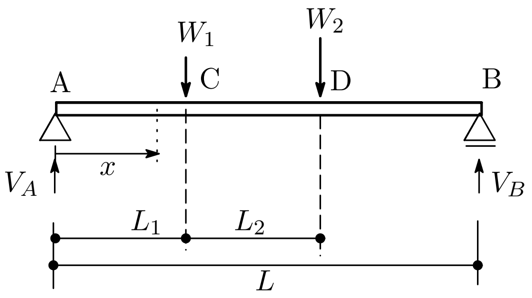
$$\sum Y = -W_1 - W_2 + V_A + V_B = 0 \qquad \therefore\ V_A + V_B = W_1 + W_2$$

A 点回りのモーメントのつり合いを考えると

$$\sum M = L_1 \times W + (L_1 + L_2) \times W_2 - L \times V_B = 0 \qquad \therefore\ V_B = \frac{L_1 W_1 + (L_1 + L_2)W_2}{L}$$

これから

$$V_A = W_1 + W_2 - \frac{L_1 W_1 + (L_1 + L_2)W_2}{L}$$



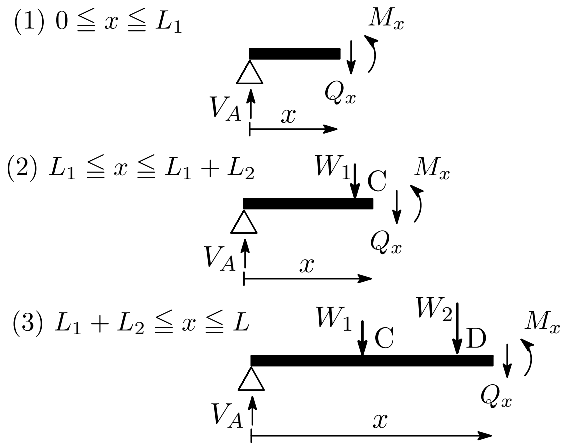


図 2.4: 単純梁・２点荷重

（2）断面力　次の３つの領域に分けて考える。

(1) $0 \leqq x \leqq L_1$

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0, \qquad \therefore\ Q_x = V_A$$

$$\sum M = x \times V_A - M_x = 0, \qquad \therefore\ M_x = xV_A \begin{cases} M_A = 0 \\ M_C = L_1 V_A \end{cases}$$

(2) $L_1 \leqq x \leqq L_1 + L_2$

$$\sum Y = V_A - W_1 - Q_x = 0, \qquad \therefore\ Q_x = V_A - W_1$$

$$\sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W_1 - M_x = 0,$$

$$\therefore\ M_x = (V_A - W_1)x + L_1 W_1 \begin{cases} M_C = L_1 V_A \\ M_D = L_1 V_A + L_2(V_A - W_1) \end{cases}$$

(3) $L_1 + L_2 \leqq x \leqq L$

$$\sum Y = V_A - W_1 - W_2 - Q_x = 0, \qquad \therefore\ Q_x = V_A - (W_1 + W_2)$$

$$\sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W_1 - (x - L_1 - L_2) \times W_2 - M_x = 0,$$

$$\therefore\ M_x = (V_A - W_1 - W_2)x + L_1(W_1 + W_2) + L_2 W_2$$

$$\begin{cases} M_D = L_1 V_A + L_2(V_A - W_1) \\ M_B = L(V_A - W_1 - W_2) + L_1(W_1 + W_2) + L_2 W_2) \end{cases}$$

具体的に $L = 4\mathrm{m}$, $L_1 = 1\mathrm{m}$, $L_2 = 1\mathrm{m}$, $W_1 = 10\mathrm{kN}$, $W_2 = 15\mathrm{kN}$ とした場合, $V_A = 15\,\mathrm{kN}, V_B = 10\,\mathrm{kN}$, $M_C = 15\,\mathrm{kNm}$, $M_D = 20\,\mathrm{kNm}$ となり, Q 図, M 図は次の通りだ。

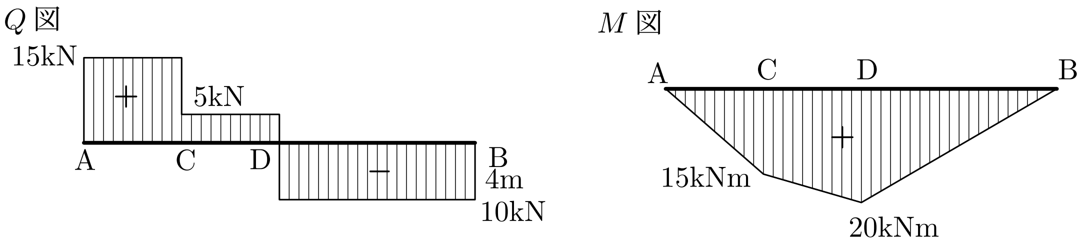


図 2.5: 単純梁・２点荷重の Q 図・M 図

■ Q，M 図を図解で求める

（1）Q 図

- K ところで上の Q 図をよく見ると何か簡単なルールのようなものが見えてこないかい？
- コニー：そうねぇ。。。アッ！簡単な関係があるじゃないの。左側から考えていくと図で示すような関係があるわね。

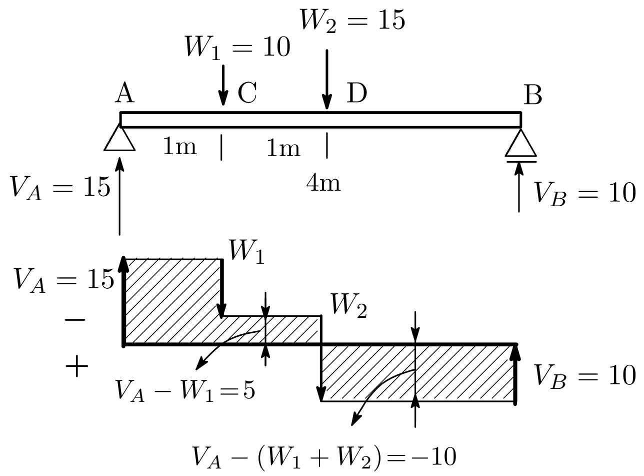


図 2.6: 単純梁のせん断力と荷重の関係

- K 氏：そうなんだ。このからくりを知っておくと，反力さえを求めておけば Q 図は即座に描けることになる。例えば次のような３点荷重の単純ばりの Q 図は即座に描けるね。

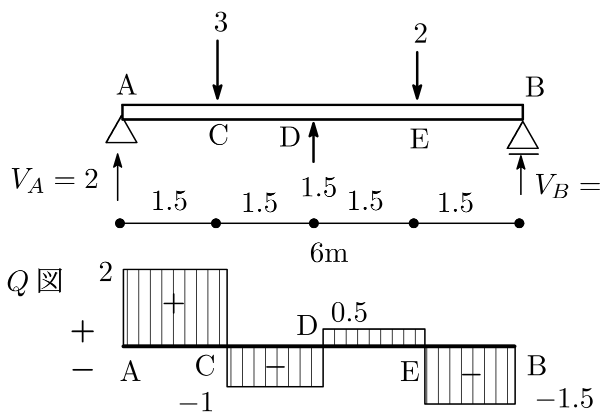


図 2.7: 単純梁・３点荷重の Q 図

- コニー：なるほど。それでは例えば次のような均一な分布荷重の場合はどうかしら。

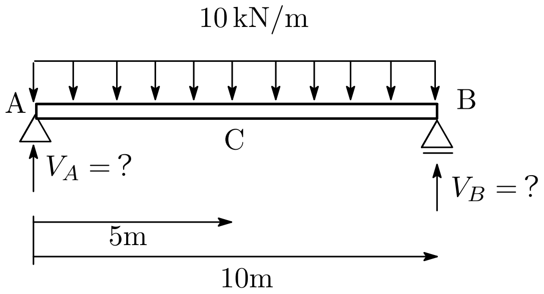


図 2.8: 単純梁・等分布荷重

- K 氏：まず，正攻法（？）でやろう。計算はいままで何度もしてきたから簡単に済ますとして，まず反力を求める。力のつり合いから

$$\sum Y = V_A + V_B - 10 \times 10 = 0, \quad \sum M = 5 \times V_A - 5 \times V_B = 0 \quad \therefore\ V_A = 50, V_B = 50$$

次に，A 端から距離 x の位置で仮想切断し，力のつり合いの式を立てて断面力を求める。

$$\sum Y = 50 - 10x - Q_x = 0, \quad \sum M = x \times 50 - (x/2) \times 10x - M_x = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 10)$$
$$\therefore\ Q_x = -10x + 50, \quad M_x = -5x^2 + 50x$$

したがって，Q 図，M 図は次のようになる。

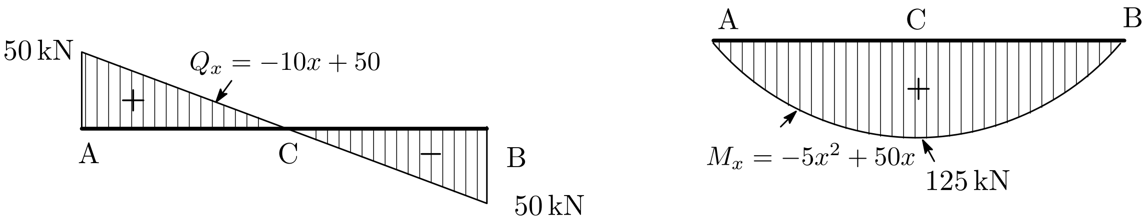


図 2.9: 単純梁・等分布荷重の Q 図・M 図

さて，図解でやろう。まず，A 端に反力 V_A のベクトルを描く。そのベクトルを B 端にまで移動し，今度はそのベクトルの終点から分布荷重の総荷重 100 kN の鉛直下方に向けたベクトルを描く。次に双方のベクトルの終点と終点を結ぶ。あとは正負の符号を書き込んでできあがり。

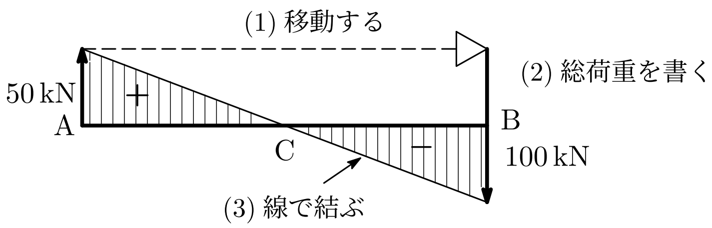


図 2.10: Q 図の描き方

簡単だろう。このやり方は，第 1 話でやった片持ちばりにも適用できるので是非やってみてほしい。

- コニー：わかりました，確認しておきます。ところで，M 図はどうなるのから？

- K 氏：そうきたか。じゃ次に M の描き方を説明しよう。

（2）M 図

- K 氏：さて，第 1 話ででてきた曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x の関係式 (??) を x で積分すると

$$M_x = \int Q_x dx \tag{2.1}$$

これは，曲げモーメントの値は Q 図の面積に等しいことを意味している。この関係を利用すれば M 図が簡単に描ける。例えば図 2.4 の M 図は 3 ステップで描ける。各積分値をプロットしてあとは直線で結べば出来上がりという訳だね。

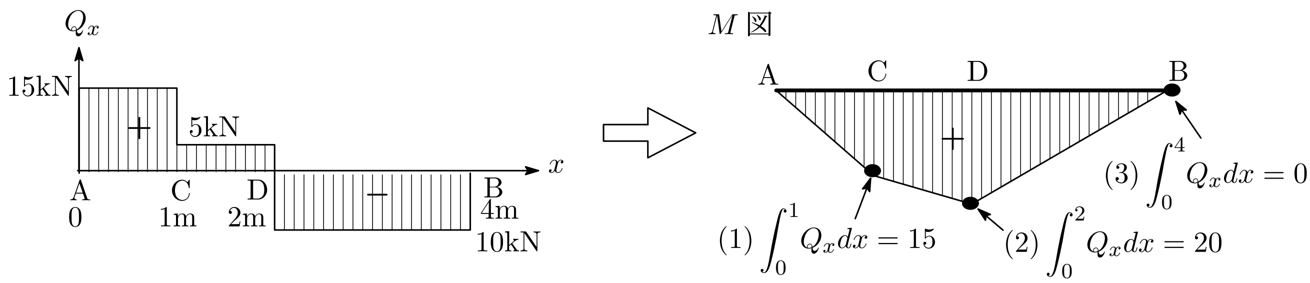


図 2.11: 単純梁・2 点荷重の M 図の描き方

- コニー：なるほど，簡単ね！図 2.7 のケースだったら次のようになるわね。

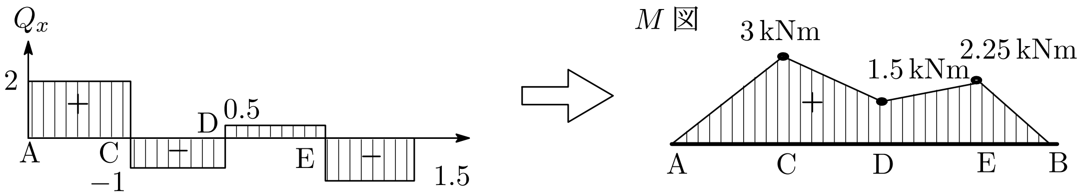


図 2.12: 単純梁・3 点荷重の M 図を描く

- K 氏：そうだね。等分布荷重の場合も全く同じ要領だ。M 図は 2 次曲線になることに注意をすればいい。図 2.9 を取り上げると次のようになるだろう。

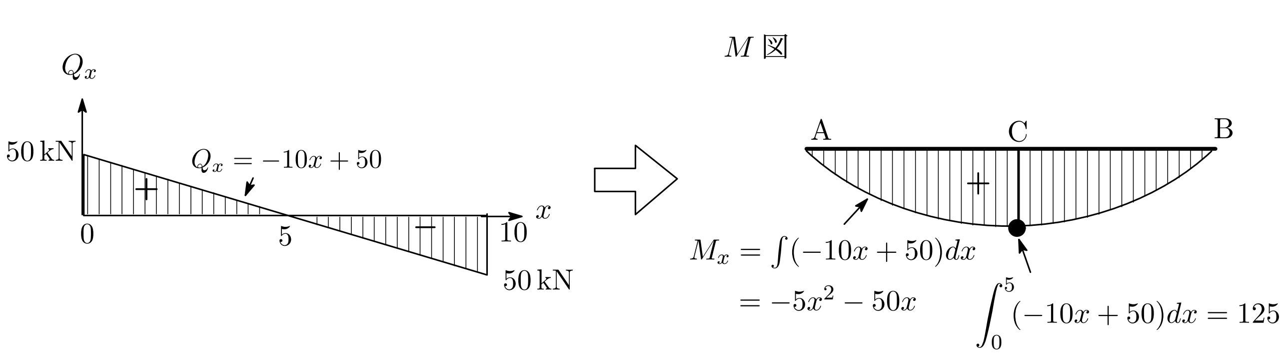


図 2.13: 単純梁・均一荷重の M 図を描く

- コニー：Q 図が描ければ M 図はモーメント計算をしなくても簡単に描けるわけね。

- K 氏：そうだね。いろいろなケースに適用してみてごらん。少し疲れてきたので第 2 話はここらあたりで終了するとして，第 3 話はラーメンを取り上げよう。
- コニー：ラーメンといわれて急にお腹がすいてきたわ。ラーメンを食べに行かない，ご馳走しますから。
- K 氏：それはありがたいね。ごちそうになるよ。

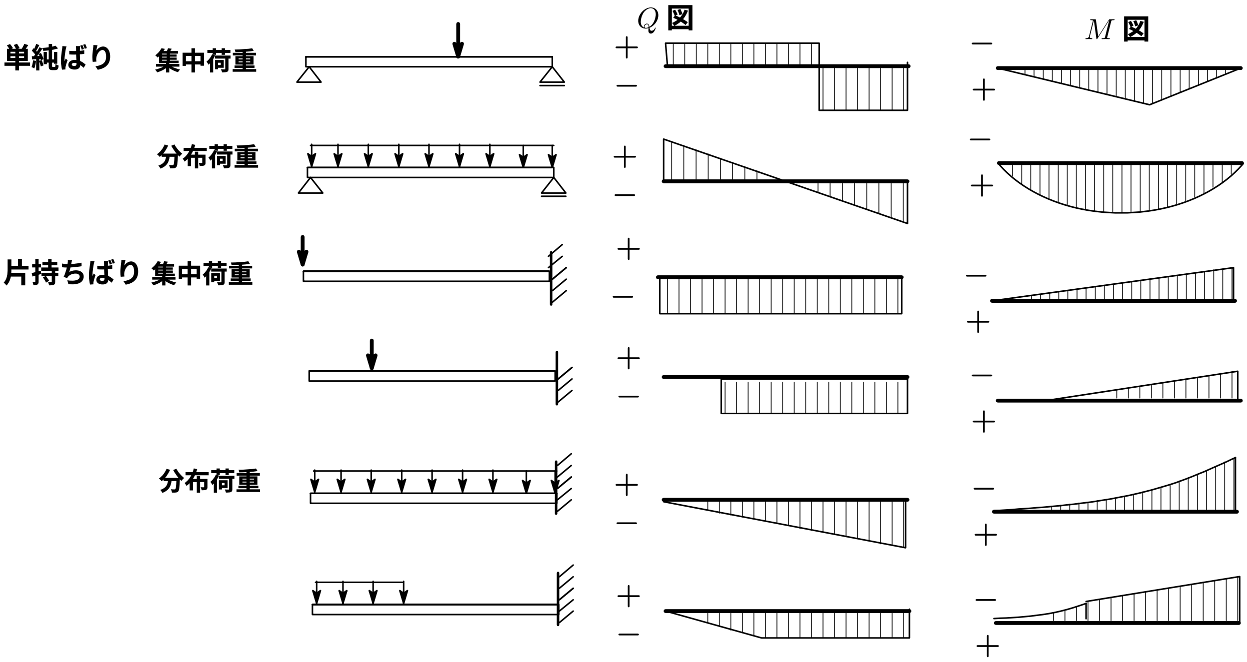


図 2.14: 代表的な梁と Q 図・M 図の形