第 8 話.　　はりの曲げ応力と断面係数・せん断応力

- K 氏：こんにちわ〜，コニー。元気そうでなによりだ。この構造力学談話も当初予定より長くなってとうとう第 8 話にまできたね。こうなりゃいけるとことまでいってしまおうという気になる。ということで，第 8 話は第 7 話の続きとしてカステリアーノの定理をとりあげようと考えていたんだが少し気が変わった。ここで少し材料力学的な知識の補充もしておこうという気になったので，第 8 話ははりの曲げ応力と断面係数というテーマで話を進めることにしたよ。
- コニー：こんにちは，K さん。これから寒くなってくると思うけど風邪だけは引かないように気を付けてね。ところで予定の変更は全然かまわないけど，カステリアーノの定理ってなんなの？
- K 氏：うん，第 6 話，第 7 話では仮想仕事法や弾性曲線法，モールの定理で「はり」の変形を求めたね。カステリアーノの定理は「ラーメン」や「トラス」の変形までも求めることのできる一般的な方法なんだ。構造物は外力で変形されるとひずみのエネルギーが溜まるだろう。このひずみのエネルギーに注目して変形を調べていこうといったものなんだね。材料力学的な知識も必要となるので，第 8 話はそれにあてようというわけなんだ。
- コニー：そうなんだ。それではお願いします。

（1）曲げモーメントと応力

- K 氏：第 6 話でも説明したように，一様な曲げモーメントだけを受けて曲がったはりの断面を見ると中立軸（面）の下側では引張応力，上側では圧縮応力が分布する状態となる。曲げモーメント M ははり全域で一定となり，せん断力 Q は生じないので**純曲げ状態**といわれる（この節の最後の補足参照)。部材軸に直角な断面は変形後も平面を保ち部材軸に直角なままになっていると考えよう。これをこれを**ベルヌイ・オイラーの仮定**といっているが，簡単にスルーすればいいだろう。中立軸から y の距離の中立軸に垂直な断面に生じる垂直応力 σ は (6.4) で示され，再掲す

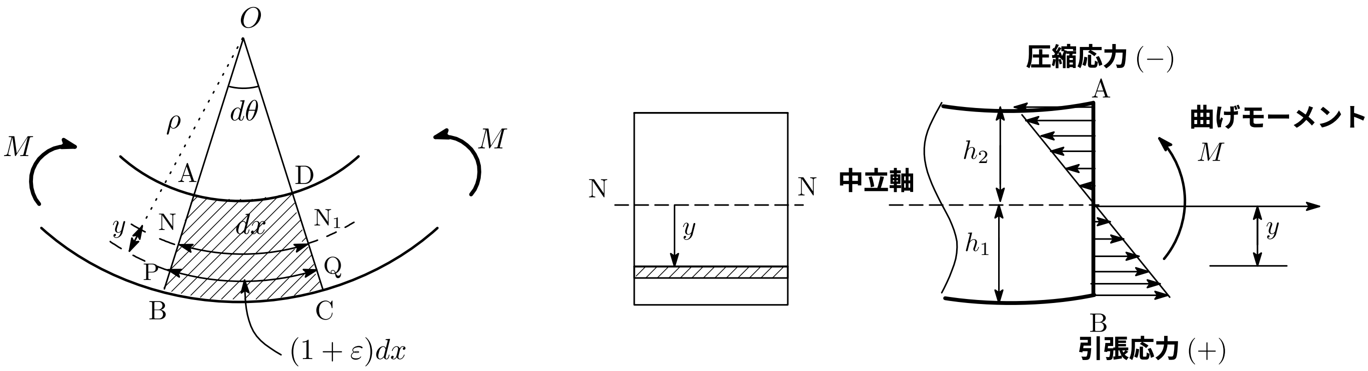


図 8.1: 曲げ応力と曲げモーメント

ると

$$\sigma = E\frac{y}{\rho} \qquad (E\text{：ヤング率},\ 1/\rho\text{：中立軸の曲率}) \tag{8.1}$$

垂直応力 σ を**曲げ応力**といった。垂直応力 σ は中立軸からの距離 y に比例し，y を下向きに正とすると中立軸より下側に正符号の引張応力，上側には負符号の圧縮応力が生じることが分かる。(8.1) から分かるように曲げモーメントの分布は直線上で中立面で $\sigma = 0$ となる。はりには縦軸方向の外は作用しないから，曲げ応力を断面全体にわたって積分した値は 0 になければならないね。

$$\int_A \sigma dA = 0 \tag{8.2}$$

(8.2) に (8.1) を入れると

$$\frac{E}{\rho}\int ydA = 0 \qquad \therefore \int ydA = 0 \tag{8.3}$$

が得られる。$\int_A ydA$ を**断面 1 次モーメント**といい，中立軸 NN に関する面積モーメントだ。このあとで説明するように，はりの曲げに対する剛性とは関係しないが断面の**図心**を求めるときに必要となるんだね。

- コニー：図心ってなに？
- K 氏：うん，図心というのは断面を厚さが一定の板と考えたときの重心位置のことをいっている。構造力学特有の表現だね。そして中立軸は図心を通る軸のことだ。
- コニー：そうなんだ。
- K 氏：さて，図 8.1 から分かるように断面の微小面積 dA に作用する力 σdA は中立軸まわりに $y \times \sigma dA$ のモーメントを引き起こすだろう。このモーメントの総和は抵抗モーメントとなり，これは断面が受ける曲げモーメントとつり合わなければならない。

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA \tag{8.4}$$

ここで $\int_A y^2 dA = I$ とおくと

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad \text{または} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{8.5}$$

と表される。曲りの大小を表す曲率 ρ は EI に反比例するので，EI は曲げに対する変形抵抗の大きさを示す指標となり，これを**曲げ剛性**といったね。I は**断面 2 次モーメント**といい，断面の形状と寸法が与えられれば計算で求めることができる。

- コニー：断面 1 次モーメントとか断面 2 次モーメントという用語がでてきたけど，1 次，2 次というのはなにを意味しているのかしら。
- K 氏：モーメントは定点からその量までの距離をその量に掛けたものだったね。だから $y \times dA$ は断面積のモーメントとなる。このばあい，距離 y の次数が 1 次だから断面 1 次モーメントといい，$y^2 \times dA$ は距離 y の次数が 2 次だから断面 2 次モーメントと呼んで，名前で内容が分かるようにしているんだね。
- コニー：そうなんだ。了解したわ。
- K 氏：(8.1) と (8.5) から曲げ応力は

$$\sigma(y) = \frac{My}{I} \tag{8.6}$$

と表せ中立軸から最も離れた位置で σ は最大となる。I は何度もでてきたように断面の中立軸に関する断面の 2 次モーメント。図 8.1 に示すように曲げモーメントが $M>0$ の場合，下端 $y=h_1$ で最大引張り応力 σ_1 が生じ，上端 $y=-h_2$ で最大圧縮応力 σ_2 が生じる。

$$\sigma_1=\frac{Mh_1}{I}=\frac{M}{Z_1},\quad \sigma_2=-\frac{Mh_2}{I}=-\frac{M}{Z_2} \tag{8.7}$$

Z_1, Z_2 を中立軸に関する**断面係数**と呼んでいる。Z_1 は引張側，Z_2 は圧縮側の断面係数。この 2 式は形式的にまとめると

$$\sigma_{max}=\frac{M}{Z},\qquad Z=I/h：h\text{ は中立軸から端までの距離} \tag{8.8}$$

と表せ，曲げ応力の最大値 σ_{max} は曲げモーメントを断面係数で割ることで求められるということだね。

- コニー：断面係数というのは，断面 2 次モーメントを含んでいることから分かるようにはりの曲がりにくさ（剛性）を決めている量ということね。
- K 氏：そうだね。断面係数のお話はまたあとでやるのでお楽しみに。

●断面 1 次，2 次モーメントの計算

- K 氏：それでは具体的に断面 1 次モーメントと断面 2 次モーメントを計算していこう。

  A. 断面 1 次モーメント： x 軸，y 軸に関する断面 1 次モーメントを S_x, S_y とすると，S_x, S_y はそれぞれ x 軸，y 軸に関する面積モーメントだから次式で表せるだろう。

$$S_x=\int_A ydA,\quad S_y=\int_A xdA \tag{8.9}$$

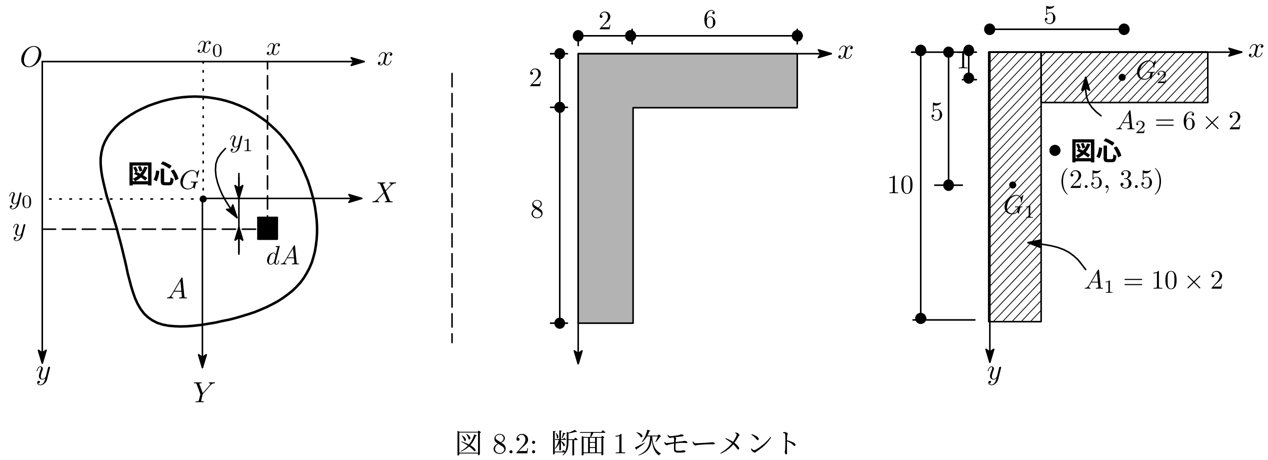


図 8.2: 断面 1 次モーメント

はりの断面の図心（重心）位置を (x_0, y_0) は

$$x_0=\frac{\displaystyle\int_A ydA}{\displaystyle\int_A dA}=\frac{1}{A}\int_A ydA,\quad y_0=\frac{\displaystyle\int_A xdA}{\displaystyle\int_A dA}=\frac{1}{A}\int_A xdA$$

と表せるので，図心は断面の 1 次モーメントを用いて次式で求められる。

$$x_0 = \frac{S_y}{A}, \quad y_0 = \frac{S_x}{A} \tag{8.10}$$

複雑な図形では，単純な図形に分けてそれぞれについて 1 次モーメントを求め加えればよい。

$$S_x = A_1 y_0^1 + A_2 y_0^2 + \cdots = \int_A y dA, \quad S_y = A_1 x_0^1 + A_2 x_0^2 + \cdots = \int_A x dA \tag{8.11}$$

例えば図 8.2 の右のはりの場合なら $A = A_1 + A_2 = 32\mathrm{cm}^2$ で，断面の 1 次モーメントは

$$S_x = A_1 \times y_0^1 + A_2 \times y_0^2 = 5 \times (10 \times 2) + 1 \times (6 \times 2) = 112\,\mathrm{cm}^2$$
$$S_y = A_1 \times x_0^1 + A_2 \times x_0^2 = 1 \times (10 \times 2) + 5 \times (6 \times 2) = 80\,\mathrm{cm}^2$$

となる。したがって図心は

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{112}{32} = 2.5\,\mathrm{cm}, \quad y_0 = \frac{80}{32} = 3.5\,\mathrm{cm}$$

テキストによっては単位を mm にしているけど cm→mm への換算は cm=10mm, $\mathrm{cm}^4 = 10^4\mathrm{mm}$ で換算すればいい。

- コニー：なるほどね。

B. 断面 2 次モーメント： x 軸, y 軸 に関する断面の 2 次モーメントは

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \tag{8.12}$$

で表される。これは力学でお馴染みの慣性モーメントと同じ形をしているね。断面積が A の図形の図心 $G(x_0, y_0)$ を通る X 軸に関する断面 2 次モーメントを I_X とすると

$$I_x = I_X + y_0^2 A \tag{8.13}$$

が成り立つ。これを**平行軸の定理**と呼んでいる。この定理のおかげで断面 2 次モーメントの計算は楽になるね。平行軸の定理の導出は力学で勉強したと思うけど，やってみるかい。

- コニー：半分忘れたけど，やってみようかしら。図心を原点 (0, 0) とする X 軸から微小面積 dA までの距離を y_1 とすると定義から

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_0 + y_1)^2 dA = \int_A y_1^2 dA + 2y_0 \int_A y_1 dA + y_0^2 \int_A dA$$

ところで断面の 1 次モーメント $\int_A y_1 dA$ は図心を通るので 0 になる。ということで

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y_1^2 dA + y_0^2 \int_A dA = I_X + y_0^2 A$$

がでてくるわね。

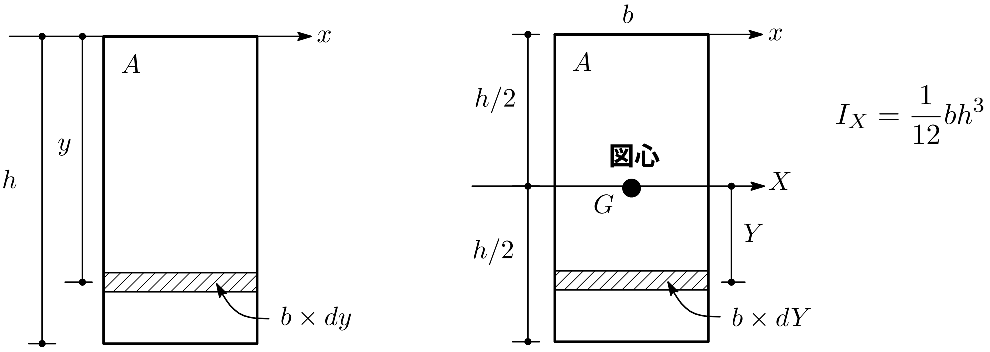


図 8.3: 断面 2 次モーメント

- K 氏：OK，そうだね。これから図心を通る軸に関する断面の 2 次モーメントは最小になることが分かる。図 8.3 の長方形断面の 2 次モーメント I_x, I_X を求めると

$$I_x = \int_0^y y^2 b dy = \frac{1}{3}bh^3, \quad I_X = 2\int_0^{h/2} Y^2 b dY = \frac{1}{12}bh^3 \tag{8.14}$$

となる。$y_0^2 A = (h/2)^2 bh = bh^3/4$ なので $I_x = I_X + y_0^2 A$ となって (8.13) が成り立つね。
それでは，図 8.2 の右のはりの断面の 2 次モーメント I_x を求めてごらん。

- コニー：突然振ってくるのね！ 仕方ないわ。え〜っと，2 つの四角形に分けて左の四角形の 2 次モーメントを I_x^1，右の四角形のを I_x^2 とするわね。そうすると

$$I_x = I_x^1 + I_x^2, \qquad I_x^1 = I_X^1 + y_0^2 A, \quad I_x^2 = I_X^2 + y_0'^2 A$$

となり， I_x^1 の方は

$$I_X^1 = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{2 \times 10^3}{12} = 166.7, \quad y_0^2 A = 5^2 \times 10 \times 2 = 500$$

から

$$I_x^1 = I_X^1 + y_0^2 A = 666.7\,\mathrm{cm}^4$$

I_x^2 の方は

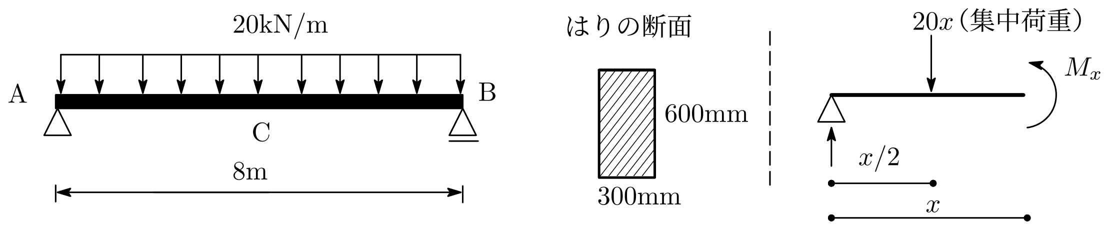
$$I_X^2 = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{6 \times 2^3}{12} = 3, \quad y_0^2 A = 1^2 \times 6 \times 2 = 12, \quad I_x^2 = 15$$

したがって

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 = 515\,\mathrm{cm}^4$$

- K 氏：それじゃもう一つ。下の図のような分布荷重を受けている単純ばりの断面係数と曲げ応力の最大値を求めよという問題だ。やってみるかい。
- コニー：そうね，え〜っと，前のノートを見ながら計算するとして。。。支点 A，B の反力を V_A, V_B とすると力のつり合いから

$$V_A + V_B = 20 \times 8, \quad 4 \times V_A = 4 \times V_B \qquad \therefore\ V_A = V_B = 80\,\mathrm{kN}$$



支点 A から距離 x の位置でのモーメントはその位置で仮想切断しモーメントのつり合いの式より

$$M_x = x \times V_A - \frac{x}{2} \times 20x = -10x^2 + 80x = -10(x-4)^2 + 160$$

と得られるので，M_x は $x = 4$ の中点 C で最大値 $M_{x=4} = 160\,\text{kNm}$ をとる。断面係数 Z は

$$Z = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3}{6} = \frac{300 \times 600}{6} = 18 \times 10^6\,\text{mm}^3 \qquad (I = \frac{1}{12}bh^3)$$

したがって最大曲げ応力 σ_{max} は

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x=4}}{Z} = \frac{160 \times 10^6}{18 \times 10^6} = 8.89\,\text{N/mm}^2$$

となるわね。

※補足： 支点 A，B に曲げモーメント M_A, M_B だけが作用している単純ばりの M 図を求める。$M_A = M_B$ の場合，純曲げ状態となる。

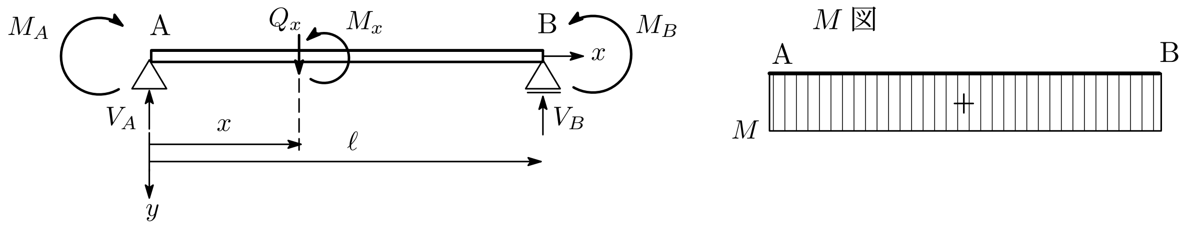


図 8.4: 純曲げ状態

力のつり合いより

$$\sum Y = -(V_A + V_B) = 0, \quad \sum M = M_A - M_B - \ell \times V_B = 0 \quad \therefore\ V_A = \frac{M_B - M_A}{\ell}, V_B = \frac{M_A - M_B}{\ell}$$

位置 x でのせん断力 Q_x，曲げモーメントを M_x とすると

$$\sum Y = Q_x - V_A = 0, \quad \sum M = M_A - M_x + x \times V_A = 0 \quad \therefore\ Q_x = \frac{M_B - M_A}{\ell}, M_x = M_A + \left(\frac{M_B - M_A}{\ell}\right)x$$

$M_A = M_B$ の場合

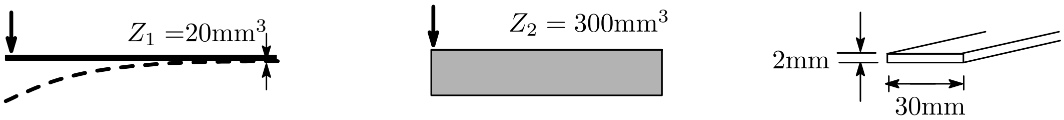
$$Q_x = 0, \quad M_x = M \qquad (0 \leqq x \leqq \ell)$$

となり，せん断力は生じず，曲げモーメント M は単純ばり全域で一定の**「純曲げ状態」**となる。

●断面係数

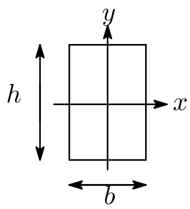
- K 氏：上の問題で見たように断面係数が大きいと部材内で発生する曲げ応力は小さくなり，ある意味丈夫な部材ということになる。例えば一つのはりでも平べったい側を上向きにした場合と縦

向きした場合とでは，はりの曲がりやすさが異なることは経験上よく知っていることだね。手近にある長さ 300mm，厚み 2mm，幅 30mm のプラスチックの物差しをとりあげよう。

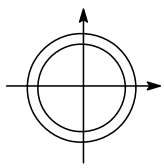


プラスチック物差しの平べったい面が水平になるように一端を固定し，もう一方の端を少し押すと物差しは簡単に曲がる。一方，垂直になるようにセットしたときは簡単には曲がらない。同じ物差しでもこうも違う。断面係数を求めると，前の場合は $Z_1 = bh^2/6 = 30 \times 2^2/6 = 20\text{mm}^3$，後の場合は $Z_2 = 2 \times 30^2/6 = 300\text{mm}^3$ となる。後の場合の断面係数は前のそれの 15 倍も大きい。$M = \sigma Z$ だから M を同じとすると前の場合は後の 15 倍もの曲げ応力が発生していることになるね。部材内部に生じる垂直応力 σ を同じくしたとき，Z が大きいほど M も大きな値となり，いいかえるとその部材は大きな荷重に耐えることになる。

- コニー：つまり，同じ部材を使っても断面係数が大きくなるようにセットすれば部材の耐荷重性能がアップするということね。断面係数は重要なファクターなんだ。
- K 氏：図 8.5 に各種断面形状の I と Z を載せておくので，I と Z の式の導出に挑戦しておくのもいいね。

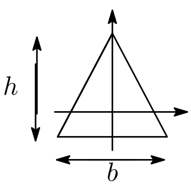


$$I = \frac{1}{12}bh^3 \quad Z = \frac{1}{6}bh^2$$

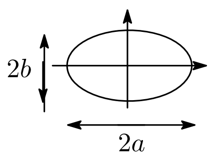


外径 d_2, 内径 d_1

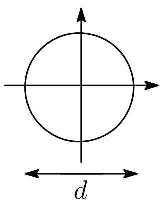
$$I = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4) \quad Z_1 = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)$$



$$I = \frac{1}{36}bh^3 \quad Z_1 = \frac{1}{24}bh^2$$
$$Z_2 = \frac{1}{12}bh^2$$



$$I = \frac{\pi}{4}ab^3 \quad Z = \frac{\pi}{4}a^2b$$



$$I = \frac{\pi}{64}d^4 \quad Z_1 = \frac{\pi}{32}d^3$$

図 8.5: 断面 2 次モーメントと断面係数

- コニー：いまのお話はスルーしようと思ったど，折角だから三角形面積の I と Z の導出に挑戦してみるわ。底辺の長さが b，高さが h の三角形を考えるわね。三角形の重心 G を通る水平軸を X 軸，底辺の軸を x 軸とすると，X 軸に関する断面の 2 次モーメント I_X は x 軸に関する断面の 2 次モーメント I_x を求めて平行軸の定理を使えばいい。I_x は

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{bh^3}{12}$$

と求まるので，平行軸の定理 (8.13) より

$$I_X = I_x - y_0^2 A = \int_A y^2 dA = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

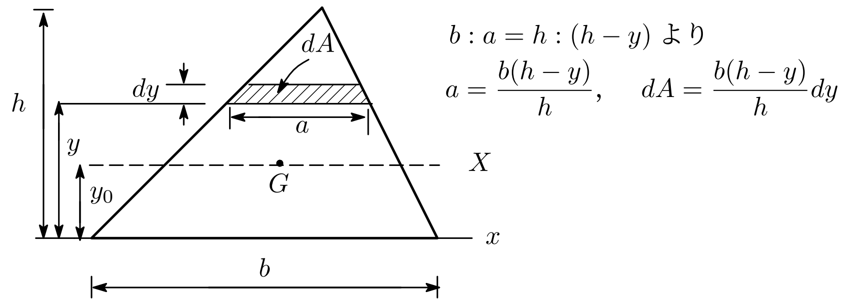


図 8.6: 三角形の断面 2 次モーメントと断面係数

次に断面係数だけど，頂点に対する断面係数を Z_1，底辺に対するのを Z_2 とすると，(8.8) より

$$Z_1 = \frac{I_X}{2h/3} = \frac{bh^2}{24} \qquad Z_2 = \frac{I_X}{h/3} = \frac{bh^2}{12}$$

- K 氏：うん，その調子で他のもやってみたらいいね。

（2）せん断応力と曲げモーメント

●共役せん断応力

- K 氏：繰り返しになるけど，単位面積当たりの内力を応力といい，断面に垂直な内力 P を断面積 A で割った値を垂直応力 σ といった。

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

一方，作用面に沿って生じる応力を**せん断応力**という。
- コニー：「垂直応力度」という表現も見かけるけど垂直応力とは異なるものなの？
- K 氏：中身は同じだよ。「応力の度合い」ということを強調しているだけなんだね。さて，図 8.7 に示すようなせん断力が作用しているはりがあり，はりの微小直六面体の各面に働くせん断応力 τ および τ' を考えよう。この微小直六面体が回転しないのはモーメントのつり合いが保たれてい

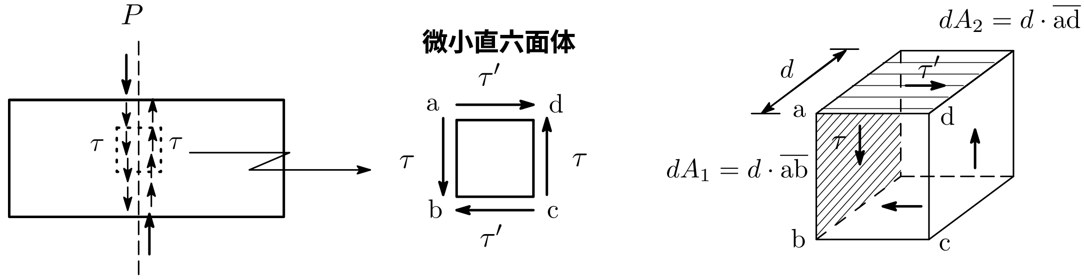


図 8.7: 共役せん断応力

るからで，モーメントのつり合いの式は

$$\overline{\mathrm{ab}} \times (\tau' \cdot dA_2) - \overline{\mathrm{ad}} \times (\tau \cdot dA_1) = 0, \quad \text{ただし}\, dA_1 = d \cdot \overline{\mathrm{ab}},\, dA_2 = d \cdot \overline{\mathrm{ad}}$$

となるね。これから

$$\tau = \tau' \tag{8.15}$$

であることがわかる。このように，ある面にせん断応力が生じていれば，必ずこれに直角な面にも大きさが等しく，向きが逆のせん断応力 τ' が生じる。これを**せん断応力の共役性**といい，τ' を**共役せん断応力**（conjugate shearing stress）といっている。

●曲げによるせん断応力

- K 氏：第 1 話の図 1.21，(1.5) で示したように曲げモーメント M の変化率がせん断力 Q だね。

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} \tag{8.16}$$

M が変化するところには Q が，そして Q によるせん断応力 τ が発生する。断面に曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x が作用しているとき，断面の中立軸から距離 y に生じるせん断応力 τ は

$$\tau = \frac{Q_x \cdot S}{b \cdot I} \tag{8.17}$$

で与えられる。b ははりの幅，I は中立軸に関する断面 2 次モーメント，S は中立軸から距離 y における断面 1 次モーメント。

- コニー：(8.17) はどのようにして導出されるのかしら？
- K 氏：うん，図 8.8 のように距離 dx 離れた 2 断面 AB，CD を考え，AB，CD 面に働くせん断力と曲げモーメントをそれぞれ Q_x, $Q_x + dQ_x$ および M_x, $M_x + dM_x$ としよう。

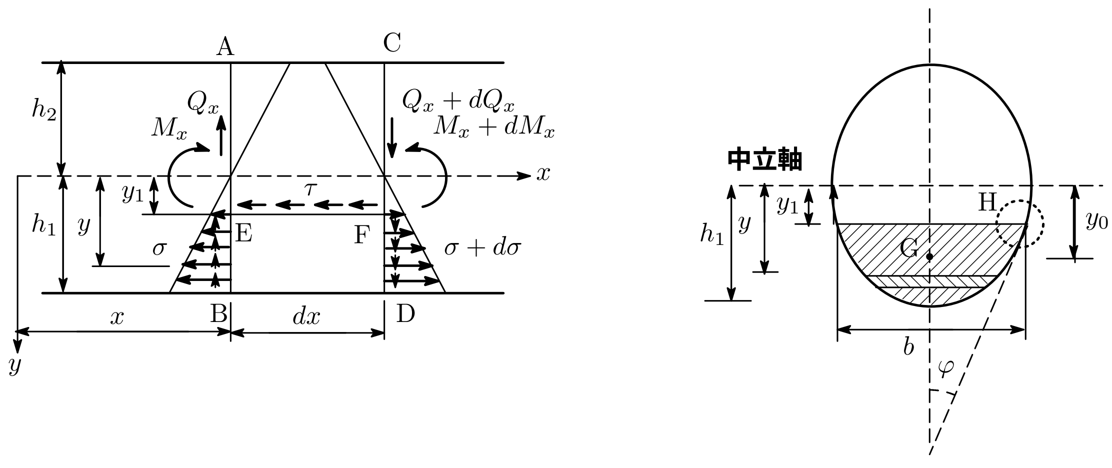


図 8.8: はりのせん断応力

次に中立軸から y_1 の距離で中立面に平行な面 EF をとり，微小部分 EBDF について x 方向の力のつり合いを考える。EB 面にはせん断力 Q_x による**せん断応力**τ が作用しているので，EF 面に

は大きさが等しく向きが逆の**共役せん断応力**τ が働くね。EB 面には曲げモーメント M_x による垂直応力 σ，FD 面には M_x+dM_x による $\sigma+d\sigma$ が作用しているので，x 方向の力のつり合いの式は垂直応力と共役せん断力のつり合いになるから

$$\sum X=\int_{y_1}^{h_1}\{(\sigma+d\sigma)-\sigma\}\,dA-\tau b dx=0$$

また，(8.6) より $\sigma=\dfrac{M_x}{I}y$, $d\sigma=\dfrac{dM_x}{I}y$ なので，これを上式に入れて τ を求めると

$$\tau=\frac{1}{b\cdot I}\frac{dM_x}{dx}\int_{y_1}^{h_1}ydA=\frac{Q_x}{b\cdot I}\int_{y_1}^{h_1}ydA \tag{8.18}$$

となる。$\displaystyle\int_{y_1}^{h_1}ydA$ は中立軸から $y=y_1$ と $y=h_1$ との間にある部分の中立軸に関する断面 1 次モーメントなので S と表すと (8.17) が得られる。

- コニー：う〜ん，y 軸方向のせん断応力を求めるのに，それと垂直な x 方向の力のつり合いを利用しているところは面白いわね。ところで，断面の 1 次モーメント S は，(8.10) より図 8.8 の斜線部の断面積 A と中立軸から A の図心 G までの距離 y_0 の積だったわね。
- K 氏：そうだね。ところではりの表面に注目しよう。境界面というのはいつも問題（？）を含んでいるものだ。一般的に考えて，はりの断面の外周が長方形ではなく曲線になっているとしよう。その曲線上の点 H に作用するせん断応力を考えると，その向きは必ず曲線の接線方向を向いていてその垂直成分が (8.17) の τ で与えられると考えなければならない。
- コニー：ちょっと天下り的ね。もう少し納得がいくような説明がほしいわ。
- K 氏：（少し汗をにじませながら ^^; ）うん， はりの表面を含む小さな直方体を考え，その直方体に作用する応力を描くと図 8.9 のようになるだろう。このうち，表面付近で点線で示した表面

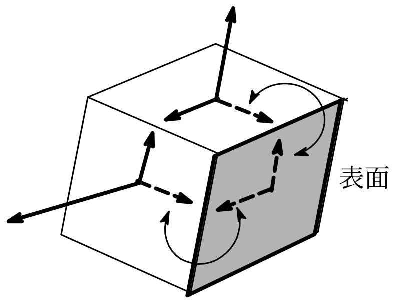


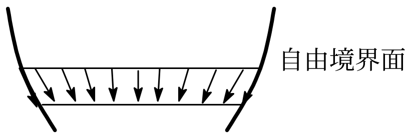
図 8.9: はりの表面付近におけるせん断応力

に垂直なせん断応力の成分が仮にゼロでないとすると，表面にも点線で示すような共役せん断応力が作用しなければならない。ところで，はりの表面にはせん断応力は作用していないーつまり TOP 面だからせん断応力は働かないーと考えられるから，表面の点線で示した応力は 0 のはずだ。したがって，表面と直交する断面上のせん断応力は，表面のすぐ近くでは表面と平行（接線方向）でなければならいことになる。τ_s の垂直成分が (8.17) の τ となるので

$$\tau=\tau_s\cos\varphi,\qquad \tau_s=\frac{\tau}{\cos\varphi}=\frac{QS}{bI\cos\varphi} \tag{8.19}$$

。。。といった理解だけど，おかしな点に気が付いたらいつでもいいから指摘してほしい。

- コニー：そうなんだ。まっ，私なりに考えておくわね。そうすると図 8.8 の中立軸から離れたところのせん断応力の x 軸に沿った分布は絵のようになっているのね。



- K 氏：そうだね。それじゃ次に $b \times h$ の長方形断面にせん断力 Q が作用しているときのせん断応力 τ を求めてみよう。(8.18) より

$$\tau = \frac{Q}{b \cdot I}\int_{y_1}^{h/2} y dA = \frac{QS}{bI}$$
$$S = \int_{y_1}^{h/2} y dA = \int_{y_1}^{h/2} y b dy = \frac{b}{8}(h^2 - 4y_1^2)$$

また，断面 2 次モーメントは (8.14) より

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$\varphi = 0$ で $\tau = \tau_s$ であるので，せん断応力は

$$\tau = \tau_s = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh^3}(h^2 - 4y_1^2) \tag{8.20}$$

と求められる。これからせん断応力は中立軸からの距離 y に関する 2 次曲線となるんだね。

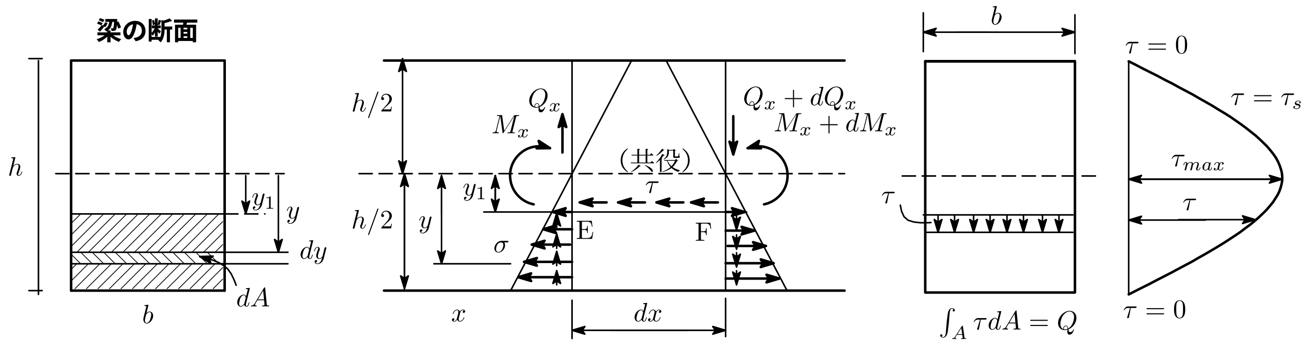


図 8.10: 長方形断面のせん断応力

せん断力 Q を断面積 bh で割った平均せん断応力を $\bar{\tau} = \dfrac{Q}{bh}$ とすると (8.20) は

$$\tau = \tau_s = \frac{3}{2}\bar{\tau}\left(1 - \frac{4y_1^2}{h^2}\right) \tag{8.21}$$

と表せる。せん断応力は中立軸 $y_1 = 0$ で最大値 $\tau_{max} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{bh} = 1.5\bar{\tau}$ をとり，上下面（$y_1 = \pm h/2$）では $\tau = 0$ となるね。

- コニー：なるほど。。。普通，断面積を A とした場合のせん断応力は Q/A と計算するけど，これはあくまでせん断応力の平均値だったんだ。断面に分布している τ をすべて足し合わせるとせん

断力 Q になるハズね。ちょっと確かめてみるわ。$\int_A \tau dA$ を計算してやると $dA = bdy$ だから。。。

$$\int_A \tau dA = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh^3}\int_{-h/2}^{h/2}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)bdy = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh^3}\cdot\frac{2bh^3}{3} = Q \tag{8.22}$$

たしかにせん断力 Q となるわね。

- K 氏：それじゃ半径 r の円形断面におけるせん断応力の計算をやってみるかい。

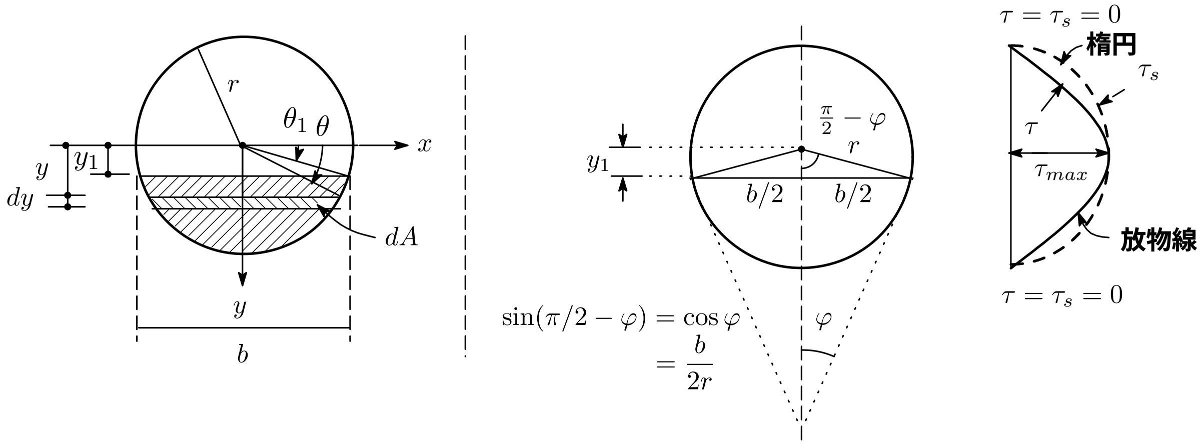


図 8.11: 円形断面のせん断応力

- コニー：了解。図 8.11 のようにとるとして，まず断面 2 次モーメントを求めておくわ。$y = r\sin\theta$, $dy = r\cos\theta d\theta$, $dA = 2r\cos\theta dy = 2r^2\cos^2\theta d\theta$ となるので，中立軸 x に関する断面 2 次モーメントは。。。（手元の積分公式集を繰りながら）

$$I_x = \int_A y^2 dA = 2\times\left(2r^4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta\right) = 4r^4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

また，$b = 2r\cos\theta_1$ なので (8.18) より

$$\tau = \frac{Q}{bI}\int_y^r ydA = \frac{Q}{2r\cos\theta_1\cdot\frac{\pi r^4}{4}}\cdot 2r^3\int_{\theta_1}^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{4Q}{\pi r^2\cos\theta_1}\int_{\theta_1}^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

$\cos\theta = t$ とおくと $-\sin\theta d\theta = dt$, $\int\cos^2\theta\sin\theta d\theta = -\int t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3}\cos^3\theta$ となるので

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi r^2}\cos^2\theta_1 = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2}\left(1-\frac{y_1^2}{r^2}\right) \tag{8.23}$$

となるわ。平均せん断応力を $\overline{\tau} = Q/\pi r^2$ とすると

$$\tau = \frac{4}{3}\overline{\tau}\left(1-\frac{y_1^2}{r^2}\right) \tag{8.24}$$

となって，せん断応力 τ は中立軸からの距離 y に関する 2 次曲線となる。最大せん断応力は $y_1 = 0$ の中立軸上に生じて

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\overline{\tau} \tag{8.25}$$

と得られるわね。

- K 氏：そうだね。ところで円形はりの外周上のせん断応力分布はどうなるかな。
- コニー：え〜っと，ちょっと待ってね。。。それは (8.19) より

$$\tau_s = \frac{\tau}{\cos\phi} = \frac{2}{b}\frac{4}{3}\overline{\tau}\left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) = \frac{4}{3}\overline{\tau}\left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right)^{1/2} \tag{8.26}$$

となるわね。

- K 氏：そうだね。(8.26) に少し手を加えて両辺を 2 乗して整理してやると

$$\frac{\tau_s^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = 1, \qquad ただし\ 1/A = 3\overline{\tau}/4,\ 1/B = 1/r,$$

という楕円の式が得られるだろう。τ の分布は 2 次曲線の放物線となるが，断面周辺の τ_s の分布は同じ 2 次曲線でも楕円となるんだね。τ と τ_s の最大値はともに中立軸上 $y_1 = 0$ で生じ

$$\tau_{max} = \tau_{s \cdot max} = \frac{4}{3}\overline{\tau} \tag{8.27}$$

となる。

それじゃ最後にH型断面ばりにせん断力 $Q = 10^4$N が作用するときの断面のせん断応力を求める。まず断面 2 次モーメント I を求めておく。I は大きな四角形 ABCD の 2 次モーメントから塗部の

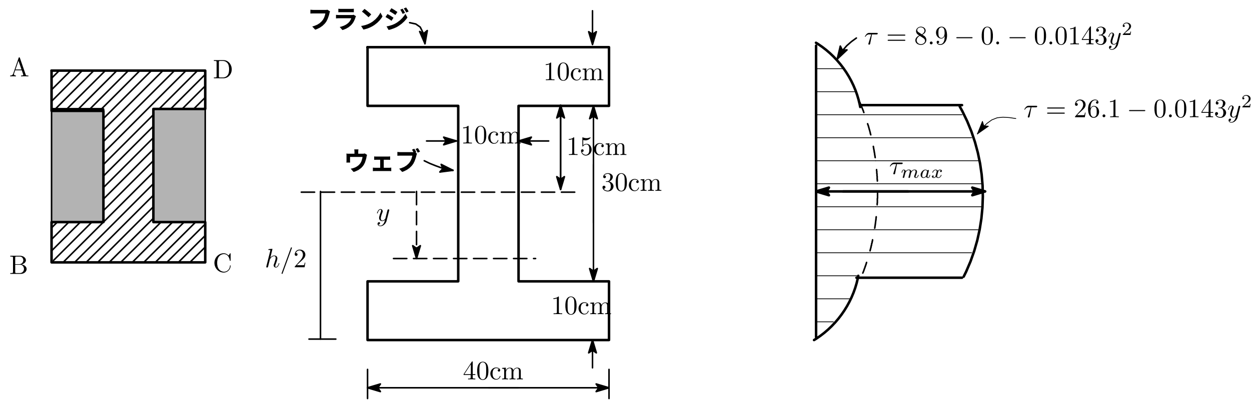


図 8.12:

小さな四角形の 2 次モーメントを差し引いたものになるので

$$I = \frac{40 \times 50^3}{12} - 2 \times \frac{15 \times 30^3}{12} = 3.492 \times 10^5$$

次に (8.18) より

$$\tau = \frac{Q}{bI}\int_y^{h/2} ydA$$

断面の 1 次モーメントは y がウェブ内にある場合とフランジ内にある場合とに分けて計算しなければならない。

１）y がウェブ内にある場合

$$\int_y^{h/2} ydA = \int_y^{15} 10ydy + \int_{15}^{25} 40ydy = 9125 - 5y^2$$

$$\therefore\ \tau = \frac{Q}{bI}\int_y^{h/2} ydA = \frac{10^4}{10 \times 3.492 \times 10^5} \times (9125 - 5y^2) = 26.1 - 0.0143y^2$$

２）y がフランジ内にある場合

$$\int_y^{h/2} ydA = \int_y^{25} 40ydy = 12500 - 20y^2$$

$$\therefore\ \tau = \frac{Q}{bI}\int_y^{h/2} ydA = \frac{10^4}{40 \times 3.492 \times 10^5} \times (12500 - 20y^2) = 8.9 - 0.0143y^2$$

となる。τ_{max} は $y = 0$ のところで $\tau_{max} = 26.1\mathrm{N/cm^2}$ となる。τ は放物線状に分布するが，フランジとウェブの継ぎ目で不連続になる。

****

以上，第 8 話は話題がいろいろ盛りだくさんとなってちょっと疲れただろう。こちらも少し疲れてきたので，このあたりで切り上げよう。第 9 話はお約束通りカステリアーノの定理を取りあげる予定だ。それじゃお開きとしよう。

- コニー：お疲れ様でした。これから寒くなるのでお風邪を召されないように気を付けてくださいね。第 9 話を楽しみにしているわ。それじゃまた，さようなら。

2017.10.28