

- K氏：やあ，コニー，構造力学談話もとうとう第9話に入ったね。長丁場のお付き合いそろそろ飽きてきたころじゃないかな。
- コニー：こんにちは，Kさん。第9話は確かカステリアーノの定理のお話だったわね。いままでの談話ノートをときどき読み返したりしているんだけど，飽きるということは全然ないわ。そんなことより本日のメインテーマであるカステリアーノの定理とは一体どういうものなの？
- K氏：うん，第6話，第7話では仮想仕事法や弾性曲線法，モーメントの定理で「はり」の変形を求めたね。カステリアーノの定理は「ラーメン」や「トラス」の変形までも求めることのできる一般的な方法なんだ。構造物は外力で変形されるとひずみのエネルギーが溜まるね。このひずみのエネルギーに注目して変形を調べていこうといったものなんだ。力学的な知識が要求されるけど適時補充しながら進めていくので気楽に聴いていけばいいと思う。ちなみにカステリアーノは人名でフルネームはカルロ・アルベルト・カステリアーノ (Carlo Alberto Castigliano, 1847-1884) といい，イタリアの数学者、物理学者で1873年にこの定理を確立したとのことだ。
- コニー：そうなんだ。それではお願いします。
- K氏：OK。それではぼちぼちと進めよう。

## 構造物の弾性変形

### (1) モーメントのなす仕事

- K氏：第6話でモーメントのなす仕事量  $W$  はモーメント  $M$  と回転角  $\theta$  の積  $W = M\theta$  として定義されることを説明した。モーメントは回転軸から1点  $P$  までの距離と点  $P$  に作用する力  $F$  との積なので，次元的には仕事の次元と同じだ。 $\theta$  は無次元量なので  $M\theta$  をモーメントのなす仕事量と定義してもなんら不都合はない。しかし，なにか直感的には割り切れないものを感じないかい？
- コニー：どういうこと， $M$  になんらかの無次元量を掛けたものもモーメントのなす仕事量になるんじゃないかということ。
- K氏：うん，そういう懸念も生じるじゃないかと。。しかし，この心配は口で説明するより絵を見た方が早いだろう。 $W = M\theta$  の定義の妥当性も納得できると思うけど。

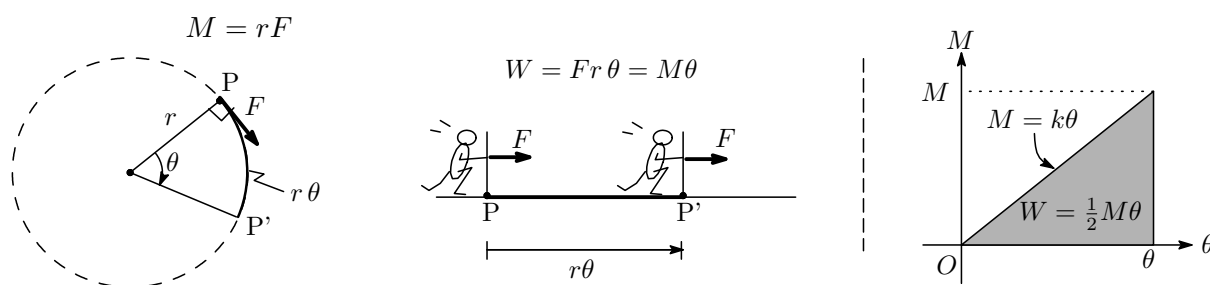


図 9.1: モーメントのなす仕事

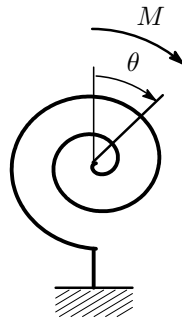
- コニー：そうね。分かりやすい絵ね。
- K氏：もし  $M$  とそれによって引き起こされる回転角  $\theta$  との間に  $M = k\theta$  という比例関係があったとすると、このときの仕事量は図 9.1 の塗りつぶした三角形の面積に等しいので

$$W = \frac{1}{2}M\theta \quad (9.1)$$

で与えられる。例えばねじりバネに力のモーメントを作用させた場合、力のモーメント  $M$  でねじりバネを  $d\theta$  回転させる仕事は

$$dW = Md\theta = k\theta d\theta$$

で表されるね。これは (6.8) の「曲げモーメントによる仕事量」の式を微分形式で表したもので、これを  $\theta$  を 0 から  $\theta$  まで積分すれば、ねじりバネに蓄えられるひずみのエネルギーが得られる。



$$W = k \int_0^\theta \theta d\theta = \frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}M\theta$$

## (2) ひずみエネルギー

### A. (圧縮・引張) 軸方向力によるひずみエネルギー

- K氏：一様な断面積  $A$ 、長さが  $\ell$  の真直棒にかかる荷重が  $P = 0$  から  $P$  まで増加したとき、フックの法則に従う弾性範囲で外力がなした仕事量を  $U_N$  としよう。 $U_N$  は図 9.2 の斜線部の三角形

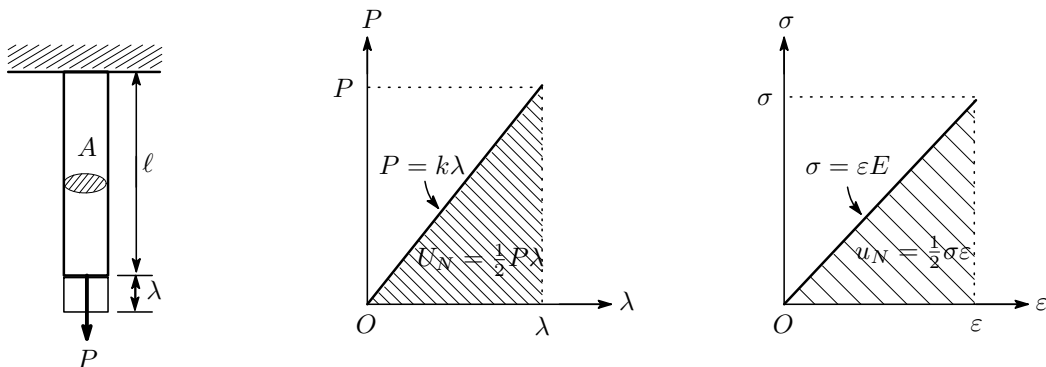


図 9.2: 荷重 - 伸び図

の面積に等しく

$$U_N = \int_0^\lambda P d\lambda = \frac{1}{2}P\lambda \quad (9.2)$$

で与えられる。棒の内部にはこの仕事量  $U_N$  だけひずみのエネルギーが蓄積される。

- コニー：(9.2) の積分を実行しなくても  $U_N$  は斜線部の三角形の面積となるので  $U_N = \frac{1}{2}P\lambda$  となるのは分かるけど、 $P$  を伸び  $\lambda$  の関数として積分を実行すればどうなるの。
- K 氏：うん、第 6 話で話したように縦ひずみを  $\varepsilon$ 、垂直応力を  $\sigma$  とすると

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\ell}, \quad \sigma = \varepsilon E = \frac{P}{A} \quad (E: \text{ヤング率}) \quad (9.3)$$

という関係があった。これから  $P$  は  $\lambda$  の関数として

$$P(\lambda) = \frac{EA}{\ell} \cdot \lambda \equiv k\lambda \quad (k = EA/\ell) \quad (9.4)$$

と得られるので、これを (9.2) に入れて積分を実行すると

$$U_N = \int_0^\lambda P d\lambda = k \int_0^\lambda \lambda d\lambda = \frac{1}{2}k\lambda^2 = \frac{1}{2}P\lambda \quad (9.5)$$

となる。(9.3) より  $\lambda = \frac{P\ell}{AE}$  であるので、これを (9.2) に入れると

$$U_N = \frac{P^2\ell}{2AE} = \frac{1}{2}k\lambda^2 \quad (9.6)$$

と表せる。ここで、ひずみエネルギー  $U_N$  を変位  $\lambda$  で微分するとその変位に対応する  $P$  となることに注意しておこう。これはカステリアーノの第 1 定理の帰結だが、詳しい話はまた後ほど。

$$\frac{\partial U_N}{\partial \lambda} = P \quad (9.7)$$

さて、 $d\lambda = \ell d\varepsilon$  であるので  $U$  は次のようにも表せる。

$$U_N = \int_0^\varepsilon EA\ell \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2}EA\ell \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{A\ell}{E} \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon V \quad (V = A\ell: \text{真直棒の体積}) \quad (9.8)$$

また、単位体積当たりのひずみのエネルギーを  $u_N$  とすると

$$u_N = \frac{U}{V} = \frac{1}{2E} \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (9.9)$$

単位体積当たりのひずみのエネルギー  $u$  を変位  $\varepsilon$  で微分すると

$$\frac{\partial u_N}{\partial \varepsilon} = \sigma \quad (9.10)$$

となって、(9.7) と同様の関係式がでてくる。

ところで断面積  $A$  が一様でなく  $A(x)$  で表される場合、単位体積当たりのひずみエネルギーは

$$u_N = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2E} \left( \frac{P}{A(x)} \right)^2 \quad (9.11)$$

で、棒全体のひずみエネルギーは  $u_N$  を棒全体にわたって積分したものになるので

$$U_N = \int_0^\ell u_N \cdot A(x) dx = \int_0^\ell \frac{P^2}{2EA(x)} dx \quad (9.12)$$

と表される。

さて、第4話で話をしたけど、トラス構造では各部材に軸方向力だけが働くという特長があったね。この力で各部材にはひずみエネルギーが溜まるわけだ。そこで図9.3に示す荷重 $P$ が作用している断面積 $A$ 、長さ $L$ の部材からなる正三角形トラスの全ひずみエネルギーを求めてみよう。コニーやってみるか。

- コニー：余り気が進まないけど ... 復習を兼ねてやってみるわ。まず反力を求めるのね。支点Bはローラー支点だから鉛直方向の反力 $V_B$ しか生じない。力のつり合いから

$$\sum X = H_A + P = 0, \quad \sum Y = V_A + V_B = 0, \quad \sum M = L \times V_A + L \times P \cos 30^\circ = 0$$

$$\therefore H_A = -P, \quad V_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}P, \quad V_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

次に各部材の軸方向力を求めなければならない。。

- K氏：うん、第4話で説明した切断法を使えばいいね。切断法というのは
  - 1) 軸方向力を求めようとする部材のある箇所切断する。
  - 2) 切断した部材の軸方向力を設定する。
  - 3) 力のつり合いの式から軸方向力を求める。

というものだった。

- コニー：そうだったわね。まず(1)のように切断し節点Aでの軸方向力を $N_{AB}$ 、 $N_{AC}$ として力のつり合いの式を立てると

$$\begin{cases} \sum X = H_A + N_{AB} + N_{AC} \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y = V_A + N_{AC} \sin 60^\circ = 0 \end{cases} \quad \therefore N_{AB} = \frac{P}{2}, \quad N_{AC} = P \quad (\text{圧縮力})$$

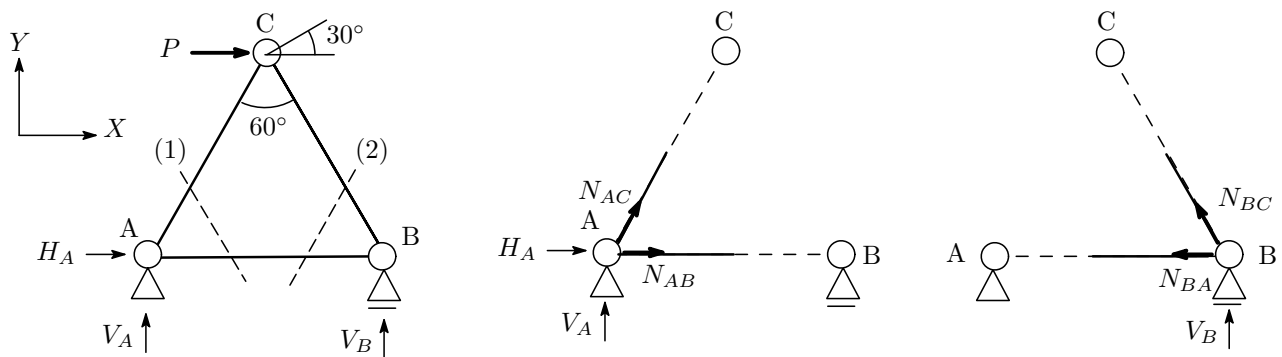


図 9.3: トラス構造

次に(2)のように切断して軸方向力を $N_{BA}$ 、 $N_{BC}$ とすると力のつり合いから

$$\begin{cases} \sum X = -N_{BA} - N_{BC} \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y = V_B + N_{BC} \sin 60^\circ = 0 \end{cases} \quad \therefore N_{BA} = \frac{P}{2} \quad (\text{圧縮力}), \quad N_{BC} = -P \quad (\text{引張力})$$

と求められる。トラス構造の全ひずみエネルギーは各部材のひずみエネルギーを足し合わせたの  
 もになり，それぞれ  $U_{AB}$ ,  $U_{AC}$ ,  $U_{BC}$  とすると (9.6) より

$$U_N = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = \frac{L}{2AE} (N_{AB}^2 + N_{AC}^2 + N_{BC}^2) = \frac{9P^2L}{8AE}$$

となるわね。

- K 氏：そうだね。これを一般化して  $n$  本の部材からなるトラスの  $i$  番目の部材力を  $S_i$ ，断面積を  $A_i$ ，部材の長さを  $L_i$ ，ヤング率を  $E_i$  とするとトラスの中に蓄えられるひずみエネルギー  $U$  は

$$U_N = \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2 L_i}{2A_i E_i} \quad (9.13)$$

と表せる。ここで

$$\rho_i = \frac{L_i}{A_i E_i} \quad (9.14)$$

という記号を導入すると (9.13) は

$$U_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_i^2 \rho_i \quad (9.15)$$

と書くこともできる。

- コニー：部材力ってのはじめてでてきた言葉ね。軸方向力のことではないの？
- K 氏：うん，軸方向力は断面力の一つだね。トラスの場合，断面力は軸方向力だけなので断面力と呼ばずに「部材力」としているんだ。中身はご指摘の通りだけど。

## B. せん断力によるひずみエネルギー

- K 氏：断面（面積  $A$ ）にせん断力  $Q$  が作用し，せん断ひずみ  $\gamma$  が生じているときのせん断ひずみエネルギー  $U_Q$  を求めよう。

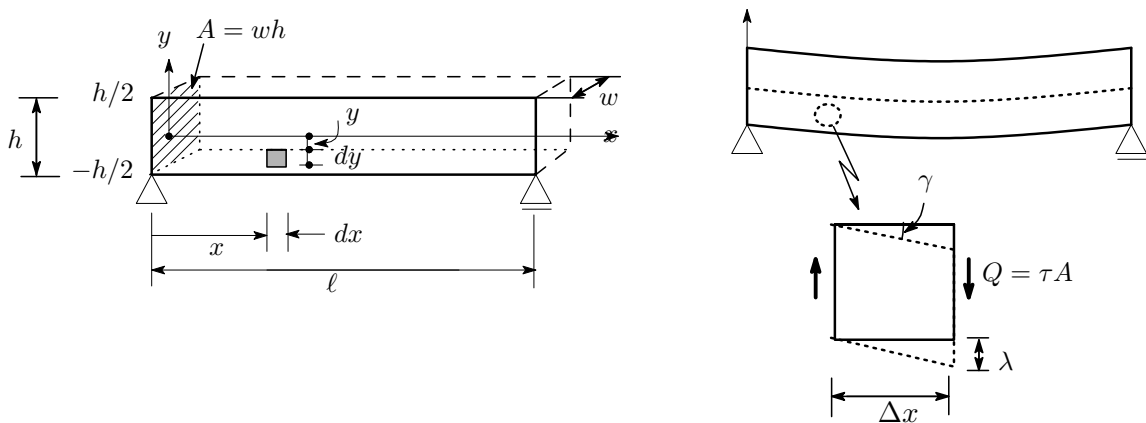


図 9.4: せん断力による歪エネルギー

せん断応力  $\tau$  とせん断ひずみ  $\gamma$  の間には ( $\gamma$  が小さい範囲で)

$$\tau = G\gamma, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (9.16)$$

というフックの法則の関係が成立し，比例定数  $G$  をせん断弾性係数という。 $\gamma$  の単位は rad， $G$  の単位は  $\text{N}/\text{mm}^2$ 。(9.16) より

$$\tau = \frac{Q}{A} = G \frac{\lambda}{\Delta x} \longrightarrow \lambda = \frac{\Delta x}{GA} Q, \quad \therefore d\lambda = \frac{\Delta x}{GA} dQ$$

となるので，せん断力によるひずみエネルギー  $U_Q$  は

$$U_Q = \int_0^\lambda Q d\lambda = \frac{\Delta x}{GA} \int_0^Q Q dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \Delta x}{GA} \quad (9.17)$$

単位体積当たりのひずみエネルギーを  $u_Q$  とすると

$$u_Q = \frac{U_Q}{A \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{GA^2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma \quad (9.18)$$

となる。この式は (9.9) と同じ形をしているね。

### C. 曲げによるひずみエネルギー

- K 氏：はりの曲げによって蓄えられるひずみエネルギー  $U_M$  を求めよう。図 6.2 も参照してほしい。いま，長さが  $\ell$  のはりの微小部分  $dx$  について考える。微小部分  $dx$  に作用する曲げモーメントを  $M(x)$  とする。部材断面の回転角を  $d\theta$  とすると (6.2)，(6.5) より

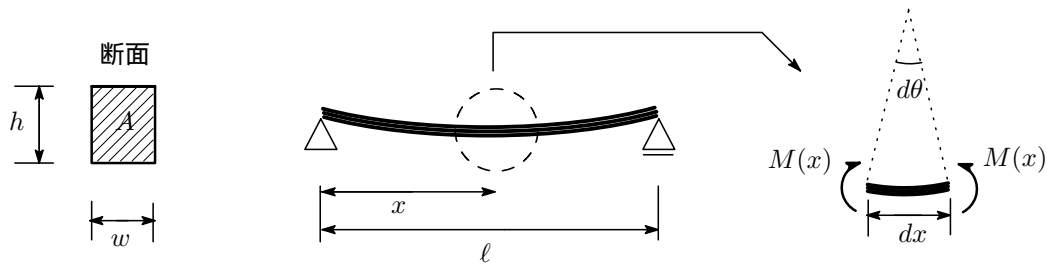


図 9.5: 曲げによる歪エネルギー

$$d\theta = \frac{M(x)}{EI} dx \quad (EI: \text{曲げ剛性})$$

このとき，はりに蓄えられるひずみエネルギー  $U_M$  は (9.1) より

$$dU_M = \frac{1}{2} M(x) d\theta = \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EI} dx$$

となるね。はり全体に蓄えられるエネルギーは，全長にわたって積分すればいいので

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M(x)^2}{EI} dx \quad (9.19)$$

となる。少し理論的な話が続いたのでうんざりしたかもしれない。具体的な問題をやってみよう。

- コニー：肩が凝りそうな問題かしら？
- K 氏：そうでもないよ。公式の使い方の練習だな。第 2 話で単純ばりの任意の 1 点に集中荷重が作用しているケースを取り扱ったね。このはりのひずみのエネルギーを求めようというものだ。

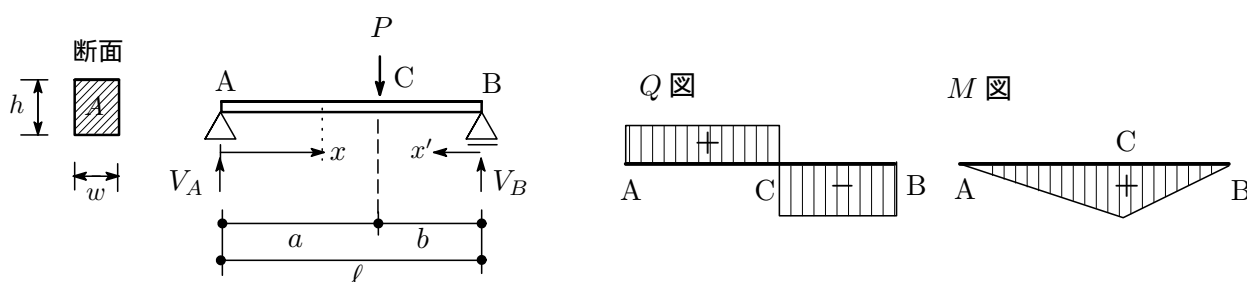


図 9.6: 単純ばりの歪エネルギー

支点 A からの距離  $x$  における部位でのせん断力  $Q(x)$ ，曲げモーメント  $M(x)$  は次のように与えられた。

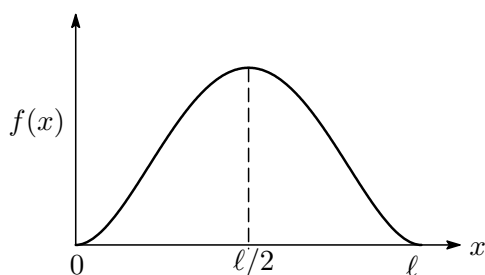
$$\begin{array}{ll} \text{せん断力 } Q & \text{曲げモーメント } M \\ \text{AC 間 } Q(x) = \frac{b}{\ell}P & M(x) = \frac{b}{\ell}Px \quad (0 \leq x \leq a) \\ \text{BC 間 } Q(x) = -\frac{a}{\ell}P & M(x) = \frac{a}{\ell}P(\ell - x) \quad (a \leq x \leq \ell) \end{array}$$

まず，(9.19) を使って曲げモーメント  $M(x)$  によるひずみエネルギー  $U_M$  を求めよう。

a) 曲げモーメントによるひずみエネルギー：  $M(x)$  は C 点を境に変わるので積分は  $0 \leq x \leq a$  と  $a \leq x \leq \ell$  の 2 つの範囲に分けて実行すればいい。面倒な積分だけど機械的に計算するだけで

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{EI} \left( \frac{b}{\ell}Px \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^\ell \frac{1}{EI} \left( \frac{a}{\ell}P(\ell - x) \right)^2 dx = \frac{a^2 b^2 P^2}{6EI\ell} \quad (9.20)$$

と求められる。  $U_M$  の大体の傾向を知るために  $f(x) = x^2(\ell - x)^2/\ell$  という関数形を調べると  $x = \ell/2$  の中央で最大値をとることが分かる。したがって曲げモーメントによる歪エネルギーが



最大値をとるのは荷重  $P$  がはりの中央に作用したときで，(9.20) に  $a = b = \ell/2$  を代入すると

$$U_M^{max} = \frac{P^2 \ell^3}{96EI} \quad (9.21)$$

と得られる。

- コニー：確かににはりの真ん中に載ったとき，はりが一番曲がるものね。はりに溜まる歪エネルギーは最大になるわけね。
- K 氏：次にせん断力  $Q(x)$  によるひずみエネルギー  $U_Q$  を求めよう。

b) せん断力によるひずみエネルギー：第 8 話「曲げによるせん断応力」の項も参照。微小体積

$dA \cdot dx$  のひずみエネルギーは (9.18) より

$$dU_Q = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma dA dx$$

したがって全体のひずみエネルギーは

$$U_Q = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_A \frac{\tau^2}{G} dA dx \quad (9.22)$$

となるね。ところで、せん断応力  $\tau$  は (8.20) より

$$\tau = \frac{1}{Ah^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot \frac{Q(x)}{A}$$

で与えられた。これを (9.22) に入れると

$$U_Q = \frac{1}{2GA^2} \int_0^\ell Q(x) dx \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dA$$

$dA = w dy$  なので変数  $y$  についての積分を先に計算すると

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dA = w \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dy = \frac{6}{5} wh = \frac{6}{5} A$$

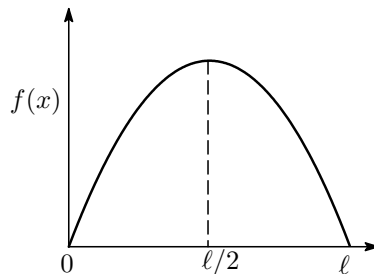
となるので、 $U_Q$  は

$$U_Q = \frac{3}{5GA} \int_0^\ell Q(x) dx \quad (9.23)$$

で表されることになる。せん断力  $Q(x)$  は AC 間で  $Q(x) = bP/\ell$  , BC 間で  $Q(x) = -aP/\ell$  なので

$$U_Q = \frac{3}{5GA} \left\{ \int_0^a \left( \frac{bP}{\ell} \right)^2 dx + \int_0^b \left( -\frac{aP}{\ell} \right)^2 dx' \right\} = \frac{3abP^2}{5GA\ell} \quad (9.24)$$

と求められる。 $U_Q$  の大体の傾向を知るために  $f(x) = x(\ell - x)/\ell$  という関数形を調べると  $x = \ell/2$  の中央で最大値をとることが分かる。



(9.24) に  $a = b = \ell/2$  を代入すると

$$U_Q^{max} = \frac{3\ell P^2}{20AG} \quad (9.25)$$

- コニー：え～っと、たしか第6話で、“曲げモーメントのなす仕事はせん断力のなす仕事よりはるかに大きいので、仮想仕事法において曲げモーメントによる仕事だけを考えればよい”といったお話があったわね。いま、 $U_M$  と  $U_Q$  が求められたので大きさの比較をするとどの程度になるの？



- K氏：いい質問だ。(9.20)と(9.24)を比較すればいいのだが，前者にはヤング率と断面の2次モーメント  $I$  が含まれ，後者はせん断係数  $G$  が含まれているのですぐには比較できないので，ヤング率  $E$  とせん断弾性係数  $G$  の間に成立する次の関係式を使う。 $\nu$  をポアソン比として

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\nu = -\varepsilon'/\varepsilon, \quad \varepsilon' : \text{横ひずみ度} \quad \varepsilon : \text{縦ひずみ度}) \quad (9.26)$$

$\nu$  は弾性限界内では材料固有の定数となり  $0 \sim 0.5$  の範囲をとる。これから  $G$  は  $E$  の  $1/3 \sim 1/2$  の大きさとなることが分かる。いま，材料のポアソン比が  $\nu = 0.3$  とすると  $G = (5/13)E$ 。また，このはりの断面2次モーメントは  $I = wh^3/12 = Ah^2/12$  だね。これらの関係を利用すると  $U_Q$  は

$$U_Q = \frac{13}{100} \cdot \frac{abh^2 P^2}{EI\ell} \quad (9.27)$$

と表せ， $U_Q$  と  $U_M$  の比をとると

$$\frac{U_Q}{U_M} = \frac{39h^2}{50ab}$$

となる。とくに  $a = b = \ell/2$  のときは

$$\frac{U_Q}{U_M} = 3.12 \left( \frac{h}{\ell} \right)^2$$

はりの高さ  $h$  とはりの全長  $\ell$  との比を  $h/\ell = 1/10$  とすれば  $U_Q/U_M \doteq 0.03$  となる。通常のはりでは  $h/\ell < 1/10$  であるから，はりのひずみエネルギーを計算するときにはせん断力の影響は無視できるというわけだ。

- コニー：なるほどね。
- K氏：それでは最後にカステリアーノの定理に進もう。

### カステリアーノの定理

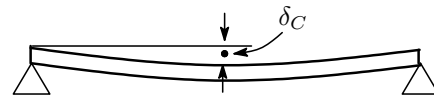
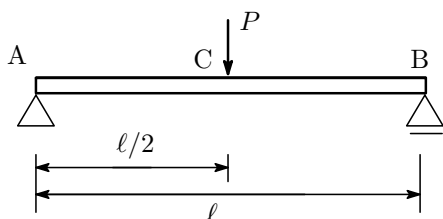
- K氏：カステリアーノの定理には第1定理と第2定理の2つある。簡単に紹介しておこう。

1) カステリアーノの第1定理：

「ひずみエネルギーを外力が作用している点の変位で微分したものは外力に等しい」

公式的に書くと

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (9.28)$$



長さが  $\ell$  の単純ばりの中央に荷重  $P$  が作用しているとき、ひずみエネルギーとたわみは (9.21), (7.19) で与えられている

$$U = \frac{P^2 \ell^3}{96EI}, \quad \delta_C = \frac{P\ell^3}{48EI} \longrightarrow U = \frac{24EI}{\ell^3} \delta_C^2$$

$U$  を  $\delta_C$  で微分すると

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_C} = \frac{48EI}{\ell^3} \delta_C = P$$

となって、荷重  $P$  が得られる。

2) カステリアーノの第2定理：

「ひずみエネルギーをその点に作用している外力で微分したものは、その点での変位に等しい」

第1定理と逆の関係になっているね。公式的に書くと

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}, \quad \theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \quad (9.29)$$

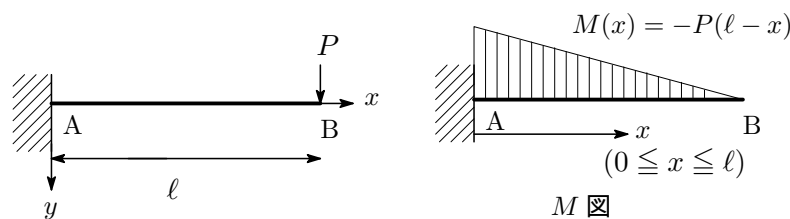
上の単純ばりのケースに適用すると

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P\ell^3}{48EI} = \delta_C$$

となるね。

それでは例題に当たってこよう。

1) コニー、眠気覚ましに下図の片持ちのばりのB点でのたわみ  $y_B$  をカステリアーノの第2定理を使って求めてごらん。片持ちばりの自由端に荷重  $P$  が作用しているケースだ。図は図 7.3 を再掲した。



- コニー：ちょっととうとうしかけたけど、目が覚めるわね。まず、ひずみエネルギーを求めなくては。ひずみエネルギーは曲げモーメントによるものだけを考えればいいのね。 $x$  の距離での曲げモーメントは  $M(x) = -P(\ell - x)$  なのでひずみエネルギーは (9.19) より

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{P^2(\ell - x)^2}{EI} dx = \frac{\ell^3 P^2}{6EI}$$

B 点のたわみ  $\delta_B$  はカステリアーノの第2定理から

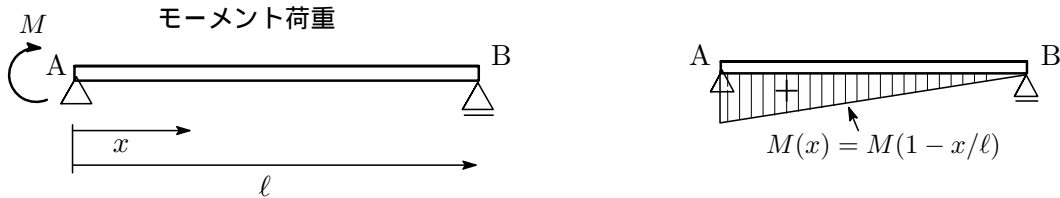
$$\delta_B = \frac{\partial U_M}{\partial P} = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (9.30)$$

となって (7.15) と一致する。

- K氏：OK。

2) 次に単純ばりの支点 A にモーメント荷重  $M_0$  が作用している場合, A 点におけるたわみ角  $\theta_A$  をカステリアーノの第 2 定理を使って求めよう。支点 A から距離  $x$  の位置の曲げモーメントは (6.17) より

$$M(x) = M \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$



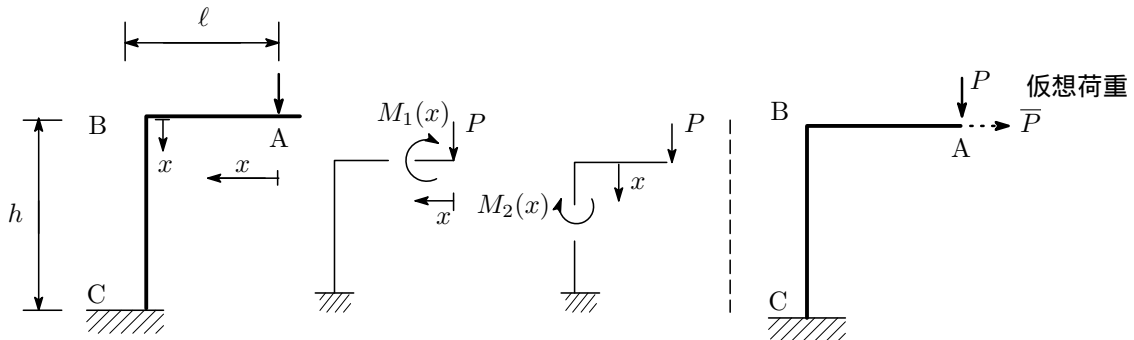
カステリアーノの第 2 定理よりたわみ角  $\theta_A$  は

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{\partial U_M}{\partial M} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{M(x)^2}{EI} \right) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial M} \left\{ M^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^\ell M \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{M\ell}{3EI} \end{aligned}$$

と求められる。

3) 片持ちばり型ラーメンにおいて, 曲げによるひずみエネルギー  $U_M$  と荷重点 C の鉛直変位  $\delta_{AV}$  と水平変位  $\delta_{AH}$  を求めよう (軸方向力によるたわみエネルギーは無視)。

AB 間, BC 間でそれぞれ仮想切断し, 部材 AB, BC 間それぞれの力のつり合いの式を立て, 曲げモーメントを求める。その結果,



$$\text{AB 間 } M_1 = -Px \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

$$\text{BC 間 } M_2 = -P\ell \quad (0 \leq x \leq h)$$

曲げによる片持ちラーメン全体のひずみエネルギーを  $U$  とすると

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_1^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^h \frac{M_2^2}{EI} dx = \frac{(3h + \ell)P^2\ell^2}{6EI} \end{aligned}$$

$\delta_{AV}$  はカステリアーノの第 2 定理より

$$\delta_{AV} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{(3h + \ell)P\ell^2}{3EI}$$

次に水平変位  $\delta_{AH}$  を求める。この場合の手順は、荷重  $P$  の代わりに仮想荷重  $\bar{P}$  を水平方向に作用させて曲げモーメントを求め、ひずみエネルギーを計算する。そしてカステリアーノの第2定理より水平方向のたわみを求めてから  $\bar{P} \rightarrow 0$  として  $\delta_{AH}$  を算出する。

$$\begin{aligned} \text{AB間} \quad M_1 &= -Px \quad (0 \leq x \leq \ell) \\ \text{BC間} \quad M_2 &= -P\ell - \bar{P}x \quad (0 \leq x \leq h) \end{aligned}$$

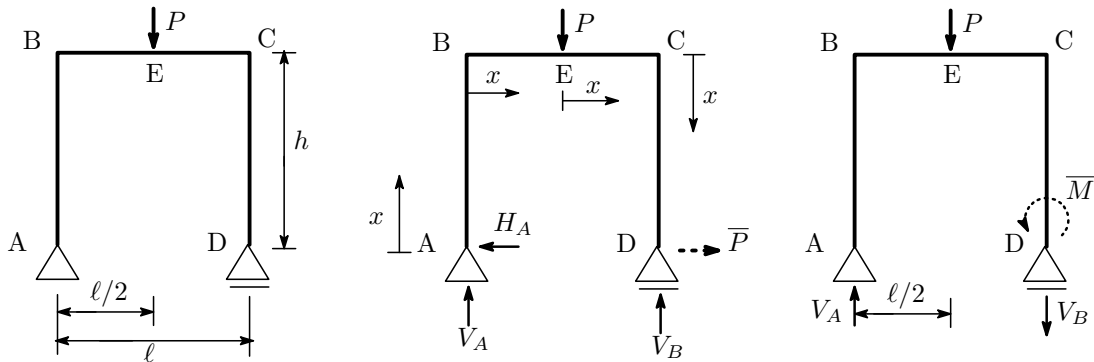
これから

$$U = \frac{(\ell^3 + 3h\ell^2)P^2 + 3h^2\ell P\bar{P} + h^3\bar{P}^2}{6EI} \quad (9.31)$$

$\delta_{AH}$  はカステリアーノの第2定理より

$$\delta_{AH} = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} \Big|_{\bar{P} \rightarrow 0} = \frac{(3P\ell h^2 + 2h^3 X)}{6EI} \Big|_{\bar{P} \rightarrow 0} = \frac{P\ell h^2}{2EI}$$

4) 図に示すようにラーメン構造の部材 BC の中点に鉛直荷重  $P$  が作用しているとき、D 点における水平変位  $\delta_{DH}$  とたわみ角  $\theta_D$  を求めよう。この場合、D 点に仮想荷重  $\bar{P}$ 、仮想モーメント荷重  $\bar{M}$  を作用させ、最後に  $\bar{P} \rightarrow 0$ 、 $\bar{M} \rightarrow 0$  とすればよいわけだね。まず、D 点に  $\bar{P}$  を作用させて水平変位  $\delta_{DH}$  を求めよう。各支点 A、B での反力を求めてから各部材に生じる曲げモーメントを求める。支点の反力を  $V_A$ 、 $V_D$ 、 $H_A$  とすると



$$\begin{aligned} \sum X &= -H_A + \bar{P} = 0 \quad \therefore H_A = \bar{P} \\ \sum Y &= P - (V_A + V_D) = 0 \quad \therefore V_A + V_D = P \\ \sum M_A &= -\ell V_D + \frac{\ell}{2}P = 0 \quad \therefore V_D = V_A = \frac{P}{2} \end{aligned}$$

したがって、各部材に生じる曲げモーメントは

$$\begin{aligned} \text{AB間} \quad M_1(x) &= xH_A = \bar{P}x \\ \text{BE間} \quad M_2(x) &= xV_A + hH_A = \frac{P}{2}x + h\bar{P} \\ \text{EC間} \quad M_3(x) &= -xP + \left(\frac{\ell}{2} + x\right)V_A + hH_A = -Px + \left(\frac{\ell}{2} + x\right)\frac{P}{2} + h\bar{P} \\ \text{CD間} \quad M_4(x) &= (h-x)\bar{P} \end{aligned}$$

となる。ひずみエネルギーの総量は

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_i(x)^2}{2EI} dx \\ &= \int_0^h \frac{M_1(x)^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell/2} \frac{M_2(x)^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell/2} \frac{M_3(x)^2}{2EI} dx + \int_0^h \frac{M_4(x)^2}{2EI} dx \end{aligned}$$

カステリアーノの第2定理より  $\delta_{DH} = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}}$  としていままでやったように直接求めてもよいが、積分計算が面倒だ。そこで通常は合成関数の微分法を活用して

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{P}} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial U}{\partial M_i} \frac{\partial M_i}{\partial \bar{P}} = \frac{\partial U}{\partial M_1} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U}{\partial M_2} \frac{\partial M_2}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U}{\partial M_3} \frac{\partial M_3}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U}{\partial M_4} \frac{\partial M_4}{\partial \bar{P}}$$

と展開しておく。そうすると各項は次の積分計算に置き換わる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial M_1} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{P}} &= \int_0^h \frac{M_1}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^h \frac{\bar{P}}{EI} x^2 dx = \frac{h^3 \bar{P}}{3EI} \\ \frac{\partial U}{\partial M_2} \frac{\partial M_2}{\partial \bar{P}} &= \int_0^{\ell/2} \frac{M_2}{EI} \frac{\partial M_2}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left( \frac{P}{2} x + h\bar{P} \right) h dx = \frac{h\ell(\ell + 8h\bar{P})}{16EI} \\ \frac{\partial U}{\partial M_3} \frac{\partial M_3}{\partial \bar{P}} &= \int_0^{\ell/2} \frac{M_3}{EI} \frac{\partial M_3}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left\{ -Px + \left( \frac{\ell}{2} + x \right) \frac{P}{2} + \bar{P}h \right\} h dx = \frac{h\ell(P\ell + 8h\bar{P})}{16EI} \\ \frac{\partial U}{\partial M_4} \frac{\partial M_4}{\partial \bar{P}} &= \int_0^h \frac{M_4}{EI} \frac{\partial M_4}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^h \frac{1}{EI} \bar{P}(h-x)(h-x) dx = \frac{h^3 \bar{P}}{3EI} \end{aligned}$$

これから

$$\delta_{DH} = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} \Big|_{\bar{P}=0} = \frac{h\ell^2 P}{8EI}$$

次にたわみ角  $\theta_D$  を求める。支点 D に仮想モーメント  $\bar{M}$  を作用させ、反力を求める。

$$\begin{aligned} \sum Y &= P - V_A + V_D = 0 \quad \therefore V_A - V_D = P \\ \sum M_A &= \frac{\ell}{2} P + \bar{M} - \ell V_D = 0 \quad \therefore V_D = \frac{\bar{M}}{\ell} - \frac{P}{2}, \quad V_A = \frac{\bar{M}}{\ell} + \frac{P}{2} \end{aligned}$$

各部材に生じる曲げモーメントは

$$\begin{aligned} \text{AB間} \quad M_1(x) &= 0 \\ \text{BE間} \quad M_2(x) &= xV_A = \frac{\bar{M}}{\ell} x + \frac{P}{2} x \\ \text{EC間} \quad M_3(x) &= -xP + \left( \frac{\ell}{2} + x \right) V_A = -\frac{P}{2} x + \frac{\bar{M}}{2} + \frac{P\ell}{4} + \frac{\bar{M}}{\ell} x \\ \text{CD間} \quad M_4 &= \bar{M} \end{aligned}$$

したがって、カステリアーノの第2定理より

$$\begin{aligned} \theta_D &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left( \frac{\bar{M}}{\ell} x + \frac{P}{2} x \right) \left( \frac{x}{\ell} \right) dx \\ &\quad + \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{2} x + \frac{\bar{M}}{2} + \frac{P\ell}{4} + \frac{\bar{M}}{\ell} x \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{\ell} \right) dx + \int_0^h \frac{1}{EI} \bar{M} dx \\ &= \frac{(2\bar{M} + P\ell)\ell}{48EI} + \frac{(7\bar{M} + P\ell)\ell}{24EI} + \frac{h\bar{M}}{EI} \end{aligned}$$

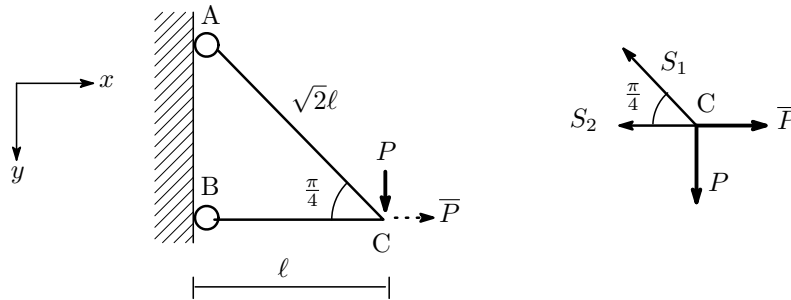
ここで  $\bar{M} \rightarrow 0$  とすると

$$\theta_D = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

5) 図のように点 A, B がピン接合で壁に固定された 2 本の部材からなるトラスがあり, 点 C に荷重  $P$  が作用してる。点 C の鉛直方向の変位  $\delta_{CV}$  と水平方向の変位  $\delta_{CH}$  を求めよう。まず, 点 C に仮想荷重  $\bar{P}$  を作用させ, 各部材の部材力  $S_1, S_2$  を求める。点 C での力のつり合いより

$$\begin{aligned}\sum X &= \bar{P} - S_2 - S_1 \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y &= P - S_1 \sin 45^\circ = 0 \quad \therefore S_1 = \sqrt{2}P, S_2 = \bar{P} - P\end{aligned}$$

トラス全体のひずみエネルギーは (9.13) より



$$U_N = \frac{\sqrt{2}\ell S_1^2}{2AE} + \frac{\ell S_2^2}{2AE} = \frac{\ell}{2AE} \left\{ 2\sqrt{2}P^2 + (\bar{P} - P)^2 \right\}$$

したがってカステリアーノの第 2 定理より

$$\delta_{CV} = \frac{\partial U_N}{\partial P} \Big|_{\bar{P}=0} = \frac{(1 + 2\sqrt{2})P\ell}{AE}$$

$$\delta_{CH} = \frac{\partial U_N}{\partial \bar{P}} \Big|_{\bar{P}=0} = -\frac{P\ell}{AE}$$

これから点 C は下向きに  $\delta_{CV}$ , 左向きに  $\delta_{CH}$  変位することが分かる。

### カステリアーノの第 2 定理の導出

- K 氏：最後にカステリアーノの第 2 定理の導出をしておこう。まず, マクスウェルの相反定理の話からはいることにする。話は少し抽象的になるけど, 気楽に聴き流せばいいだろう。

1) マクスウェルの相反定理：弾性体の 2 点  $A_1, A_2$  を考える。いま, 点  $A_1$  に荷重  $P_1$  が作用して点  $A_1$  は  $A'_1$  に変位したとし,  $P_1$  方向の変位成分を  $a_{11}P_1$  とする。この状態において点  $A_2$  に荷重  $P_2$  を作用させ, その結果, 点  $A_1$  が荷重  $P_1$  の方向へ  $a_{12}P_2$  だけ変位したとしよう。

- 1) 点  $A_1$  において荷重  $P_1$  により  $P_1$  の方向へ  $a_{11}P_1$  だけ移動

2) 点  $A_1$  において荷重  $P_2$  により  $P_1$  の方向へ  $a_{12}P_2$  だけ移動

なお, 比例係数  $a_{ij}$  の最初の添え字  $i$  は変位点の位置, あとの添え字  $j$  は荷重点の位置を表すものとする。さて, 荷重  $P_1, P_2$  による点  $A_1$  の変位を  $\delta_1$  とすると,  $\delta_1$  は  $a_{11}P_1$  と  $a_{12}P_2$  との重ね合わせになる。

$$\delta_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 \quad (9.32)$$

点  $A_2$  においてもまったく同じことがいえるので, 点  $A_2$  における  $P_2$  方向の変位を  $\delta_2$  とすると

$$\delta_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 \quad (9.33)$$

となる。変位が  $\delta_1, \delta_2$  から  $d\delta_1, d\delta_2$  だけ増加するときのひずみエネルギーの増加  $dU$  は

$$dU = P_1d\delta_1 + P_2d\delta_2 \quad (9.34)$$

となる。

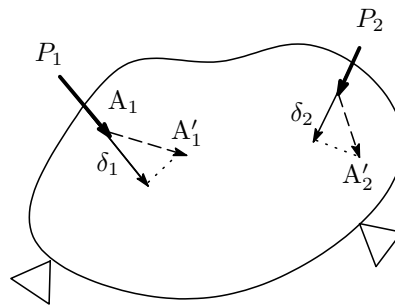


図 9.7: 荷重と変位

(9.32), (9.33) より

$$d\delta_1 = a_{11}dP_1 + a_{12}dP_2, \quad d\delta_2 = a_{21}dP_1 + a_{22}dP_2$$

これを (9.34) に入れて整理すると

$$dU = (a_{11}P_1 + a_{21}P_2)dP_1 + (a_{12}P_1 + a_{22}P_2)dP_2 \quad (9.35)$$

となるね。ところでひずみエネルギーは  $P_1, P_2$  の連続関数  $U = U(P_1, P_2)$  なので,  $U$  の全微分は

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2}dP_2$$

と表される。この式と (9.35) との比較より

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = a_{11}P_1 + a_{21}P_2, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 \quad (9.36)$$

を得る。(9.36) の第 1 式を  $P_2$  で, 第 2 式を  $P_1$  で偏微分すると

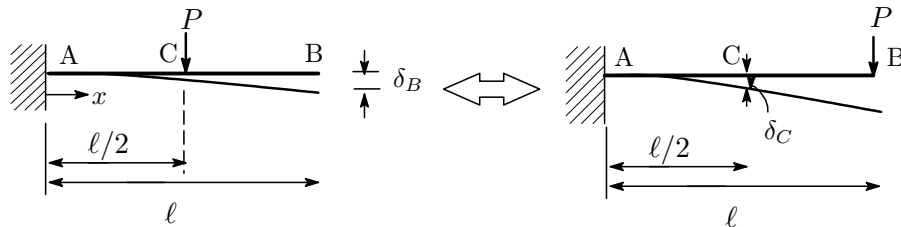
$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_1 \partial P_2} = a_{21}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial P_2 \partial P_1} = a_{12} \quad (9.37)$$

$U$  は連続関数なので微分の順序に無関係であることから

$$a_{21} = a_{12} \quad (9.38)$$

の関係が得られる。これをマクスウェルの相反定理という。一般に  $n$  個の荷重が作用した場合にも同様の関係 ( $a_{21} = a_{12}$ ,  $a_{31} = a_{13}$ , ...) が成立する。

- コニー：荷重としてモーメント荷重が作用すれば変位は回転角になるのかしら。
- K氏：その通りだ。力やモーメント荷重をあわせて一般化力，作用方向の移動量（距離や回転角）を一般化変位といっているね。
- コニー：そうなんだ。ところで式の展開はともかくとして，マクスウェルの相反定理の意味するところをかみ砕いて説明していただける？
- K氏：了解。 $a_{12}$  は  $A_2$  点に単位荷重  $P_2 = 1$  が作用したために点  $A_1$  に生じる  $P_1$  方向の変位だね。 $a_{21}$  は点  $A_1$  に単位荷重  $P_1 = 1$  が作用したために点  $A_2$  に生じる  $P_2$  方向の変位だ。これが相等しいということの意味する。つまり点  $A_2$  に単位荷重  $P_2 = 1$  が作用したために点  $A_1$  に生じる  $P_1$  方向の変位は，点  $A_1$  に単位荷重  $P_1 = 1$  が作用したために点  $A_2$  に生じる  $P_2$  方向の変位に等しいということなんだ。次の例題を考えよう。長さ  $\ell$  の片持ちばり AB の中点 C に荷重  $P$  が作用する場合，点 B におけるたわみ  $\delta_B$  を求めるという問題だ。自由端 B に荷重  $P$  が作用する場合，



中点 C におけるたわみ  $\delta_C$  は (7.9) より

$$\delta_C = \frac{P}{6EI} (3\ell - x)x^2 \Big|_{x=\ell/2} = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

マクスウェルの相反定理より，このたわみ  $\delta_C$  は点 C に荷重  $P$  が作用するために点 B のたわみ  $\delta_B$  に等しいことになる。

2) カステリアーノの第2定理：(9.36) に (9.38) を入れて整理すると

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = a_{11}P_1 + a_{21}P_2 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 = \delta_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 = \delta_2$$

の関係式が得られる。これを一般化力と一般化変位に拡張して表すと

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i, \quad \frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i \quad (9.39)$$

となる。これはカステリアーノの第2定理だね。ここらあたりで第9話を終ろう。盛りだくさんの内容で大変だったと思うけどゆっくり咀嚼していけばいいと思う。おかしい議論を見つけたら是非優しく指摘してほしい。第10話以降は気力と興味が湧いてきたらまた再開するかもしれない。

- コニー：大変お疲れさまでした。いままでのノートを読み返してみるわ。もしおかしいところを見つけたら連絡するわね。今年の冬は寒くなりそうだからお体を大切にしてください。それではまた～，さようなら。



## 参考文献

- 1) 浅野清昭：図説・優しい構造力学，学芸出版，2008年.
- 2) 阪口理，須賀好富，窪田敏行：テキスト建築構造力学1，学芸出版，1994年.
- 3) 太田和彦・藤井大地：はじめて学ぶ建築構造力学，森北出版，2008年.
- 4) 望月重，濱本卓司：改訂版・建築構造のための力学演習，鹿島出版会，2003年.
- 5) 平修二：現代材料力学，オーム社，昭和52年.
- 6) 有光隆：図解でわかるはじめての材料力学，技術評論社，2012年.