# 第 6 話.　静定構造物の変形（１）

- K 氏：いよいよ第 6 話に入ったね。これから少し数学的な取扱いがでてくるけど大したことないので気楽にお付き合いしていただければいいと思う。
- コニー：わかりました。ところで第 6 話の話題はなに？
- K 氏：うん，第 1 話から第 4 話では構造物に荷重が作用したとき，部材に生じる断面力（せん断力，曲げモーメント，軸方向力）などの求め方について説明してきた。現実の構造物は荷重の作用によってあたりまえだけど変形するよね。変形がきつくなると崩壊につながるので，荷重の作用による変形量をあらかじめ計算で求めておくことは安全上必須なことだ。第 6 話ではこの計算のやり方の基本を説明しようと思う。
- コニー：そうなんだ。できるだけわかりやすくお願いします。

## はりの変形

- K 氏：簡単な例として片持ちばりの変形をとりあげる。片持ちばりの A 点に荷重 $P$ がかかると A 点は押し下げられて斜めに傾くね。この押し下げられた量（変形量）を A 点のたわみ $\delta$ といい，傾いた角度（変形角）を A 点のたわみ角 $\theta$ という。別に A 点ははりの端とは限らない。はりの任意の位置 C 点では C 点でのたわみとたわみ角がある。たわみ $\delta$ とたわみ角 $\theta$ を計算するのがここでの仕事となる。

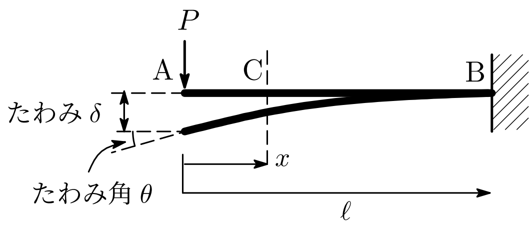


図 6.1: 片持ち梁のたわみとたわみ角

- コニー：。。。どうするのかしら？
- K 氏：うん，やり方は大体次の 3 つの方法がある

  **（1）仮想仕事法による計算法**

  **（2）たわみ曲線の微分方程式による解法**

  **（3）モールの定理により計算法**

  まず（1）の方法で計算していくことにしよう。仮想仕事というと解析力学を思いだすかもしれないが，ここでは構造力学風（？）にアレンジした計算法を紹介する。
- コニー：（2）や（3）の方法はおあずけになるのかしら？
- K 氏：そうだね，体力と気力が残っていたら取り組むこととしよう。さて，ということで，はりの内部の微小変形を考えよう。真っ直ぐなはりが下側に凸に曲がり微小要素 ABCD が A'B'C'D' に

変形したとしよう。図 6.2 を参照してほしい。はりの上側の軸方向の長さは元の長さより短くなり，下側は元の長さより長くなるね。ということは，軸方向の長さが変形前後で変わらない面が存在することになるだろう。この面のことを**中立面**と呼んでいる。図では M'N' 面が中立面だ。そして中立面と横断面の交線を**中立軸**という。さて，変形前の $\overline{\mathrm{PQ}} = dx$ が変形後 $\widehat{\mathrm{P'Q'}} = \Delta x + dx$ となったとしよう。ひずみを $\varepsilon$ とすると

$$\widehat{\mathrm{P'Q'}} = \left(1 + \frac{\Delta x}{dx}\right) dx = (1+\varepsilon)dx \tag{6.1}$$

と表せる。中立軸の曲率半径を $\rho$ とすると

$$\widehat{\mathrm{M'N'}} = dx = \rho d\theta \qquad \therefore\ d\theta = \frac{1}{\rho}dx = \kappa dx \qquad (\kappa \equiv 1/\rho\text{: 曲率}) \tag{6.2}$$

$$\widehat{\mathrm{P'Q'}} = (\rho + y)d\theta \qquad (y\text{：中立軸からの距離})$$

となるので

$$\frac{\widehat{\mathrm{P'Q'}}}{\widehat{M'N'}} = \frac{\rho + y}{\rho} = 1 + \varepsilon$$

これから

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \tag{6.3}$$

を得る。

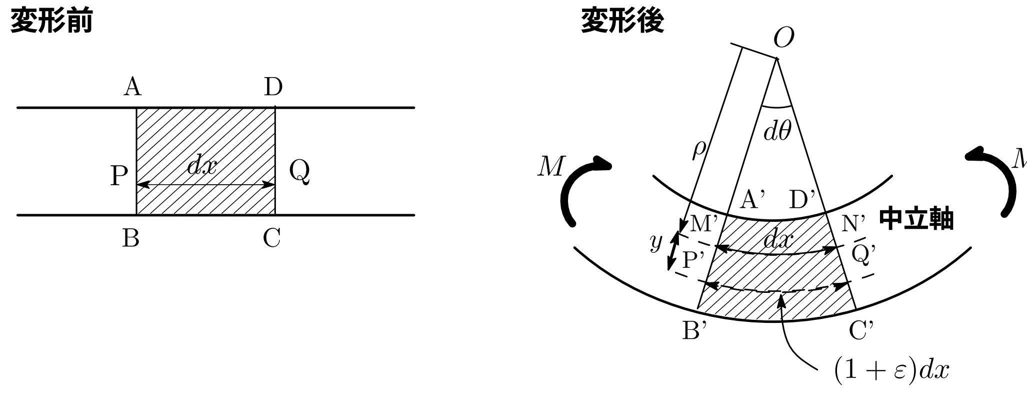


図 6.2: 梁の曲げ

垂直応力 $\sigma$ と微小ひずみ $\varepsilon$ は図 6.3 に示すようにフックの法則で結ばれていて $\sigma = E\varepsilon$ が成り立ち

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho} \tag{6.4}$$

を得る。比例常数 $E$ は**ヤング率**とか**弾性係数**と呼ばれる。$\sigma$ は中立軸から $y$ の距離に生じる応力だね。この垂直応力 $\sigma$ を**曲げ応力**といい，断面 A'B' あるいは C'D' に生じる。
また曲率と曲げモーメント $M$ の間には

$$M = \frac{EI}{\rho} = \kappa EI \tag{6.5}$$

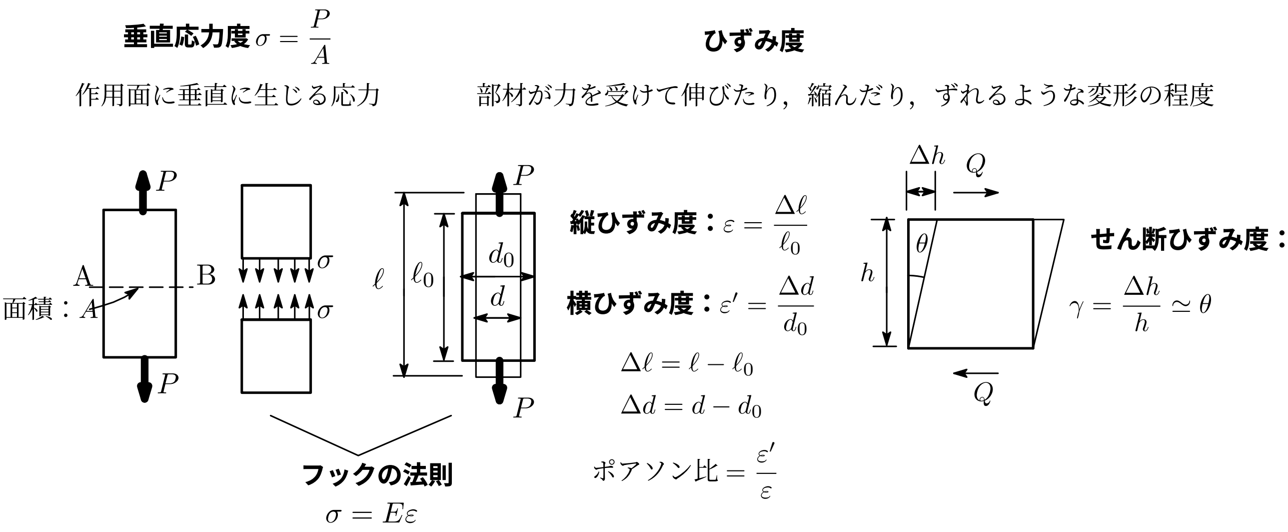


図 6.3: 応力と歪み

の関係式が成り立つことを補足しておく。ここで $I$ は断面の 2 次モーメント，$EI$ は曲げ変形のしにくさを示す指標で**曲げ剛性**と呼ばれる量だ。

断面 2 次モーメントや曲げ剛性については第 7 話あたりで詳しく説明する予定だが，ついでなので簡単に触れておこう。断面 2 次モーメントは断面の形状により決まるが，中立軸を中央にもつ幅 $b$，高さ $h$ の長方形断面の断面 2 次モーメントは

$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{6.6}$$

で与えられる。

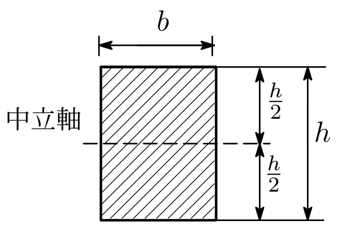


図 6.4: 断面 2 次モーメント

また，(6.5) より $\rho = \dfrac{EI}{M}$ なので，$EI$ の小さいはりは曲率半径 $\rho$ が小さく，曲りが強くなることを意味するだろう。このことから曲げ剛性 $EI$ は曲りに対する抵抗を表すと考えられるわけだね。

さて，ひずみの話はまたあとで取りあげるとして仮想仕事法を使ってたわみ $\delta$ とたわみ角 $\theta$ を求める計算法を紹介していこう。

## ●仮想仕事法による計算法

- K 氏：モーメントのなす仕事を $W$ とすると

$$W = M \times \theta \tag{6.7}$$

で表される。$M$ はモーメントの大きさで $\theta$ は回転角だ。

- コニー：ちょっと待って。仕事の次元は $[W] = [N][L] = ML^2T^{-2}$ でモーメントの次元 $[M] = [N][L] = ML^2T^{-2}$ と一緒じゃない。角度 $\theta$ の次元はどうなっているのかしら？
- K 氏：ご指摘のことはごもっともだ。ただ，角度 $\theta$ は無次元量なんだね。例えばラジアンは「弧と半径の長さの比」としての無次元量となる。つまり同じ次元を持つ量同士の比は無次元量になるわけだ。無次元量の特長としてどんな単位で物理量を測っても値が変わらないということだね 。
- コニー：そうなんだ。仕事は「力 × 移動量」で定義されるのでモーメントによる仕事は (6.7) で定義されるのね。
- K 氏：それではその内部に作用している曲げモーメント $M$ のなす仕事を考えよう。
- コニー：内力は曲げモーメント以外にせん断力 $Q$ や軸方向力 $N$ があるけど，それらの仕事はどうなるの？
- K 氏：部材の内力がなす仕事量としてはコニーが指摘したように次の 3 つがある。

$$\begin{cases} \text{せん断力による仕事量} & : \displaystyle\int Q\gamma dx \\ \text{曲げモーメントによる仕事量} & : \displaystyle\int M d\theta \\ \text{軸方向力による仕事量} & : \displaystyle\int N\varepsilon dx \end{cases} \tag{6.8}$$

$\gamma$ や $\varepsilon$ は先ほど説明したひずみ度で無次元の物理量だ。積分は部材の全長にわたって行う。いずれも仕事の次元となっているだろう。ところで，梁やラーメン構造では曲げモーメント $M$ 以外の他の内力 $Q, N$ による仕事量は無視できるほど小さいんだね。つまりせん断変形や軸方向の変形は曲げ変形に較べてはるかに小さいのでそれらをカットして曲げモーメントによる仕事だけを考えるというわけなんだ。

- コニー：そうなんだ。分かったわ。
- K 氏：曲げモーメント $M$ による仕事は，はり内部の任意の点 $x$ における曲げモーメントの値とその点 $x$ における変形量 $d\theta$ の積 $Md\theta$ をはり全長にわたって足し合わすことで求められるので

$$W = \int M d\theta = \int M\kappa dx \tag{6.9}$$

と表すことができる。ここから仮想仕事法に入るのだが，**仮想仕事の原理**を説明しておこう。ある構造物に仮想の変位を与えるとその結果仮想のひずみが生じ，内力が仮想の仕事をすることにだろう。「構造物がつり合いの状態にあるとき，外力が任意の仮想変位に対してなす仮想仕事は内力の仮想仕事に等しい」というのがその原理だ。要するに外力の仕事量と内力の仕事量は等しいということだね。

- コニー：う～ん。。。
- K 氏：考えすぎでもつかみにくいと思うので具体的に見ていこう。図 6.1 をご覧。外力 $P$ がなした仕事は $W_{ex} = P\delta$ だね。一方内力のなした仕事は $W_{in} = \int M\kappa\, dx$。はりはこの状態でつり合っているから両者の仕事量は等しい。

$$P\delta = \int M\kappa dx$$

ここで，外力 $P$ を仮想荷重 $\overline{P}$ として考えると，仮想内力は仮想荷重 $\overline{P}$ によって生じる仮想曲げモーメント $\overline{M}$ となるので

$$\overline{P}\,\delta = \int \overline{M}\,\kappa dx$$

と表すことができる。仮想荷重 $\overline{P}$ は任意なので $\overline{P} = 1$ の単位荷重とすれば

$$\delta = \int \overline{M}\,\kappa dx \tag{6.10}$$

となる。ここまで仮想の話ばかりだったが，現実との関係性は曲率 $\kappa$ が担ってくれる。$\kappa$ は実荷重 $P$ に対する真の曲げモーメント $M$ と (6.5) の関係で結ばれていた。$\kappa = \dfrac{M}{EI}$ を (6.10) に代入すると

$$\delta = \int \overline{M}\frac{M}{EI}dx \tag{6.11}$$

を得る。この式がたわみ $\delta$ を求める基本式だね。

- コニー：それではたわみ角 $\theta$ のほうはどうなるのかしら？
- K 氏：うん，仮想単位荷重を考えたように仮想単位モーメント荷重を考えるんだ。**モーメント荷重**というのはモーメント（回転力）として作用する荷重のことだね。仮想曲げモーメントと仮想モーメント荷重を区別する意味から仮想単位モーメント荷重を $\overline{M}_\theta$ と表すことにする。(6.9) より

$$\int \overline{M}_\theta d\theta = \int \overline{M}_\theta \kappa dx$$

ここで $\overline{M}_\theta = 1$ とするとたわみ角を表す式

$$\theta = \int \overline{M}_\theta \frac{M}{EI}dx \tag{6.12}$$

が得られる。なお，説明の都合上仮想モーメント荷重に添え字 $\theta$ を付けたが，もうとくに混乱はないと思うのでこの添え字は外すことにする。このように，仮想単位荷重や仮想単位モーメント荷重を考える仮想仕事法は**単位荷重法**とも呼ばれる。計算の手順は次の通りだ。

1) **実荷重**を作用させた場合の曲げモーメント $M(x)$ の式を求め $M$ 図を描く。
2) たわみ $\delta$ を求めたい点に**仮想単位荷重**$\overline{P} = 1$ を作用させ，その結果生じる仮想曲げモーメント $\overline{M}(x)$ を求め $\overline{M}$ 図を描く。
3) たわみ角 $\theta$ を求めたい点に**仮想単位モーメント荷重**$\overline{M} = 1$ を作用させ，その結果生じる仮想曲げモーメント $\overline{M}(x)$ を求め $\overline{M}$ 図を描く。
4) (6.11)，(6.12) に $M(x), \overline{M}(x)$ を代入して積分計算を行い，たわみ $\delta$ とたわみ角 $\theta$ を求める。

さて，それでは具体的な計算に入ろう。

### A．片持ちばり集中荷重

#### ・A－1. たわみ $\delta_A$ の計算

実荷重 $P$ をかけた片持ちばりの $M$ 図と単位仮想荷重 $\overline{P} = 1$ をかけた $\overline{M}$ は図 6.5 に示す通りだね。A 点のたわみ $\delta_A$ は (6.11) より

$$\delta_A = \int_0^\ell \overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI}dx = \int_0^\ell -x\frac{-Px}{EI}dx = \int_0^\ell \frac{Px^2}{EI}dx = \frac{P\ell^3}{3EI} \tag{6.13}$$

と求められる。

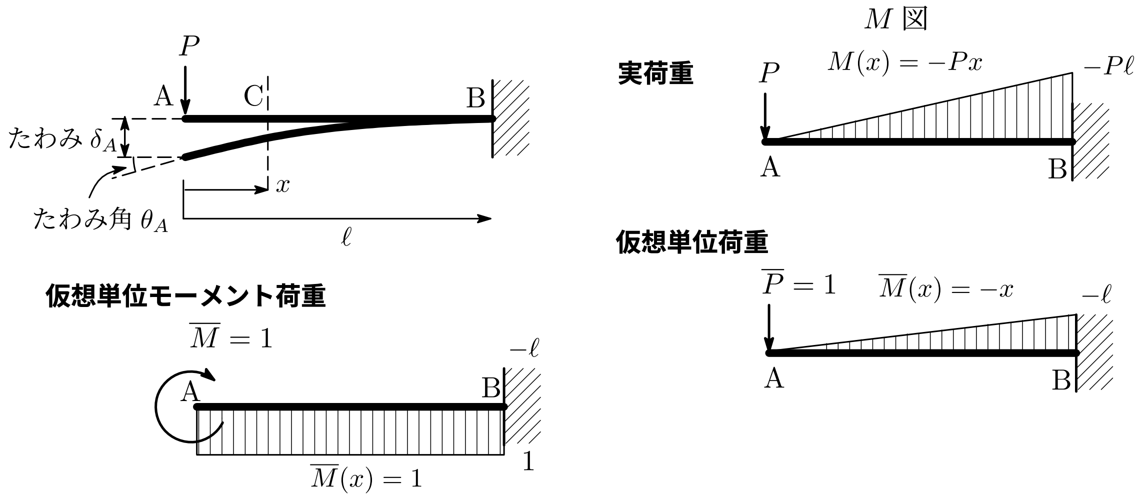


図 6.5: 仮想仕事法

- コニー：断面 2 次モーメントが (6.6) で与えられるはりとすると，幅 $b$ が 2 倍になるとたわみ $\delta$ は元の 1/2 倍，高さ $h$ が 2 倍になれば元の 1/8 のたわみとなるわけね。
- K 氏：そういうことだね。それでは次にたわみ角の計算に入ろう。

### ・A－2. たわみ角 $\theta_A$ の計算

モーメント荷重はすべての点に等しいモーメントの影響を与えるので，仮想単位モーメント荷重の場合の仮想モーメントは $\overline{M}(x)=1$ となる。(6.12) よりたわみ角 $\theta_A$ は

$$\theta_A=\int_0^\ell \overline{M}\frac{M}{EI}dx=\int_0^\ell \frac{-Px}{EI}dx=-\frac{P\ell^2}{2EI} \tag{6.14}$$

と求められる。ここでマイナス符号は仮定した仮想単位モーメント荷重の方向に対して逆方向にたわみ角が生じることを意味している。

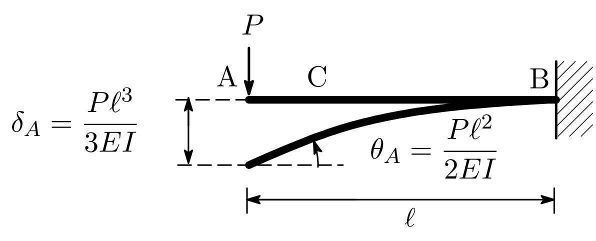


図 6.6: たわみとたわみ角

## B. 単純ばり分布荷重

### ・B－1. たわみ $\delta_C$ の計算

等分布荷重 $w$ が作用した単純ばりの中央 C 点におけるたわみ $\delta_C$ と A 点におけるたわみ角 $\theta_A$ を求めよう。その前に下準備をしておかなければならない。等分布荷重が作用する単純ばりの曲げモーメント $M(x)$ の表式は第 2 話で説明したけど，おぼえているかい？

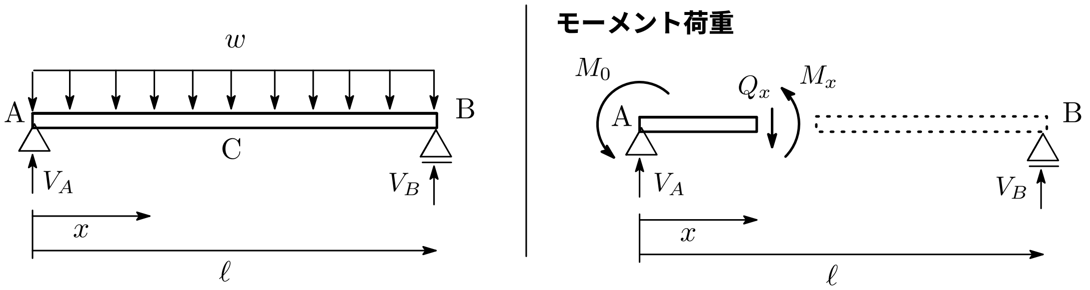


図 6.7: 単純梁・等分布荷重のたわみ

- コニー：え〜っと，ちょっと復習をかねてやってみるわね。支点 A，B の反力をそれぞれ $V_A, V_B$ とし，水平方向の荷重はないので力のつり合いから

$$\sum Y = V_A + V_B - w\ell = 0, \quad \sum M = \frac{\ell}{2} \times V_A - \frac{\ell}{2} \times V_B = 0 \qquad \therefore\ V_A = V_B = \frac{w\ell}{2}$$

次に A 端から距離 $x$ の位置で仮想切断し，その位置でのせん断力を $Q_x$，曲げモーメントを $M_x$ として力のつり合いの式を立てると

$$\sum Y = V_B - wx - Q_x = 0, \quad \sum M = x \times V_A - (x/2) \times wx - M_x = 0$$

これから

$$Q_x = \frac{w\ell}{2} - wx, \qquad M_x = \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \tag{6.15}$$

と求まるわ。曲げモーメントは $x$ の 2 次曲線で表される。

- K 氏：そうだね。また，単純ばりの中央 C 点に集中荷重 $P$ を作用させた場合，曲げモーメントは

$$M_x = \frac{P}{2}x \qquad (0 \leqq x \leqq \ell/2) \tag{6.16}$$

で与えられたね。

次に支点 A に曲げモーメント荷重 $M_0$ が作用した場合のケースを考えよう。力のつり合いより

$$\sum Y = V_A + V_B = 0 \qquad \therefore\ V_A = -V_B$$
$$\sum M = M_0 - \ell \times V_B = 0 \qquad \therefore\ V_A = -\frac{M_0}{\ell}, \quad V_B = \frac{M_0}{\ell}$$

距離 $x$ で仮想切断してその位置での断面力を $Q_x, M_x$ とすると

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0 \quad \therefore\ Q_x = V_A = -\frac{M_0}{\ell}$$
$$\sum M = M_0 + x \times V_A - M_x = 0 \qquad \therefore\ M_x = M_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \tag{6.17}$$

以上で下準備が完了だ。

それではたわみ $\delta_C$ の計算に入ろう。C 点に仮想単位荷重 $\overline{P} = 1$ を与えた場合，仮想曲げモーメント $\overline{M}(x)$ は (6.16) より

$$\overline{M}(x) = \frac{x}{2} \qquad (0 \leqq x \leqq \ell/2) \tag{6.18}$$

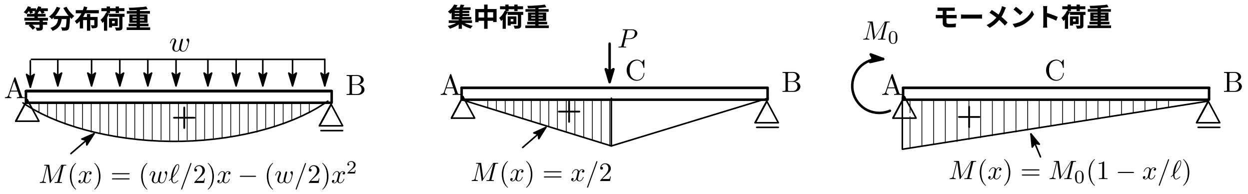


図 6.8: $M$ 図

となる。C 点のたわみ $\delta_C$ は (6.11) に (6.15) と (6.18) を入れて

$$\delta_C = 2\int_0^{\ell/2} \overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI}dx = \frac{2}{EI}\int_0^{\ell/2}\frac{x}{2}\left(\frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2\right)dx$$
$$= \frac{5w\ell^4}{384EI} \tag{6.19}$$

と求められる。ここで留意してほしいのは積分区間を $0 \leqq x \leqq \ell$ とすべきだが，(6.18) で $x$ の定義域を $0 \leqq x \leqq \ell/2$ としているだろう。ところがうまい具合に $M$ 図は $x = \ell/2$ の C 点で対称形になっているので半分の積分区間での積分値を 2 倍しておけばよいという点だ。

**・B－2. たわみ角 $\theta_A$ の計算**

A 点に仮想単位モーメント荷重 $\overline{M} = 1$ を作用させた場合，仮想曲げモーメント $\overline{M}(x)$ は (6.17) より

$$\overline{M}(x) = 1 - \frac{x}{\ell} \tag{6.20}$$

これを (6.12) に入れて

$$\theta_A = \int_0^{\ell}\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\left(\frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2\right)dx$$
$$= \frac{w\ell^3}{24EI} \tag{6.21}$$

と求められる。

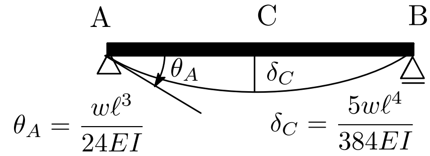


図 6.9: 単純ばりのたわみとたわみ角

## ＥＸ．単純ばりのたわみとたわみ角

- K 氏：単純ばりの C 点に $M_0$ のモーメント荷重が作用しているとき，C 点のたわみとたわみ角を求めよという問題だが，コニーやってみるかい？
- コニー：そうね，挑戦してみるわ。教えていただいた「計算の手順」に従ってやってみるわ。
  １）まず実荷重を作用させた場合の $M(x)$ を求める。水平力はないので，支点 A，B の反力を $V_A$ , $V_B$ として力のつり合いの式をたて反力を求めると

$$\sum Y = V_A + V_B = 0, \quad \sum M = M_0 - \ell \times V_B = 0 \qquad \therefore\ V_A = -\frac{M_0}{\ell}, V_B = \frac{M_0}{\ell}$$

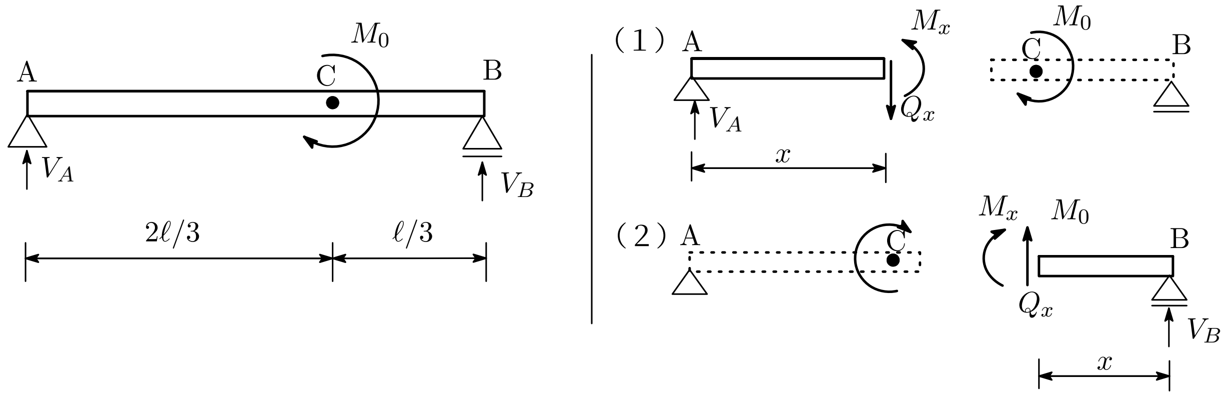


図 6.10: モーメント荷重

次に，支点 A から $x\,(0 \leq x \leq 2\ell/3)$ の距離で仮想切断し。その位置での断面力を $Q_x$, $M_x$ として力のつり合いの式を立てると

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0, \quad \sum M = x \times V_A - M_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = -\frac{M_0}{\ell},\ M_x = -\frac{M_0}{\ell}x$$

また，支点 B から $x\,(0 \leq x \leq \ell/3)$ の距離で仮想切断しその位置での断面力を $Q_x$, $M_x$ として力のつり合いの式を立てると

$$\sum Y = V_B + Q_x = 0, \quad \sum M = -x \times V_B + M_x = 0 \qquad \therefore\ Q_x = -\frac{M_0}{\ell},\ M_x = \frac{M_0}{\ell}x$$

と求まり，$M$ 図は次の通りとなるわね。

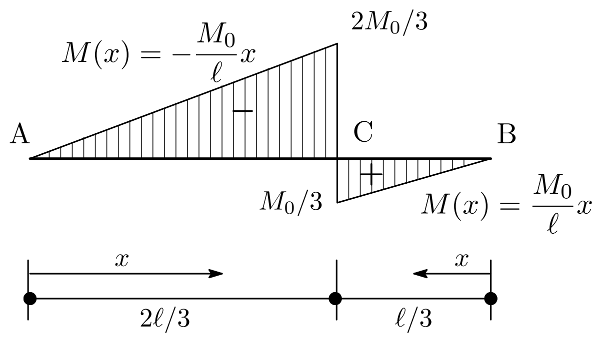


図 6.11: モーメント荷重の M 図

２）次に手順２。C 点に仮想単位荷重 $\overline{P} = 1$ を作用させ仮想曲げモーメント $\overline{M}(x)$ を求める。これはすでに第２話の B. 単純ばりのところでやった。

３）手順３。C 点に仮想単位モーメント荷重 $\overline{M}_0 = 1$ を作用させ仮想曲げモーメント $\overline{M}(x)$ を求める。ということで，手順２と３の結果は次のようになる。

４）最後に $\delta_C$ と $\theta_C$ を計算すると

$$\delta_C = \int \overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{2\ell/3}\frac{1}{3}x\left(-\frac{M_0}{\ell}x\right)dx + \int_0^{\ell/3}\frac{1}{\ell}x\frac{M_0}{\ell}xdx\right\} = -\frac{2M_0\ell^2}{81EI}$$

$$\theta_C = \int \overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{2\ell/3}\left(-\frac{1}{\ell}x\right)\left(-\frac{M_0}{\ell}x\right)dx + \int_0^{\ell/3}\frac{1}{\ell}x\frac{M_0}{\ell}xdx\right\} = \frac{M_0\ell}{9EI}$$

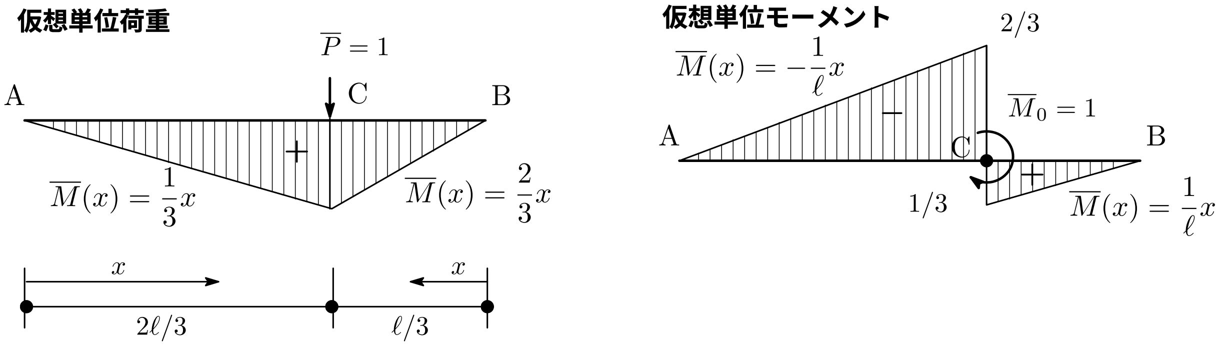


図 6.12: 仮想単位荷重と仮想単位モーメント荷重

- K 氏：OK。少し疲れてきたが，はり以外の適用例として第 3 話**C－2**で紹介した単純ばり系ラーメン構造をとりあげて第 6 話を終わるとしよう。図 6.13 で C 点でのたわみ $\delta_C$ と A 点のたわみ角 $\delta_A$ を求める。

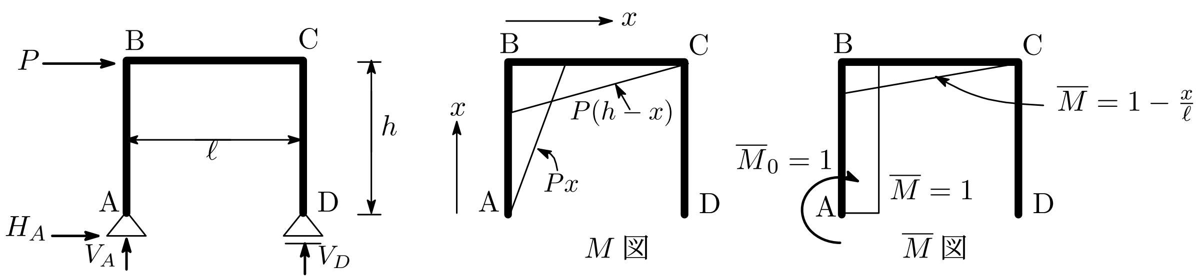


図 6.13: 単純ばり系ラーメン構造

$M$ 図は第 3 話ですでに求めている。A 点に仮想単位モーメント荷重 $\overline{M}_0=1$ を作用させた場合，節点 B にそのまま伝搬するので，BC の仮想モーメント $\overline{M}(x)$ は (6.17) より $\overline{M}(x)=1-\dfrac{x}{\ell}$ となる。したがって

$$\begin{aligned}\delta_C &= \int \overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\int_0^h x\cdot Pxdx + \int_0^\ell (h-x)\cdot P(h-x)dx\right)\\ &= \frac{P}{EI}\left(\int_0^h x^2dx + \int_0^\ell (h-x)^2dx\right) = \frac{h^3+3h^2\ell-3h^2\ell+\ell^3}{3EI}P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_A &= \int \overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\int_0^h 1\cdot Pxdx + \int_0^\ell \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\cdot P(h-x)dx\right)\\ &= \frac{3h^2+3h\ell-\ell^2}{6EI}P\end{aligned}$$

以上で仮想仕事法の要領は大体つかめたと思うので第 6 話はこれで終了しよう。第 7 話は「たわみ曲線の微分方程式による解法」の話を予定している。微分方程式といっても難しいものはでてこないので気楽に聴けばいい。

- コニー：お疲れ様でした。第 7 話も面白そうね，どういうお話になるのか楽しみだわ。それではまた〜。

2017.10.5