第 3 話. 平面構造物のつり合い（3）

C. 静定ラーメン

●静定ラーメンの種類

- K 氏：静定ラーメンには大きく分けて「片持ちばり系」「単純ばり系」「3 ヒンジ系」の 3 種類がある。それぞれの特徴は，片持ちばり系は支点が固定支点，単純ばり系は片側の支点がピン支点

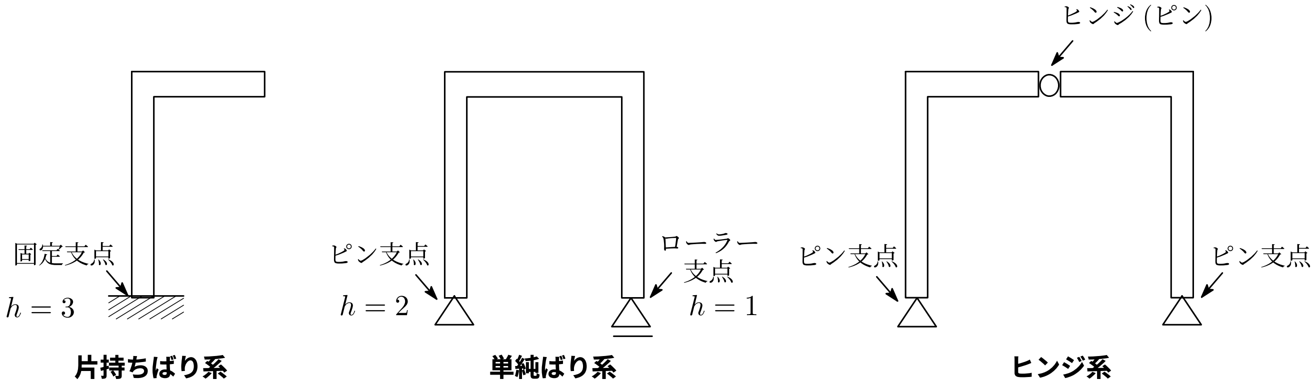


図 3.1: 静定ラーメンの種類

  でもう片方がローラー支点。スリーヒンジ系は支点が 2 か所ともピン支点で，部材中のどこかにヒンジ（ピン）があるラーメン構造となっている。部材と部材の結合部（節点）は互いに回転できずに剛に接合されているため大きな力が加わるね。
- コニー：単純ばり系ラーメンはピン支点とローラー支点になっているけど，両方ともピン支点というのはないの？
- K 氏：鋭い指摘だね。例えば両方ともピン支点となると未知数である反力の合計は 4 つになるだろう。一方，力のつり合いの式は 3 つで 1 つ不足する。つまり，力のつり合いの式だけでは求められず，もう一つの式が必要になるわけだね。このようなのを**不静定構造物**といっている。ここでは力のつり合いだけで解ける静定構造物を考える。
- コニー：ヒンジ系はピン支点が 2 つあるわね。反力の未知数は 4 個になるけど？
- K 氏：うん，そうだね。ただ，ピン節点は回転が自由で，その点での曲げモーメントは 0 となる。この条件を力のつり合いの 3 つの方程式に加えると合計 4 個の方程式となるね。これでバランスがとれた。ということで 3 ヒンジ系ラーメンの場合，両支点がピンの場合でも静定構造物として扱うことができるというわけだね。具体的な計算は追々やっていくとして，まず単純ばり系からみていこう。

C－1．単純ばり系：鉛直荷重

- K 氏：鉛直荷重のみが作用する単純ばり系ラーメンの反力と断面力を求めよう。

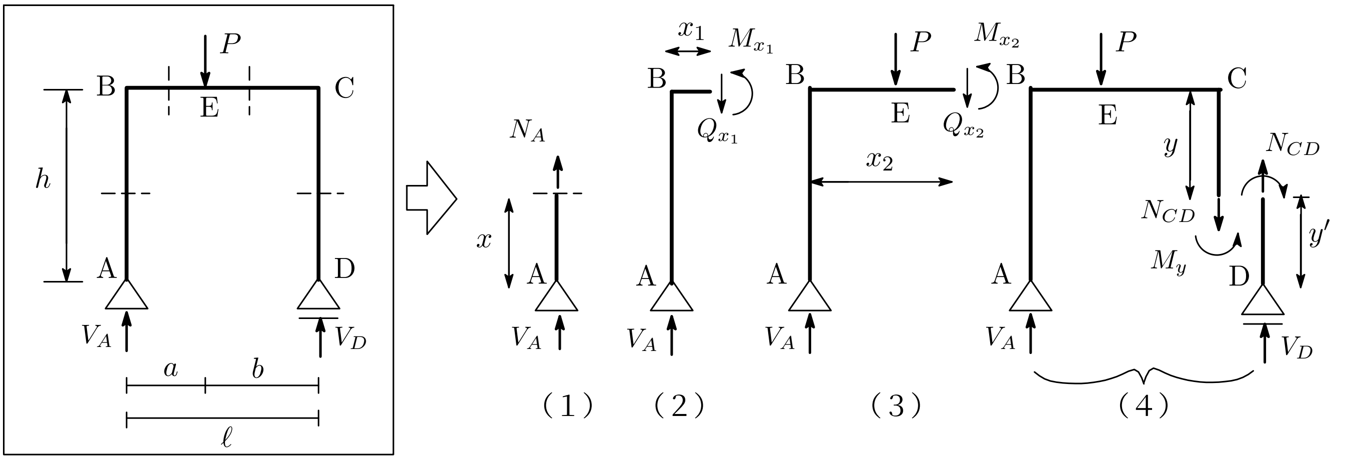


図 3.2: 単純ばり系ラーメン：鉛直力が作用

●反力：ます反力から求めていこう。支点 A はピン支点なので水平（H_A) と鉛直反力（V_A）の 2 つ，支点 B はローラー支点なので鉛直反力（V_B）が 1 つで合計 3 つに反力が生じる。

$$\sum X = H_A = 0 \qquad \therefore\ H_A = 0$$
$$\sum M = a \times P - \ell \times V_D = 0 \qquad \therefore\ V_D = \frac{Pa}{\ell}$$
$$\sum Y = V_A + V_D - P = 0 \qquad \therefore\ V_A = \frac{Pb}{\ell}$$

●断面力： 断面力を求める点で仮想切断し，計算しやすい側で計算して断面力を求める。断面力は 1 対の力なので片方が分かればいいわけだね。

- コニー：了解。ところで，Q や M の矢印の向きはどのようにして決めるの。これさえはっきりすればあとは力のつり合いの式から計算できるわね。
- K 氏：そうだね。ラーメンの場合，視点を内側において A，B，C，D のそれぞれを起点とした場合の断面力 Q, M, N の矢印は図 3.3 に示す通りとなる。だからどちら側から計算しようとし

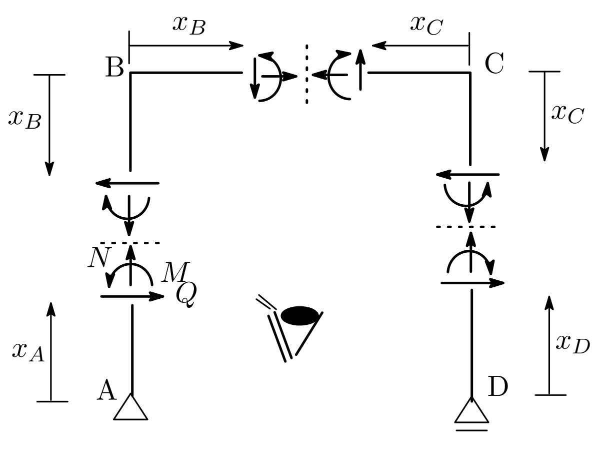


図 3.3: ラーメンの断面力の設定

ているのか，その点をハッキリしないと混迷することになってしまう。。。ということを頭に入れて，断面力を計算していこう。

（1） AB の間の任意の位置 $x\,(0 \leqq x \leqq h)$ で仮想切断する。この位置に作用する力は支点 A から鉛直上方に働く反力 V_A だけで，これは圧縮力 N_{AB} として作用することに注意しよう。力のつり合いの式より

$$\sum Y = V_A + N_{AB} = 0 \qquad \therefore\ N_{AB} = -\frac{Pb}{\ell}$$
$$Q_{AB} = 0, \qquad M_{AB} = 0$$

（2） 区間 BE の任意の位置 $x_1\,(0 \leqq x \leqq a)$ で仮想切断する。作用する外力は V_A のみ。

$$\sum Y = V_A - Q_{x_1} = 0 \qquad \therefore\ Q_{x_1} = \frac{Pb}{\ell}$$
$$\sum M = -M_{x_1} + x_1 \times V_A = 0 \qquad \therefore\ M_{x_1} = \frac{Pb}{\ell}x_1$$
$$N_{x_1} = 0$$

（3） 区間 EC の任意の位置 $x_2\,(a \leqq x_2 \leqq \ell)$ で仮想切断する。作用する外力は V_A と P。

$$\sum Y = V_A - Q_{x_2} - P = 0 \qquad \therefore\ Q_{x_2} = -\frac{Pa}{\ell}$$
$$\sum M = -M_{x_2} + x_2 \times V_A - (x_2 - a) \times P = 0 \qquad \therefore\ M_{x_2} = P\left\{\frac{b}{\ell}x_2 - (x_2 - a)\right\}$$
$$N_{x_2} = 0$$

（4） 区間 CD の任意の位置 $y\,(0 \leqq y \leqq h)$ で仮想切断する。左側部で計算してもよいが，この場合，右側部での計算の方が簡単に済む。

$$\sum Y = V_B + N_{CD} = 0 \qquad \therefore\ N_{CD} = -\frac{Pa}{\ell}$$
$$M_{CD} = 0, \quad Q_{CD} = 0$$

左側部から計算してみるかい。

コニー：わかったわ。 せん断応力は働かないので $Q_{CD} = 0$。鉛直方向のつり合いから

$$\sum Y = V_A - P - N_{CD} = 0 \qquad N_{CD} = V_A - P = -\frac{Pa}{\ell}$$

C 点回りのモーメントのつり合いから

$$\sum M = \ell \times V_A - b \times P - M_{CD} = 0 \qquad \therefore M_{CD} = 0$$

- K 氏：得られた結果をまとめておくと次のようになるね。

	せん断力	曲げモーメント	軸方向力
区間 AB	$Q_{AB} = 0$	$M_{AB} = 0$	$N_{AB} = -Pb/\ell$
区間 BE	$Q_{x_1} = Pb/\ell$	$M_{x_1} = (Pb/\ell)x_1$	$N_{x_1} = 0$
区間 EC	$Q_{x_2} = -Pa/\ell$	$M_{x_2} = \{(b/\ell)x_2 - (x_2 - a)\}P$	$N_{x_2} = 0$
区間 CD	$Q_{CD} = 0$	$M_{CD} = 0$	$N_{CD} = -Pa/\ell$

これから Q, M, N 図は次のようになる。なお，正負の符号は図を参照。

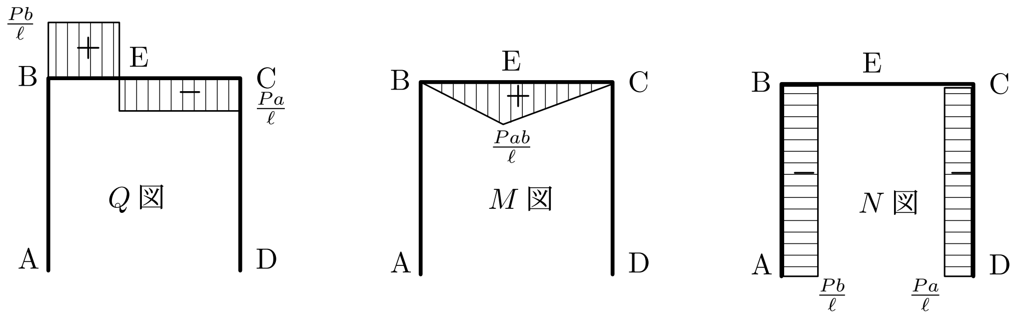


図 3.4: ラーメンの Q, M, N 図（鉛直荷重）

C－2．単純ばり系：水平力が作用

- K 氏：水平力 P が作用する単純ばり系ラーメンの反力と断面力を求めよう。

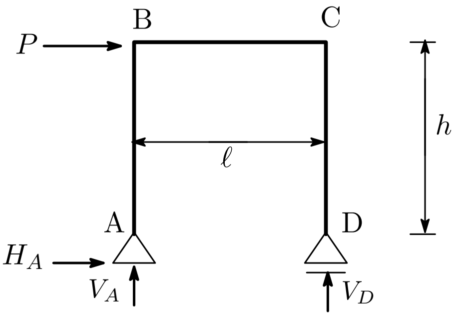


図 3.5: 単純ばり系ラーメン：水平力が作用

●反力： D のローラー支点は拘束度が 1 で鉛直方向の反力しか生じないことに注意しよう。ピン支点 A の水平反力を H_A とすると，力のつり合いの式より

$$\sum X = P + H_A = 0 \qquad \therefore\ H_A = -P$$
$$\sum Y = V_A + V_D = 0 \qquad \therefore\ V_A = -V_D$$
$$\sum M = h \times P - \ell \times V_D = 0 \qquad \therefore\ V_A = -Ph/\ell,\, V_D = Ph/\ell$$

●断面力： 図のように仮想切断して各位置での断面力を求める。（1）,（2）,（3）のように仮想切断し片側で計算する。

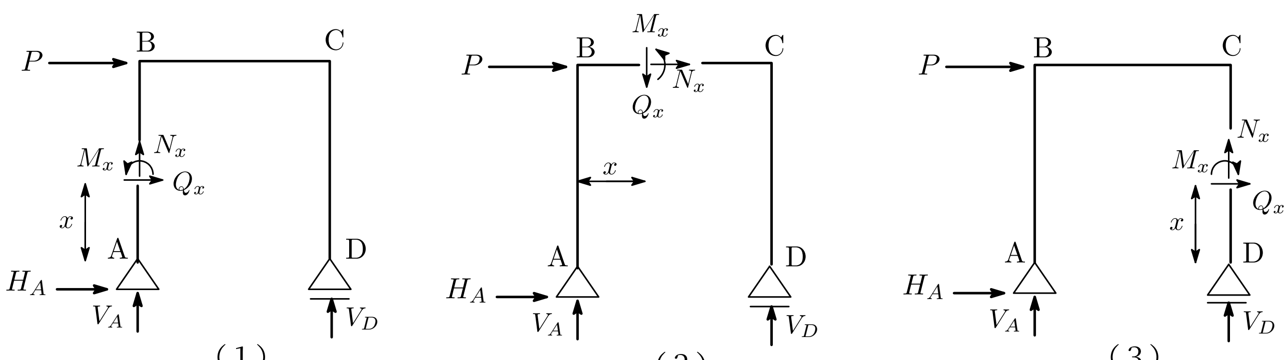


図 3.6: 断面力を求める

（1） $0 \leqq x \leqq h$

$$\sum X = H_A + Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = -H_A = P$$
$$\sum Y = V_A + N_x = 0 \qquad \therefore\ N_x = -V_A = P$$
$$\sum M = -x \times H_A - M_x = 0 \qquad \therefore\ M_x = -H_A x = Px$$

（2） $0 \leqq x \leqq \ell$

$$\sum X = H_A + P + N_x = 0, \quad \sum Y = V_A - Q_x = 0, \quad \sum M = -h \times H_A + x \times V_A - M_x$$
$$\therefore \quad Q_x = -P, \quad M_x = P(h - x), \qquad N_x = 0$$

（3） $0 \leqq x \leqq h$

$$\sum X = Q_x = 0, \quad \sum Y = V_D + N_x = 0, \therefore\ N_x = -P, \quad \sum M = M_x = 0$$

Q, M, N 図は次の通り。

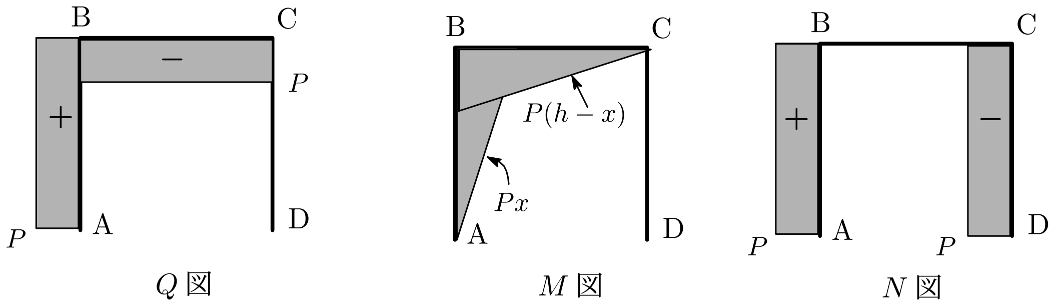


図 3.7: ラーメンの Q, M, N 図（水平荷重）

C－3．片持ちばり系ラーメン

- K 氏：自由端 A に P の鉛直荷重が作用する次の片持ちばり系ラーメンの断面力を計算しよう。断面力は AB，BC，CD の各区間ごとに仮想切断し，自由端側で計算する。こうすることで反力を求める必要がないというメリットがある。

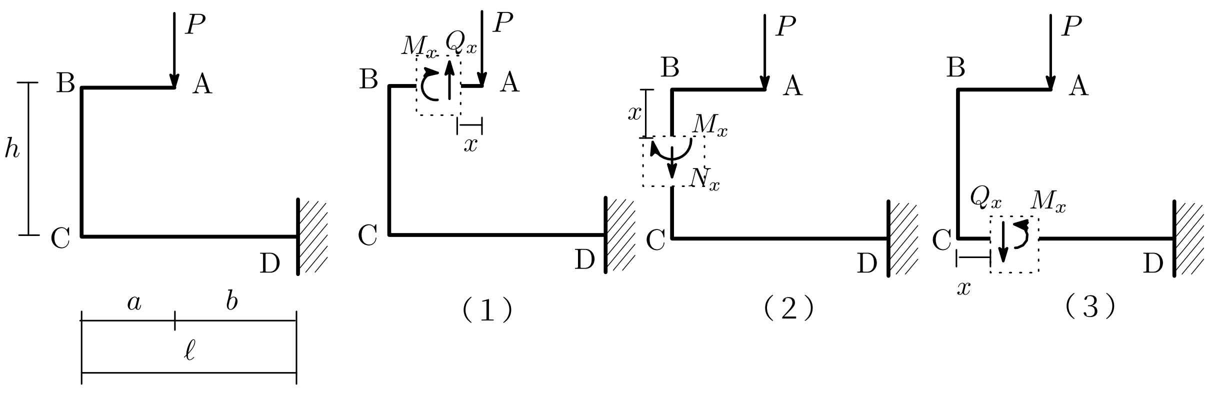


図 3.8: 片持ち梁系ラーメン

(1) 自由端側に水平荷重はないので軸方向力は $N_x = 0$。

$$\sum Y = -P + Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = P$$

$$\sum M = x \times P + M_x = 0 \qquad \therefore\ M_x = -Px \begin{cases} M_A = 0 \\ M_B = -Pa \end{cases}$$

(2) 自由端側に水平荷重はないのでせん断力は $Q_x = 0$。

$$\sum Y = -P - N_x = 0 \qquad \therefore\ N_x = -P$$

$$\sum M = a \times P + M_x = 0 \qquad \therefore\ M_x = -Pa$$

(3) 自由端側に水平荷重はないので軸方向力は $N_x = 0$。

$$\sum Y = -P - Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = -P$$

$$\sum M = (a - x) \times P - M_x = 0 \qquad \therefore\ M_x = P(a - x) \begin{cases} M_C = Pa \\ M_D = P(a - \ell) = -Pb \end{cases}$$

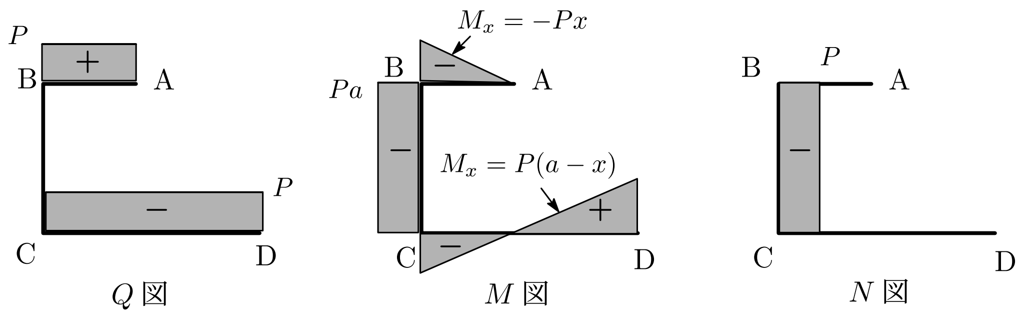
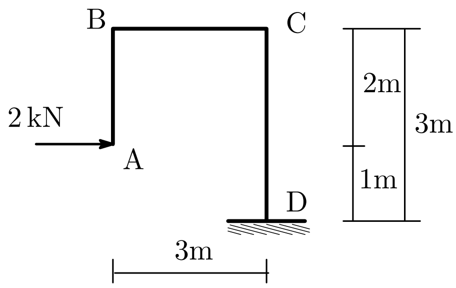


図 3.9: 片持ち梁ラーメンの Q, M, N 図（水平荷重）

- K それじゃ次の片持ちばり系ラーメンの断面力を計算してごらん。

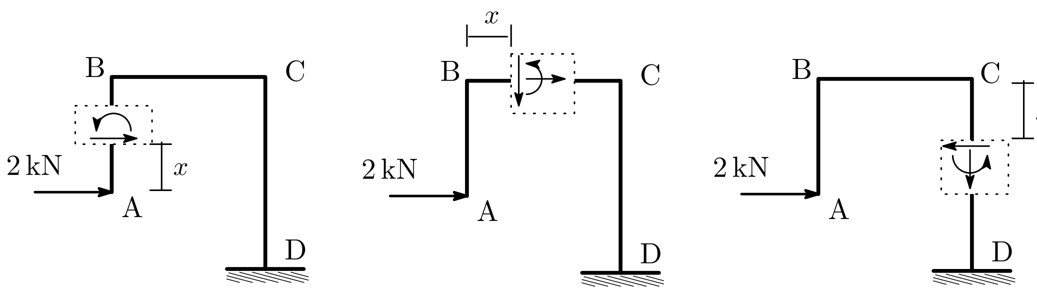


- コニー：わかったわ。自由端側から計算するんだわね。A 点，B 点，C 点を起点として断面力を求める位置を x とする。

(1) 鉛直力はないので $N_x = 0$。

$$\sum X = 2 + Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = -2$$

$$\sum M = -x \times 2 - Mx = 0 \qquad \therefore\ M_x = -2x \begin{cases} M_A = 0 \\ M_B = -4 \end{cases}$$



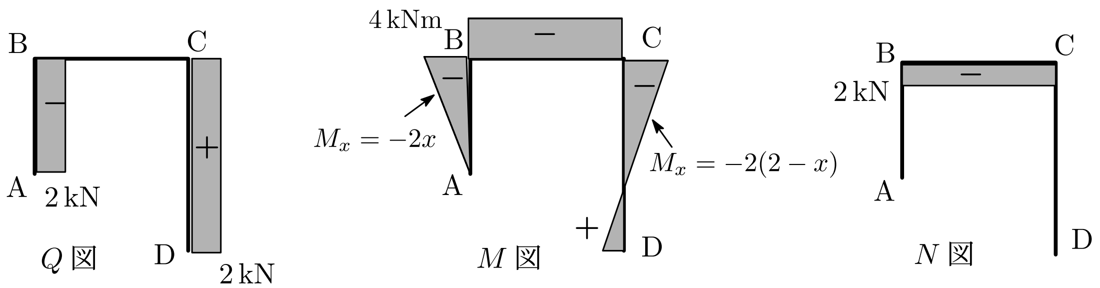
（1）　　　　（2）　　　　（3）

（2）鉛直力はないので $Q_x = 0$。

$$\sum X = 2 + N_x = 0 \qquad \therefore\ N_x = -2$$
$$\sum M = -2 \times 2 - Mx = 0 \qquad \therefore\ M_x = -4$$

（3）鉛直力はないので $N_x = 0$。

$$\sum X = 2 - Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = 2$$
$$\sum M = -(2 - x) \times 2 - Mx = 0 \qquad \therefore\ M_x = -2(2 - x) \begin{cases} M_C = -4 \\ M_D = 2 \end{cases}$$



C − 4．ヒンジ系

- K 氏：図 3.10 のスリーヒンジラーメンの反力と断面力を求めていこう。支点 A，F はピン支点なので水平と鉛直の 2 つの反力を生じ，反力の未知数は合計 4 個となる。

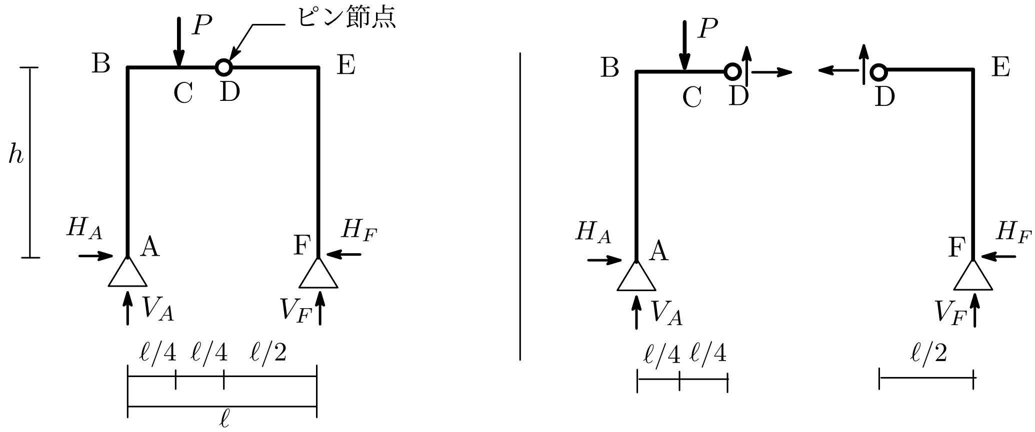


図 3.10: 3 ヒンジラーメン

ところで，ピン節点の位置での曲げモーメントはゼロ（$M_D = 0$）となるので，ピンより左または右のつり合いの式を考えれば，合計 4 個の連立方程式となる。具体的にやってみよう。

●反力： 力のつり合いの式より

$$\begin{cases} \sum X = H_A - H_F = 0 \qquad \therefore\ H_A = H_F \\ \sum Y = V_A + V_F - P = 0 \qquad \therefore\ V_A + V_F = P \\ \sum M_A = \ell/4 \times P - \ell \times V_F = 0 \qquad \therefore\ V_F = P/4,\ V_A = 3P/4 \end{cases}$$

未知数が 4 個で方程式が 3 個なので水平反力 H_A, H_B が未定のまま。そこで D 点での曲げモーメントが 0 という条件を使う。ピン節点 D で分割して左側の D 点回りのモーメントのつり合いを考える（もちろん右側で考えてもいっこうに構わない）。

$$\sum M_D = \ell/2 \times V_A - h \times H_A - \ell/4 \times P = 0 \qquad \therefore\ H_A = \ell P/8h$$

ということですべての反力が求められる。

$$V_A = 3P/4, \quad V_F = P/4, \quad H_A = P\ell/8h, \quad H_F = P\ell/8h$$

●断面力： 何度もやってきたように，断面力は求める位置で仮想切断して力のつり合いから求めればいいんだね。コニーやってみるかい。

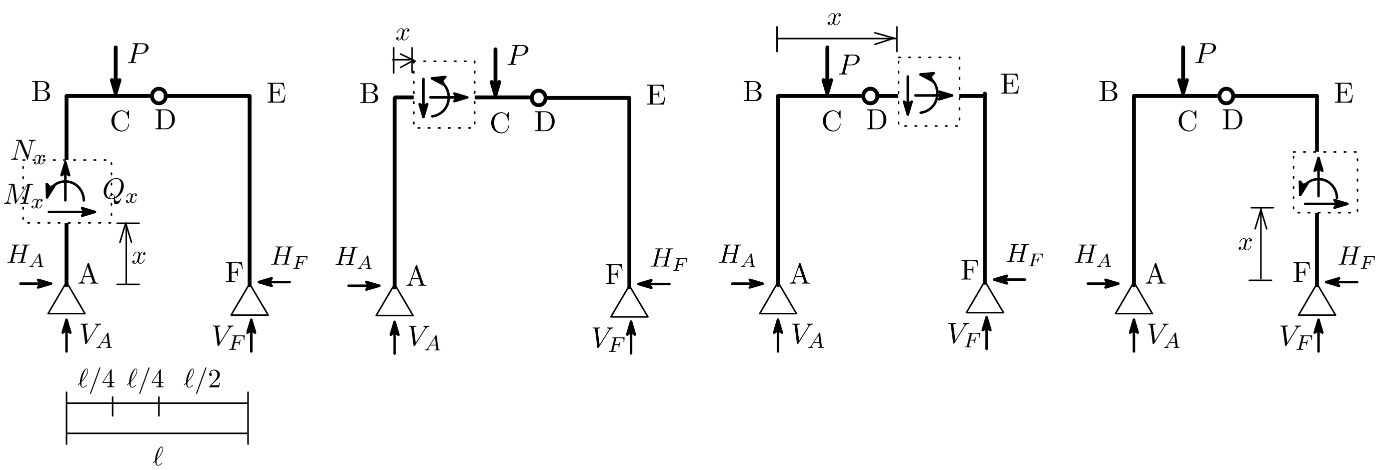


図 3.11: 3 ヒンジラーメンの断面力を求める

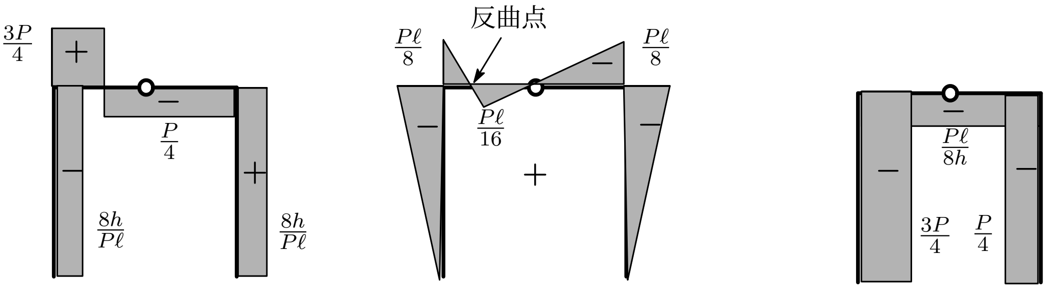
- コニー：了解。

$$\text{AB 間} \begin{cases} \sum X = H_A + Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = -H_A = -\dfrac{P\ell}{8h} \\ \sum Y = V_A + N_x = 0 \qquad \therefore\ N_x = -V_A = -\dfrac{3P}{4} \\ \sum M_x = -x \times H_A - M_x = 0 \qquad \therefore\ M_x = -H_A x = -\dfrac{P\ell}{8h}x,\ M_B = -\dfrac{P\ell}{8} \end{cases}$$

$$
\text{BC 間}\begin{cases}
\sum X = H_A + N_x = 0 \qquad \therefore\ N_x = -H_A = -\dfrac{P\ell}{8h} \\
\sum Y = V_A - Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = V_A = \dfrac{3P}{4} \\
\sum M_x = -h \times H_A + x \times V_A - M_x = 0 \\
\qquad \therefore\ M_x = -H_A h + V_A x = -\dfrac{P\ell}{8} + \dfrac{3P}{4}x,\ M_C = \dfrac{P\ell}{16} \\
\qquad x = \ell/6\ \text{で}\ M_x = 0\ \text{(反曲点) となる。}
\end{cases}
$$

$$
\text{DE 間}\begin{cases}
\sum X = H_A + N_x = 0 \qquad \therefore\ N_x = -H_A = -\dfrac{P\ell}{8h} \\
\sum Y = V_A - P - Q_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = V_A - P = -\dfrac{P}{4} \\
\sum M_x = -h \times H_A + x \times V_A - (x - \ell/4) \times P - M_x = 0 \\
\qquad \therefore\ M_x = -H_A h + V_A x = \dfrac{P\ell}{8} - \dfrac{P}{4}x,\ M_D = 0,\ M_E = -\dfrac{P\ell}{8}
\end{cases}
$$

$$
\text{FE 間}\begin{cases}
\sum X = Q_x - H_F = 0 \qquad \therefore\ Q_x = H_F = \dfrac{P\ell}{8h} \\
\sum Y = N_x + V_F = 0 \qquad \therefore\ N_x = -V_F = -\dfrac{P}{4} \\
\sum M_x = x \times H_F - M_x = 0 \\
\qquad \therefore\ M_x = H_F x = \dfrac{P\ell}{8h}x,\ M_E = \dfrac{P\ell}{8},\ M_F = 0
\end{cases}
$$



Q 図　M 図　N 図

図 3.12: 3 ヒンジラーメン Q, M N 図

- K 氏：OK。M 図で曲げモーメントが 0 になる点があるだろう。これを**反曲点**と呼んでいる。さて，第 3 話はここらあたりで終わろう。第 4 話では**静定トラス**をザット見ていくことにする。お楽しみに。
- コニー：お疲れ様でした。第 4 話が楽しみね。それじゃまた～。