

質点系と剛体の運動方程式

H E N L O U

2010年1月6日

目次

1	運動の自由度	2
1.1	質点系の自由度	2
1.2	剛体の自由度	2
2	質点系の運動方程式	3
2.1	重心座標系からみた質点系の運動方程式	3
2.2	重心の運動量	4
2.3	運動量保存則	4
2.4	角運動量と角運動量保存則	4
2.5	運動エネルギー	5
2.6	エネルギー保存則	6
2.7	質点系力学のまとめ	7
2.8	やさしい応用	7
2.8.1	2体問題	7
2.8.2	2粒子の衝突	8
2.8.3	重心座標系から見た2粒子の完全弾性衝突	11
2.8.4	粒子の散乱	13
2.8.5	Ruthereford 散乱	14
3	剛体系の運動方程式	17
3.1	回転ベクトル	18
3.1.1	座標変換と直交行列	18
3.1.2	回転ベクトル	19
3.2	剛体の回転運動	21
3.2.1	慣性テンソル	21
3.2.2	剛体の角運動量	23
	簡単な質量分布の場合の慣性主軸と慣性モーメント	
		24
3.2.3	任意の点に原点を持つ座標軸に関する慣性テンソル	24
	平行軸の定理	
		25
3.3	剛体の運動方程式	26
3.3.1	オイラーの運動方程式	26

1 運動の自由度

1.1 質点系の自由度

1 個の質点があんどの束縛も受けずに自由に運動している場合、その運動は 3 つの独立変数で表すことができます。この変数は通常 3 次元直交座標 (x, y, z) か球面座標 (r, θ, ϕ) が採用されますが、独立変数の数を自由度といいます。2 個の質点¹が独立に運動する場合には、したがって、運動の自由度は $3 \times 2 = 6$ となり、一般に n 個の質点系の自由度は $3n$ で、系の運動を記述するのに $3n$ 個の独立変数が必要になります。

ところで、例えば 2 つの質点¹が棒で結びついている (2 粒子間の距離 r が一定) という束縛条件

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 \quad (1.1)$$

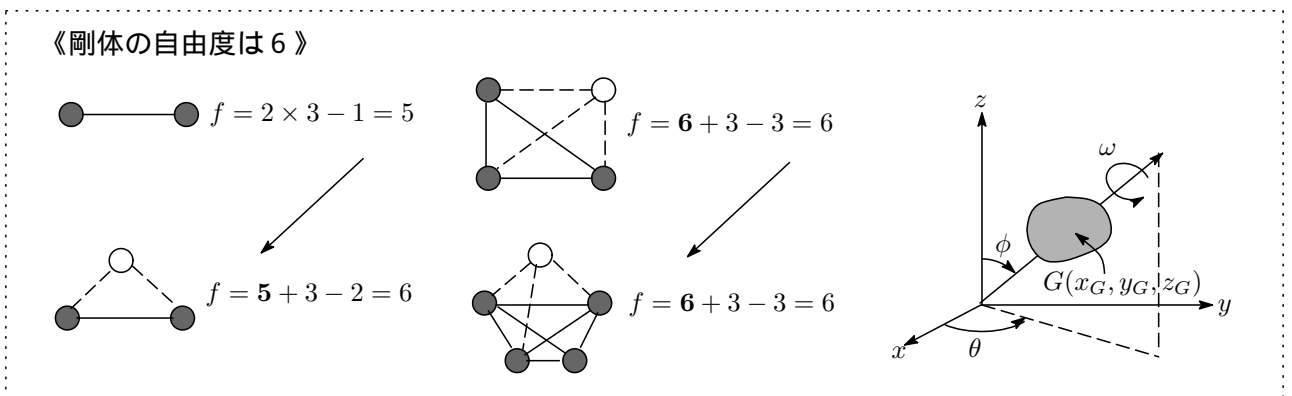
があると、6 番目の変数は条件 (1.1) により残りの変数の関数になるので自由度は 1 つ減って 5 になり、5 個の独立変数で運動が記述できることとなります。5 個の変数は、質点系の重心座標として 3 個、質点を結ぶ軸の方向を決める角変数として 2 個の合計 5 個の変数が通常用いられます。6 個の直交座標 $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ は、5 個のこれらの変数で表されることとなります。一般に n 個の質点系で束縛条件が r 個ある場合、その系の自由度 f は

$$f = 3n - r \quad (1.2)$$

となります。

1.2 剛体の自由度

次に n 個の質点からなる剛体の運動の自由度を考えましょう。まず 2 質点系の場合は 2 質点間の距離を固定するから自由度は $f = 3 \times 2 - 1 = 5$ 。この系に 3 番目の質点を加えると、この質点に束縛条件がなければ系の自由度は $f = 5 + 3 = 8$ となりますが、質点 1 と質点 2 からの距離が一定という 2 個の束縛条件が加わるので、その結果系の自由度は $f = 8 - 2 = 6$ となります。さらに第 4 の質点を加えると自由度は 3 増えますが、3 つの質点からの距離一定という 3 個の束縛条件があるため、結局自由度は $f = 6 + 3 - 3 = 6$ となり、増えた自由度の数と質点の束縛条件の数と同じで、系の自由度は増えないこと となります。結局、剛体の場合、無限個に匹敵する質点が集まっているけれども、剛体の運動は 6 個の独立変数で記述できる ということになります。というのは、剛体は並進運動と回転運動のみが可能¹なので、重心 G の並進運動の自由度が 3 個 (x_G, y_G, z_G) 、回転軸の方向を決める自由度が 2 個 (θ, ϕ) 、回転軸回りの回転角の自由度が 1 個 (ω) の合計 6 個となるわけです。



¹ 剛体は変形しないので並進と回転運動のみが可能。

《メモ》解析力学へ進むと「一般化座標」というのができます。力学系を記述するのに必要な変数の数を自由度といいましたが、力学系を記述できる変数であればなんでもよいということで、これら自由度の数だけの独立変数を一般化座標と呼んでいます。一般化座標は x, y, z や r, θ, ϕ などの幾何学的内容をもつ場合もあれば、そうでない場合もあります。詳しくはNOTE「解析力学」を参照ください。

2 質点系の運動方程式

多数の質点があり、質点間の相互作用、いわゆる内力と外部から力を受けている系の運動を考えます。 i 番目の質点の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \quad (2.1)$$

で表されます。ここで \mathbf{F}_i は外力で \mathbf{F}_{ij} は内力（相互作用力）とします。 i 番目の質点が j 番目の質点に及ぼす力を \mathbf{F}_{ij} 、逆に j 番目の質点が i 番目の質点に及ぼす力を \mathbf{F}_{ji} とすると、ニュートンの運動第3法則（作用・反作用の法則）より

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (2.2)$$

が成り立ちます。このことを踏まえて、各質点の運動方程式（2.1）を足し合わせると、内力の項が消しあって

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots \\ m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} &= \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (2.3)$$

となります。

2.1 重心座標系からみた質点系の運動方程式

質点系の重心座標²を \mathbf{R} とすると

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (M = \sum_i m_i) \quad (2.4)$$

なので、 \mathbf{R} を t で2階微分し、整理すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{F}_i \\ \therefore M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} &= \sum_i \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

となり、重心の並進運動方程式が得られます。したがって質点系の運動に関しては次のことが言えます。

- 質点系の運動は、外力が重心に作用していると考えたときの運動に等しい。
- 質点系の運動は外力のみによって決まり、内力には無関係である。

² 質量中心ともいいます。

2.2 重心の運動量

i 番目の質点の運動量を

$$\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (2.6)$$

で定義します。系の全運動量を \mathbf{P} とすると

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (2.7)$$

\mathbf{R} を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{M} \mathbf{P}, \quad \therefore M \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P} \quad (2.8)$$

が得られます。つまり、

- 質点系の全運動量は重心の運動量に等しい

ということになります。

2.3 運動量保存則

重心の並進運動の方程式 (2.5) より、質点系に外力が作用していなければ

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = M \dot{\mathbf{P}} = 0 \quad (2.9)$$

となって、質点系の全運動量は保存されることが分かります。これは、外力の作用がない場合、重心は等速直線運動するということを意味します。

2.4 角運動量と角運動量保存則

固定点 O の回りの i 番目の質点の角運動量を \mathbf{l}_i とすると、位置ベクトルを \mathbf{r}_i としたとき

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (2.10)$$

で定義され、質点系の全角運動量 \mathbf{L} は次式で定義されます。

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (2.11)$$

重心の位置ベクトルを \mathbf{R} 、重心から見た i 番目の位置ベクトルを \mathbf{r}'_i とすると

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \quad (2.12)$$

両辺に m_i を掛けて i についての総和をとると

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \mathbf{r}_i &= \mathbf{R} \sum_i m_i + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \\ \therefore \sum_i m_i \mathbf{r}'_i &= 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

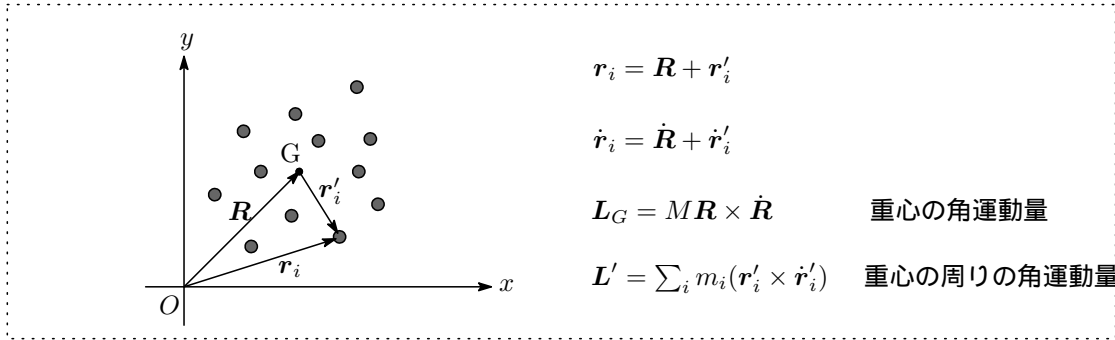
(2.11) を展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) \\ &= \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_i m_i (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{R}}) + \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i) \end{aligned}$$

この第2項は(2.13)により消えるので

$$\begin{aligned} L &= M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + \sum_i m_i(\mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i) \\ &= L_G + L' \end{aligned} \quad (2.14)$$

を得ます。これから、原点周りの全角運動量 L は、原点周りの重心の角運動量 L_G と重心の周りの質点系の角運動量 L' とに分解できることが分かります。



全角運動量 L の時間微分をとると

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i \left\{ \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right\} = \sum_i \left\{ \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right\} \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = N \quad (\because \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i = \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = 0, \quad d\mathbf{p}_i/dt = \mathbf{F}_i) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで \mathbf{F}_i は i 番目の質点に働く外力で、 N は質点系の力のモーメント。外力の作用がなければ

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

となつて、全角運動量は保存されます。 次ぎに重心周りの角運動量 L_G の時間微分をとると、式(2.5)を使って

$$\frac{dL_G}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times \mathbf{P}) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{F}_i = N_G \quad (\text{但し}, \mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}})$$

重心周りの角運動量 L' の時間微分は(2.14)(2.15)(2.16)より

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= \frac{dL}{dt} - \frac{dL_G}{dt} = N - N_G \\ &= \sum_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i] = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i) = N' \end{aligned} \quad (2.16)$$

これから、重心周りの全角運動量 L' の時間変化は、重心周りの力のモーメント N' だけで決まることが分かります。

2.5 運動エネルギー

全運動エネルギーを T とすると(2.13)を使って

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) \dot{\mathbf{R}} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

これから質点系の全運動エネルギーは、重心の運動エネルギーと重心系での各質点の運動エネルギーの和で表されることが分かります。

2.6 エネルギー保存則

質点系の内力が保存力である場合を考えます。運動方程式(2.1)の両辺に $\dot{\mathbf{r}}_i$ を掛けて整理すると

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2) = \dot{\mathbf{r}}_i \left\{ \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \right\}$$

が得られます。全ての質点について足し合わせると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2) &= \sum_i \left\{ \dot{\mathbf{r}}_i \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \right\} \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned} \quad (2.18)$$

で、 \mathbf{F}'_i は i 番目の質点に作用する内力の総和です。上式を t で積分すると

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2) dt &= \int_{t_0}^t \left\{ \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right\} dt \\ \therefore \left[\frac{1}{2} \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2) \right]_{t_0}^t &= \int_{t_0}^t \left\{ \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right\} dt \end{aligned} \quad (2.19)$$

この式の左辺は質点系の時刻 t と t_0 における全運動エネルギーの差を、一方、右辺は外力 \mathbf{F}_i と内力 \mathbf{F}'_i が時刻 t_0 から t の間になした仕事の和なので、運動エネルギーを T 、仕事を W で表すと

$$T - T_0 = W + W' \quad (2.20)$$

と書けます。いま、内力が保存力であるとするとポテンシャル U' が存在し³、 i 番目の質点に働く内力 \mathbf{F}_i は

$$\mathbf{F}_i = \left(-\frac{\partial U'}{\partial x_i}, -\frac{\partial U'}{\partial y_i}, -\frac{\partial U'}{\partial z_i} \right) \quad (2.21)$$

で表されるので、内力の仕事 W' は

$$\begin{aligned} W' &= \int_{t_0}^t \sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt = \int_{t_0}^t \sum_i \left(-\frac{\partial U'}{\partial x_i}, -\frac{\partial U'}{\partial y_i}, -\frac{\partial U'}{\partial z_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt = [-U']_{t_0}^t \\ &= -(U' - U'_0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

となります。これを(2.20)に入れると

$$T - T_0 = W - (U' - U'_0) \longrightarrow (T + U') - (T_0 + U'_0) = W$$

$T + U = E$ とおくと、これは系の全エネルギーですが、上の式は

$$E - E_0 = W \quad (2.23)$$

となり、これから次のことが言えます。

³ U は内部エネルギーと呼ばれます。

- 質点系のある時間内の全エネルギーの増加は、その時間内に働く外力の仕事に等しい。

さて、系に外力が作用しない場合は $W = 0$ となるので (2.23) より

$$E = E_0 \quad (2.24)$$

となって、系の全エネルギーは保存されることが分かります。

2.7 質点系力学のまとめ

- 自由度 $f = 3n - r$ (n 個の質点系, r 個の束縛条件)
- 運動方程式 $M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_i \mathbf{F}_i$ ($M = \sum_i m_i$, \mathbf{R} : 重心座標)
- 運動量と保存則 $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$, $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \cdots$ if $\sum \mathbf{F}_i = 0$ ($\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$)
- 角運動量と保存則 $\mathbf{L} = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}'$, $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \cdots$ if $\sum \mathbf{F}_i = 0$ ($\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i$)
- 運動エネルギー $T = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2$ ($\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i'$)
- エネルギー保存則 $T + U = \text{一定} \cdots$ if $\sum \mathbf{F}_i = 0$

2.8 やさしい応用

2.8.1 2体問題

2 個の質点 A, B が相互作用しながら運動している系の運動を調べます。相互作用力 F の大きさは 2 質点間の距離 r の関数 $F(r)$ とします。1 番目の質点 A が 2 番目の質点 B から受ける力を F_{21} , 2 番目の質点が 1 番目の質点から受ける力を F_{12} とすると、作用・反作用の法則より

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{21} = F(r) \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \equiv F(\mathbf{r}), & (\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ \mathbf{F}_{12} = F(r) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -\mathbf{F}_{21} \end{cases} \quad (2.25)$$

各質点の運動方程式は

$$\begin{cases} A: m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} \\ B: m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \end{cases} \longrightarrow \sum_{i=1}^2 m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = M\ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (2.26)$$

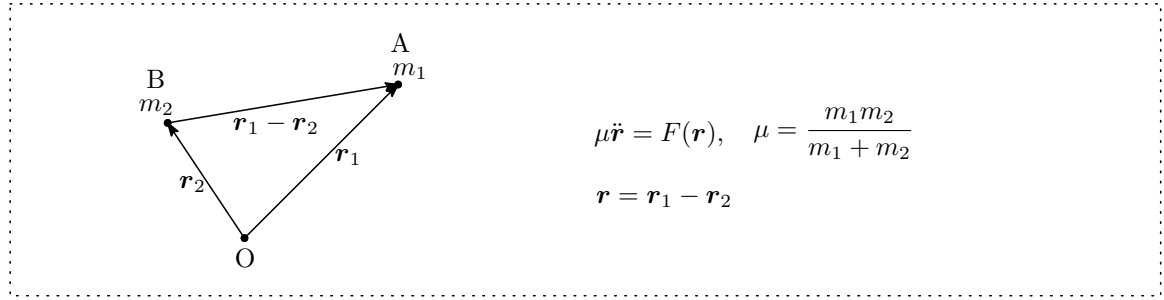
となって、全運動量 ($M\dot{\mathbf{R}}$) は保存され、重心は等速度運動します。(2.26) より

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{21} - \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{12} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\mu} F(\mathbf{r}), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

となり、これから

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F(\mathbf{r}) \quad (2.27)$$

が得られ、 μ を換算質量といいます。運動方程式 (2.27) は、2 番目の質点 B の運動を考慮したときの質点 B に対する質点 A の相対運動は、 μ なる質量を持つ質点が固定点から同じ形の中心力 $F(r)$ に結ばれているときの運動方程式と全く同じであることが分かります。



$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F(\mathbf{r}), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

この系の角運動量を L , 運動エネルギーを T とすると

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (2.28)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 \quad (2.29)$$

また ,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

より \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 を求めると

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 = \mu \dot{\mathbf{r}} + m_1 \dot{\mathbf{R}} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = -\mu \dot{\mathbf{r}} + m_2 \dot{\mathbf{R}} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

質点 A , B の角運動量はそれぞれ

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mu \dot{\mathbf{r}} + m_1 \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{r}_1 \times \mu \dot{\mathbf{r}} + m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{R}} \\ \mathbf{L}_2 &= \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_2 \times (-\mu \dot{\mathbf{r}} + m_2 \dot{\mathbf{R}}) = -\mathbf{r}_2 \times \mu \dot{\mathbf{r}} + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{R}} \end{aligned} \right. \quad (2.32)$$

したがって , 全角運動量 L と運動エネルギー T は

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{R} \times M \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_G \quad (2.33)$$

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 \quad (2.34)$$

2.8.2 2 粒子の衝突

質量 m_1, m_2 の 2 つの弾性球 A , B がそれぞれ速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ で衝突した場合 , 衝突後の速度はどのようなになるか調べます。衝突の際に働く力は内力なので運動量保存の法則が成り立ちます。衝突後の弾性球 A , B の速度をそれぞれ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ とすると

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 \quad (2.35)$$

さらに , 非完全弾性衝突では , 衝突の際に運動エネルギーの一部 (これを w とする) は他のエネルギーに転換される⁴ので , それを考慮したエネルギー保存の式は

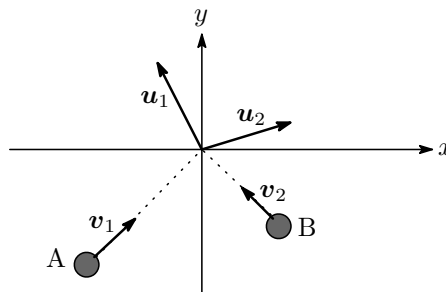
$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + w \quad (2.36)$$

⁴ 塑性変形や熱 , 音の発生など運動エネルギーの一部がそれらのエネルギーに転化します。

となります。これを書き換えて

$$\frac{1}{2}m_1(v_1^2 - u_1^2) = \frac{1}{2}m_2(u_2^2 - v_2^2) + w \quad (2.37)$$

としておきます。



運動量保存則

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$$

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + w$$

A に対する B の相対速度

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

A. 正面衝突

A, B が同一直線上で正面衝突する場合, 運動量保存則より

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad \longrightarrow \quad m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) = p \quad (2.38)$$

p は弾性球 A から B に渡された運動量を表し, $p > 0$ と仮定しておきます。これを使って (2.37) を書き換えると

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{左辺: } \frac{1}{2}m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = \frac{1}{2}p(v_1 + u_1) \\ \text{右辺: } \frac{1}{2}m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2) = \frac{1}{2}p(u_2 + v_2) + w \end{array} \right. \quad (2.39)$$

これを使って (2.37) を整理すると

$$\frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = 1 - \frac{2w}{p(v_1 - v_2)} \equiv e \quad (2.40)$$

を得ます。(2.40) は反発の法則と呼ばれ, e を反発係数⁵とか跳ね返り係数といいます。 e のとりうる範囲は $0 \leq e \leq 1$ で, $e = 1$ の場合を完全弾性衝突といい, $w = 0$ であるので力学的エネルギーは保存されます。 $e = 0$ を完全非弾性衝突といい, $u_2 = u_1$ となって A, B は衝突後融合して一緒に動くことになります。

逸失エネルギー

非完全弾性衝突では運動エネルギーの一部が失われ, 力学的エネルギー以外のエネルギーに転化されますが, この逸失エネルギー w の大きさを見積もってみます。運動量保存の法則 (2.38) と (2.40) より衝突後の速度 u_1, u_2 を求めると

$$\left. \begin{array}{l} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ u_2 - u_1 = v_1 - v_2 \\ \therefore u_1 = \frac{(1+e)m_2v_2 + (m_1 - em_2)v_1}{m_1 + m_2} \\ u_2 = \frac{(1+e)m_1v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

⁵ 反発係数 = $\frac{\text{離れる速さ}}{\text{近寄る速さ}}$

(2.38) に上の結果を入れて

$$p = m_1(v_1 - u_1) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + e)(v_1 - v_2)$$

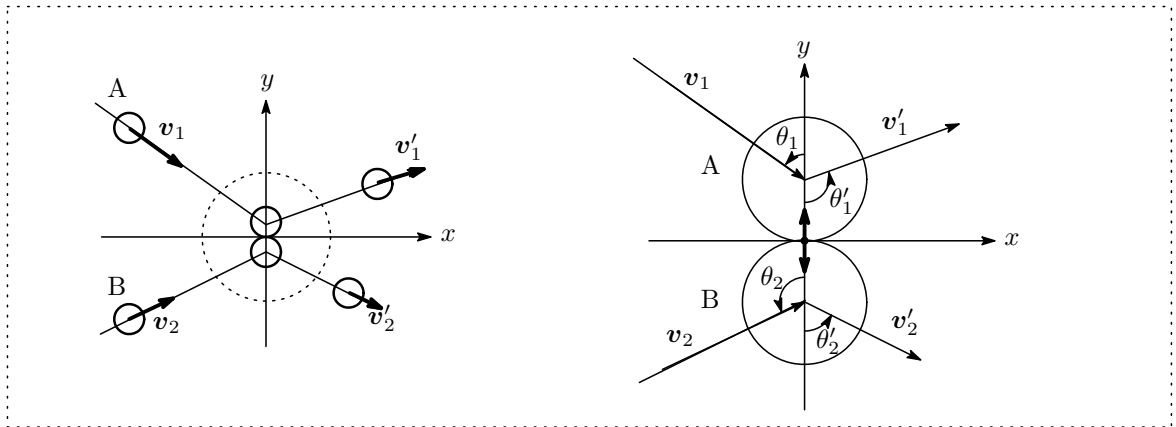
したがって、失われるエネルギー w は

$$w = \frac{1}{2} p(1 - e)(v_1 - v_2) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2)(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu (1 - e^2)(v_1 - v_2)^2 \quad (2.42)$$

となります。 $e = 0$ の完全非弾性衝突では $w = (1/2)\mu v_{rel}^2$ で逸失エネルギーの最大値が失われます。

B. 斜方衝突

質量 m_1, m_2 の 2 つの滑らかな球 A, B が速度 v_1, v_2 で図に示すように中心線に対して角 θ_1, θ_2 の方向から衝突したときの衝突後の速度を求めます。衝突の際、2 球に働く力は内力のみと考えてよいので、滑らかな球の接平面内には力が働かず、それに垂直な球の中心線方向 (y 軸方向) のみに働きます。それぞれの方向を x, y 軸方向とすると、衝突前後で x 軸方向には力が働かないので 2 球は等速運動を続け、一方、 y 軸方向には一直線上の正面衝突と同じ現象が起こり、運動量保存の法則と反発の法則が成り立ちます。



$$x \text{ 方向: } v_1 \sin \theta_1 = v'_1 \sin \theta'_1 \quad (2.43)$$

$$v_2 \sin \theta_2 = v'_2 \sin \theta'_2 \quad (2.44)$$

$$y \text{ 方向: } m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 = m_1 v'_1 \cos \theta'_1 + m_2 v'_2 \cos \theta'_2 \quad (2.45)$$

$$e(v_1 \cos \theta_1 - v_2 \cos \theta_2) = v'_2 \cos \theta'_2 - v'_1 \cos \theta'_1 \quad (2.46)$$

(2.45) (2.46) より $v'_1 \cos \theta'_1, v'_2 \cos \theta'_2$ を求めると

$$v'_1 \cos \theta'_1 = \frac{(m_1 - em_2)v_1 \cos \theta_1 + m_2(1 + e)v_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \quad (2.47)$$

$$v'_2 \cos \theta'_2 = \frac{m_1(1 + e)v_1 \cos \theta_1 + (m_2 - em_1)v_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \quad (2.48)$$

(2.43) と (2.47) (2.44) と (2.48) より辺々2乗して足し算することにより

$$v'_1 = \sqrt{v_1^2 \sin^2 \theta_1 + \left\{ \frac{(m_1 - em_2)v_1 \cos \theta_1 + m_2(1 + e)v_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \right\}^2}$$

$$v'_2 = \sqrt{v_2^2 \sin^2 \theta_2 + \left\{ \frac{m_1(1 + e)v_1 \cos \theta_1 + (m_2 - em_1)v_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \right\}^2}$$

また、比を取って

$$\tan \theta'_1 = \frac{(m_1 + m_2)v_1 \sin \theta_1}{(m_1 - em_2)v_1 \cos \theta_1 + m_2(1 + e)v_2 \cos \theta_2}$$

$$\tan \theta'_2 = \frac{(m_1 + m_2)v_2 \sin \theta_2}{m_1(1 + e)v_1 \cos \theta_1 + (m_2 - em_1)v_2 \cos \theta_2}$$

を得ます。

2.8.3 重心座標系から見た2粒子の完全弾性衝突

$e = 1$ の完全弾性衝突の場合、重心座標系⁶で記述すると見通しがよくなります。重心座標を R とすると

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.49)$$

衝突前の重心の速度を \mathbf{v}_G とすると

$$\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.50)$$

衝突後の重心の速度 \mathbf{v}'_G は

$$\mathbf{v}'_G = \frac{m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2}{m_1 + m_2} \quad (2.51)$$

となります。重心座標系から見た衝突前の弾性球 A, B の速度を $\mathbf{v}_{1G}, \mathbf{v}_{2G}$, 運動量をそれぞれ $\mathbf{P}_{1G}, \mathbf{P}_{2G}$, 衝突後のそれを $\mathbf{v}'_{1G}, \mathbf{v}'_{2G}$, 運動量をそれぞれ $\mathbf{P}'_{1G}, \mathbf{P}'_{2G}$, とすると

$$\text{衝突前} \left\{ \begin{array}{l} A: \mathbf{v}_{1G} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_G = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{\mu}{m_1}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ \mathbf{P}_{1G} = m_1 \mathbf{v}_{1G} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ B: \mathbf{v}_{2G} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_G = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = -\frac{\mu}{m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ \mathbf{P}_{2G} = m_2 \mathbf{v}_{2G} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = -\mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \end{array} \right. \quad (2.52)$$

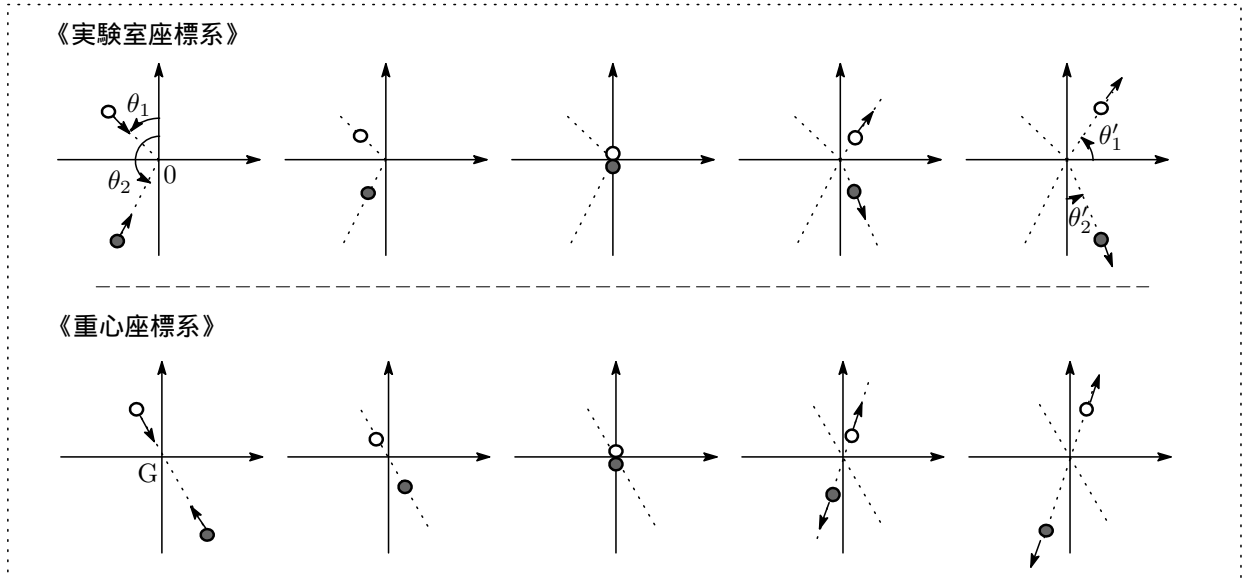
$$\text{衝突後} \left\{ \begin{array}{l} A: \mathbf{v}'_{1G} = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_G = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) = \frac{\mu}{m_1}(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \\ \mathbf{P}'_{1G} = m_1 \mathbf{v}'_{1G} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) = \mu(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \\ B: \mathbf{v}'_{2G} = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_G = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) = -\frac{\mu}{m_2}(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \\ \mathbf{P}'_{2G} = m_2 \mathbf{v}'_{2G} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) = -\mu(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \end{array} \right. \quad (2.53)$$

これから、重心座標で見た衝突前後での弾性球 A, B の運動量は

$$\begin{array}{l} \text{前: } \mathbf{P}_{1G} = -\mathbf{P}_{2G} \\ \text{後: } \mathbf{P}'_{1G} = -\mathbf{P}'_{2G} \end{array} \quad (2.54)$$

となり、2つの球 A, B は一つの直線上を向かい合って近付き、衝突後は別の線をお互いに離れていくこととなります。

⁶ 重心を原点とする座標系



完全弾性衝突では力学的エネルギーは保存されるので

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$\therefore m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \quad (2.55)$$

また，運動量保存則より

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (2.56)$$

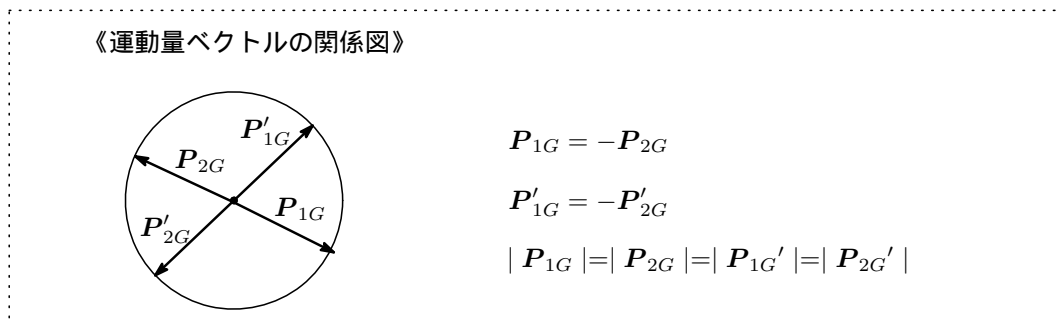
(2.55) と (2.56) より

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \quad (2.57)$$

を得ます。(2.54) と (2.57) より

$$|P_{1G}| = |P_{2G}| = |P_{1G}'| = |P_{2G}'| \quad (2.58)$$

が成り立つことが分かります。



実験室系から見た系の運動エネルギーを T ，重心の運動エネルギーを T_G とし，重心座標系から見た系の運動エネルギーを T' とすると

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (2.59)$$

$$T_G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 \quad (2.60)$$

$$T' = \frac{1}{2}m_1v_{1G}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2G}^2 \quad (2.61)$$

(2.61) に (2.52) を入れて

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_G)^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_G)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_1v_G^2 + \frac{1}{2}m_2v_G^2 - (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_G \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 = T - T_G \end{aligned}$$

$$\therefore T = T' + T_G \quad (2.62)$$

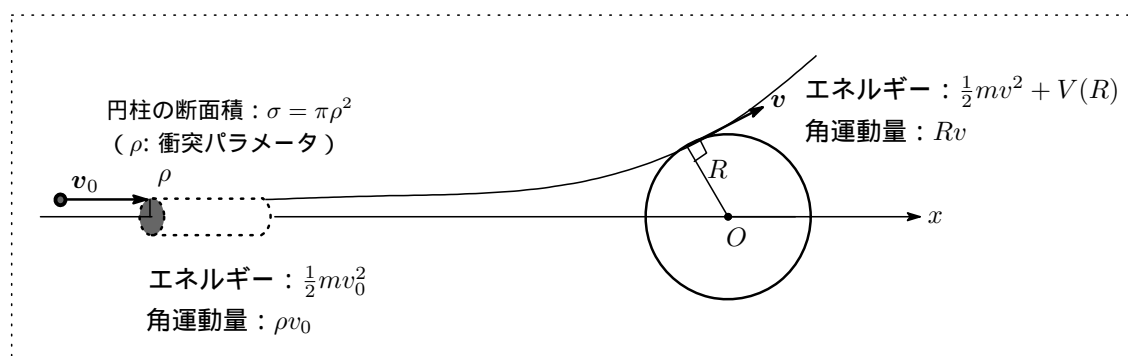
これから

実験室座標系での運動エネルギー =
重心座標系での運動エネルギー + 重心の運動エネルギー

で表されることが分かります。

2.8.4 粒子の散乱

x 軸上の定点 O を中心とする半径 R の球が球外の粒子に斥力を及ぼし、そのポテンシャルは O からの距離を r として $V(r)$ で与えられるとします。いま、粒子が無限遠方から運動エネルギー E をもって飛んできて球面に衝突するための条件を求めてみます。粒子が球面に衝突するためには、下図に示すように十分遠方で x 軸を対称軸とするある断面積 σ の円柱内を通る必要があり、この円柱の半径を ρ とします⁷。



速度 v_0 で円柱面上を通過した粒子の軌道がちょうど球面に接するものとし、そのときの速度を v とすると、エネルギー保存則と角運動量保存則より

$$\text{エネルギー保存則: } E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + V(R) \quad (2.63)$$

$$\text{角運動量保存則: } \rho v_0 = Rv \quad (2.64)$$

(2.64) より $v = (\rho/R)v_0$, これを (2.63) に入れると

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 v_0^2 + V(R) \longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) = V(R)$$

$$\therefore E \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) = V(R) \longrightarrow \rho^2 = R^2 \left(1 - \frac{V(R)}{E}\right) = R^2 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2$$

これから求める断面積 σ は

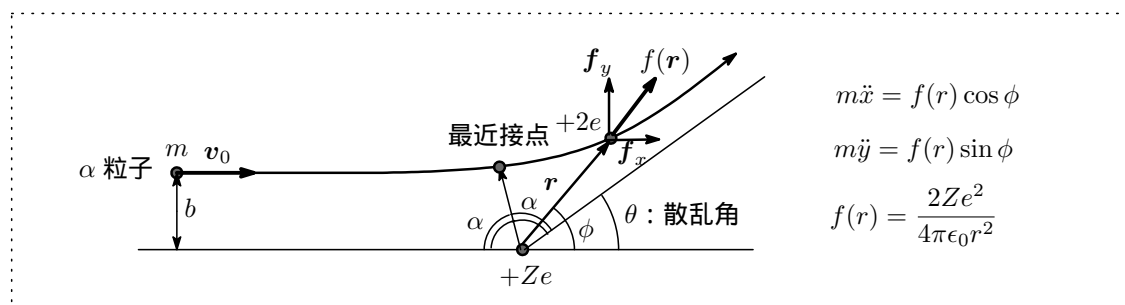
$$\sigma = \pi\rho^2 = \pi R^2 \left(1 - \frac{V(R)}{E}\right) = \pi R^2 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \quad (2.65)$$

となります。

⁷ ρ は衝突パラメータとか衝突係数と呼ばれます。

2.8.5 Rutherford 散乱

ラザフォード散乱は、クーロン力による荷電粒子の弾性散乱で、クーロン散乱とも言われます。1909年にガイガーとマースデンが行った α 粒子の原子核による散乱の実験により、今日の原子モデルが確立されたわけですが、少し歴史的な経緯を見てみることにします⁸。1910年頃までは、J.Jトムソンが1904年に発表した“原子は正に帯電した大きな球体の内部を電子が自由に動き回っている”というモデル(プラム・プディング・モデル)が実験的な検証もないまま受け入れられていました。ラザフォードは、したがって、物質に α 粒子(正の電荷を持つヘリウムの原子核)を照射した場合、大きな正電荷の球体が互いに密集する中に飛び込んでいった α 粒子は、球体に次々とぶつかって少しずつエネルギーを失い、最終的に止まってしまう筈だと考えましたが、念のため彼の助手をしていたハンス・ガイガーと、当時学生であったアーネスト・マースデンにラジウムから飛び出した α 粒子を鉛や金、鉄、アルミなどの金属に照射し、跳ね返ってくる α 粒子がでてくるかどうかを調べる実験を指示しました(1909年)。暗室内に設置された実験装置は大変シンプルなもので、跳ね返された α 粒子が蛍光板に当たってチカッと光る輝きの回数をカウントするというものでした。実験結果は“どうせ何も起こるまい”というラザフォードの当初の予想に反し、実験を始めると直ちに金属に跳ね返される α 粒子が観測され、さらに詳細な実験をおこなった結果、厚さ0.0004ミリの金箔に照射された α 粒子はほぼ全て素通りするか僅かに方向が変化するだけだが、2万個に1個の割合で進行方向が大きく曲げられるものが存在することを突き止めました。この結果は、薄い金属箔は α 粒子から見ればスカスカですが、ところどころに α 粒子を跳ね返す小さくて重い塊の存在を暗示させます。 α 粒子は電子の7000倍以上の質量があるので、球体内を跳びまわっている電子などは蹴散らかして飛んでいくので、この塊は電子ではなく、 α 粒子よりずっと重いものでなければなりません。この小さな塊(原子核)が原子のほぼ全質量を担っており、たまたまこれと衝突した α 粒子だけが跳ね返されると考えると、実験の結果が説明できる。1911年にラザフォードはニュートン力学を使って原子核によって α 粒子が跳ね返されるプロセスを計算し、 α 粒子が散乱される角度分布がガイガーの測定データと極めてよく一致することを示し、ここに今日の原子モデルの基礎が確立されました。



軌道の方程式

質量 m 、電荷 $+2e$ の α 粒子が左遠方より衝突パラメータ b の進路へ速度 v_0 で入射し、座標原点に静止している電荷 Ze の原子核からのクーロン斥力 $f(r) = 2Ze^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ を受けて運動するものとして (ϵ_0 は真空の誘電率)。 α 粒子の運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f(r) \cos \phi \\ m\ddot{y} = f(r) \sin \phi \end{cases} \quad (2.66)$$

⁸ 吉田伸夫「光の場，電子の海 量子場理論への道」は読みやすい好著と思います。

これを極座標形式 ($x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$) に書き直すと

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \phi - \dot{\phi} r \sin \phi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \phi + \dot{\phi} r \cos \phi \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi + \ddot{\phi} r \sin \phi - \dot{\phi}^2 r \cos \phi \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \phi + \ddot{\phi} r \cos \phi - \dot{\phi}^2 r \sin \phi\end{aligned}\tag{2.67}$$

となるので, これを (2.66) に代入し, $m\ddot{x} \cos \phi + m\dot{y} \sin \phi$, $m\ddot{x} \sin \phi - m\dot{y} \cos \phi$ を計算すると次の2式を得ます。

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = f(r) \\ m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0 \longrightarrow m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0 \longrightarrow mr^2\dot{\phi} = \text{一定} = L\end{cases}\tag{2.68}$$

最後の式は角運動量の保存則を表しています。 α 粒子の角運動量は遠方での速さ v_0 と衝突パラメータ b より

$$L = mbv_0$$

なので

$$r^2\dot{\phi} = bv_0\tag{2.69}$$

これを (2.68) の第1式に入れると

$$\ddot{r} - \frac{b^2 v_0^2}{r^3} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2}\tag{2.70}$$

が得られます。(2.69)(2.70) を解けば α 粒子の位置 (r, ϕ) が時刻 t の関数として得られますが, ここでは r と ϕ との関係式を直接求めていくことにします。 $r = r(\phi)$ として

$$\dot{r} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} = \frac{bv_0}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -bv_0 \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)\tag{2.71}$$

$u = 1/r$ とおくと

$$\dot{r} = -bv_0 \frac{du}{d\phi} \longrightarrow \ddot{r} = -bv_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\phi} \right) = -\frac{b^2 v_0^2}{r^2} \frac{d^2 u}{d\phi^2}\tag{2.72}$$

これを (2.70) に入れて整理すると

$$\ddot{u} = - \left(u + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m b^2 v_0^2} \right)\tag{2.73}$$

が得られます。微分方程式 (2.73) の右辺のカッコ内を q とおくと, 次の単振動の方程式に還元できます。

$$\ddot{q} = -q$$

この一般解は $q = A \cos(\phi + \alpha)$ で与えられるので,

$$\frac{1}{r} = A \cos(\phi + \alpha) - \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m b^2 v_0^2}\tag{2.74}$$

となり, α 粒子の軌道の方程式が求まります。 A と α は初期条件から決められます。(2.74) の両辺を t で微分し (2.69) を使うと

$$\dot{r} = Abv_0 \sin(\phi + \alpha)\tag{2.75}$$

となり, 左遠方 $r = \infty$, $\phi = \pi$ において $dr/dt = v_0$ であるので (2.74) より

$$0 = A \cos(\pi + \alpha) - \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m b^2 v_0^2} \longrightarrow A \cos \alpha = -\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m b^2 v_0^2}\tag{2.76}$$

(2.75) より

$$v_0 = Abv_0 \sin(\phi + \alpha) \longrightarrow Ab \sin \alpha = -1 \quad (2.77)$$

(2.76)(2.77) より

$$\tan \alpha = \frac{4\pi\epsilon_0 mbv_0^2}{2Ze^2} \quad (2.78)$$

となり, 定数, α はこの式から決められます。その結果と (2.77) を用いると定数 A を求めることができます。

最近接点

α 粒子が原子核にもっとも近付いた点を最近接点といい, 原点からの距離 r_{min} を最近接距離といいます。この点は動径方向の速さ $dr/dt = 0$ の点なので (2.75) より $\phi = \pi - \alpha$ の点となります。 r_{min} は $\phi = \pi - \alpha$ を α 粒子の軌道の式 (2.74) に入れて求めることができますが, ここでエネルギー保存則を使って求めていきます。エネルギー保存則は $v_r = \dot{r}$, $v_\phi = r\dot{\phi}$ を使って

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\phi^2) + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (2.79)$$

最近接点では右辺カッコ内の第1項は0, 第2項は (2.69) より $b^2v_0^2/r_{min}^2$ となるので

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mr_{min}^2\dot{\phi}^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{min}} \longrightarrow r_{min}^2 - \left(\frac{4k}{mv_0^2}\right)r_{min} - b^2 = 0, \quad k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.80)$$

r_{min} についての2次方程式を解いて

$$r_{min} = \frac{k}{E} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{bE}{k}\right)^2} \right\}, \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.81)$$

と求まります。これから α 粒子が原子核の中心に向かって真っ直ぐ飛んでくるとき ($b = 0$), r_{min} は最小値をとり原子核に最も近く接近することができます。このときの最近接距離は

$$r_{min} = \frac{2k}{E} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \quad (2.82)$$

となります。

散乱角と衝突パラメーター

α 粒子の軌道の方程式は

$$\frac{1}{r} = A \cos(\phi + \alpha) - \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mb^2v_0^2}$$

左遠方の $r = \infty$ では $\phi = \pi$, α 粒子が散乱角 $\theta (\neq \pi)$ の方向に散乱され無限遠方に飛んでいったとすると, 軌道方程式より

$$A \cos(\pi + \alpha) - \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mb^2v_0^2} = A \cos(\theta + \alpha) - \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mb^2v_0^2}$$

$$\therefore \cos(\pi + \alpha) = \cos(\theta + \alpha)$$

三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned} \cos(\pi + \alpha) - \cos(\theta + \alpha) &= -2 \sin\left(\frac{\theta + 2\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -2 \cos\left(\frac{\theta + 2\alpha}{2}\right) \cos\frac{\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta + 2\alpha = \pi \longrightarrow \tan \alpha = (\pi/2 - \theta/2) = \cot \theta$$

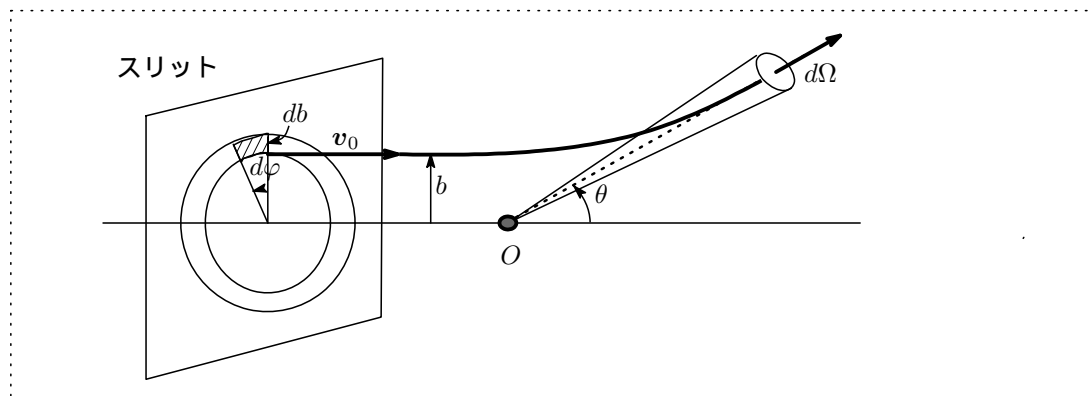
これを (2.78) に入れて

$$b = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0mv_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (2.83)$$

が得られます。つまり、 α 粒子の入射速度 v_0 を決めると、 α 粒子が散乱されてでていく方向 θ は入射粒子の衝突パラメータ b によって決まるということで、散乱角に θ は b の関数として与えられます。あるいは b を θ の関数として $b = b(\theta)$ として表すこともできます。

ラザフォードの散乱公式

図に示すように、散乱角 θ の方向の微小立体角 $d\Omega$ の中に散乱されてくる α 粒子は、スリット上の斜線部の微小面積 $bd\varphi db$ を通って入射してきた粒子であることが分かります。



さて、スリットから一様に単位面積当たり毎秒 1 個の α 粒子が入射してくるとき、単位時間にスリット面上の微小面積 $bd\varphi db$ を通過する確率 $d\sigma$ はその面積に等しくなります。

$$d\sigma = bd\varphi db = b(\theta) \frac{db(\theta)}{d\theta} d\theta d\varphi$$

これは、微小立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ の中に散乱されてでてくる確率なので、単位立体角内に散乱される確率、これを微分断面積 $\sigma(\theta)$ と呼んでいます、 $\sigma(\theta)$ は、したがって

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\sin\theta} b(\theta) \frac{db(\theta)}{d\theta} \quad (2.84)$$

で与えられます。(2.83) を θ で微分して (2.84) に入れると

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (2.85)$$

が得られます。これはラザフォードの公式と呼ばれています。

3 剛体系の運動方程式

剛体の運動は並進運動と回転運動のみが可能でした。重心 G の並進運動を決める 3 個の独立変数 x_G, y_G, z_G 、回転運動における回転軸の方向を決める 2 個の独立変数 θ, ϕ そして回転角を決める 1 個の独立変数 ω の合計 6 個の運動方程式で記述されます。さて、質点系の運動エネルギーは (2.17) で与えられました。右辺第 1 項は重心の並進運動エネルギーで第 2 項は重心系での各質点の運動エネルギーの総和でした。

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 \quad (3.1)$$

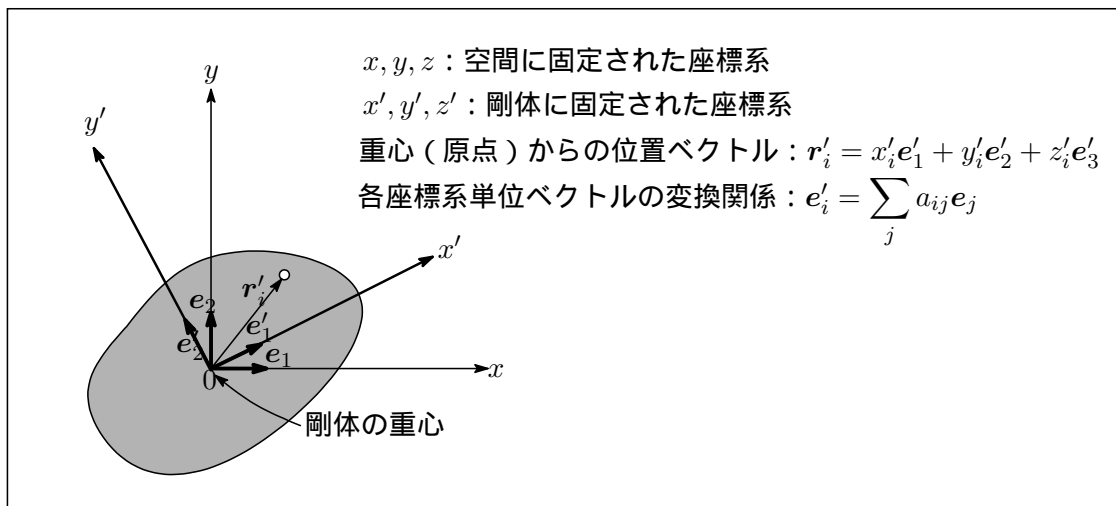
剛体を質点の集まり⁹とみなし，重心を固定した運動を考えると (3.1) の右辺の第 2 項は剛体の重心回りの回転運動エネルギーを表すことになります。また，剛体の重心回りの運動を決める方程式は，上と同様に考えて (2.16) で与えられ，改めて書くと次の式となります。

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \quad (3.2)$$

ここで \mathbf{r}'_i は剛体の重心を原点とした位置ベクトルです。剛体の重心を原点として剛体に固定した座標系を x', y', z' ，一方，空間に固定した座標系を x, y, z ，それぞれの座標系の単位ベクトルを $\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) とします。

3.1 回転ベクトル

3.1.1 座標変換と直交行列



x', y', z' 座標系の単位ベクトル \mathbf{e}'_i と x, y, z 座標系の単位ベクトル \mathbf{e}_i は直交変換の関係にあるので次式が成り立ちます。

$$\mathbf{e}'_i = \sum_j a_{ij} \mathbf{e}_j \quad (3.3)$$

a_{ij} は 3 行 3 列の直交行列でそれを \mathbf{A} と書くと，行と列を入れ替えた転置行列 \mathbf{A}^T との間に $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$ となる性質を持っています (\mathbf{E} は単位行列)。

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

また，直交行列 \mathbf{A} の逆行列を \mathbf{A}^{-1} とすると

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad (3.6)$$

と書くこともできます。

⁹ 剛体は構成する任意の 2 質点間の距離がどんな変形に対しても一定に保たれる質点系でした。つまり絶対変形しない質点系ということになります。

3.1.2 回転ベクトル

さて、剛体の回転運動によりに座標系 x', y', z' は空間に固定された座標系からみて時間変化するるので、(3.3) の右辺直交行列 A は時間 t の関数になります。ここで行列の微分を次のように定義します。

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right) = \dot{a}_{ij} \quad (3.7)$$

そうすると、和と積の微分は普通の関数の微分法と同様に次の公式が成立することが分かります¹⁰。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \\ \frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt} \end{cases} \quad (3.8)$$

またすぐ後で必要になるので転置行列の公式を上げておきます¹¹。

$$\begin{cases} (AB)^T = B^T A^T \\ (A^T)^T = A \end{cases} \quad (3.9)$$

これで下準備が整ったので、(3.5) を時間 t で微分してやると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(AA^T) &= \frac{dA}{dt}A^T + A\frac{dA^T}{dt} = 0 \\ \text{一方, } \left(A\frac{dA^T}{dt} \right)^T &= \frac{dA}{dt}A^T \quad \text{なので} \quad A\frac{dA^T}{dt} = \left(\frac{dA}{dt}A^T \right)^T \\ \therefore \frac{dA}{dt}A^T &= - \left(\frac{dA}{dt}A^T \right)^T \end{aligned} \quad (3.10)$$

が得られます。これは行列を転置すると符合だけが変わる行列¹²となっていますが、このような行列の最も一般的な形は

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

と書けます。したがって

$$\frac{dA}{dt}A^T = \frac{dA}{dt}A^{-1} = \Omega$$

この式の右から A をかけると

$$\frac{dA}{dt} = \Omega A \quad (3.12)$$

Ω が分かると上の微分方程式を解くことで A が求まり、回転の様子が分かることになります。そこで次のステップとして Ω を求めていくことにします。(3.11) は Levi-Civita の記号 ε_{ijk} を使うと

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{ij1}\omega_1 + \varepsilon_{ij2}\omega_2 + \varepsilon_{ij3}\omega_3 = \sum_k \varepsilon_{ijk}\omega_k \quad (3.13)$$

¹⁰ 和の微分公式は自明。積の微分公式は $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ を t で微分すると得られます。

¹¹ 公式の証明は適当な線形代数のテキストを参照ください。

¹² 反対称行列とか交代行列といわれます。正方行列 $A = (a_{ij})$ がすべての i, j に対して $a_{ji} = -a_{ij}$ であるとき、行列 A を反対称行列といいます。反対称行列の対角成分は全て 0 となります。

とスッキリ書けます。ただし,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & : (i, j, k) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の偶置換のとき } \varepsilon_{123}, \varepsilon_{231}, \varepsilon_{312} \Rightarrow 1 \\ -1 & : (i, j, k) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の奇置換のとき } \varepsilon_{132}, \varepsilon_{213}, \varepsilon_{321} \Rightarrow -1 \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{kji}$$

ε_{ijk} の記号を使うとベクトルの外積は

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = 0 \end{cases} \longrightarrow \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (3.14)$$

と見通しのよい表記ができます。この記号を使って (3.12) を成分に分けて書くと

$$\dot{a}_{ij} = (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A})_{ij} = \sum_k \Omega_{ik} a_{kj} = \sum_{k,\ell} \varepsilon_{ik\ell} \omega_\ell a_{kj} \quad (3.15)$$

(3.3) を t で微分すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}'_i &= \sum_j \dot{a}_{ij} \mathbf{e}_j = \sum_{j,k} \Omega_{ik} a_{kj} \mathbf{e}_j = \sum_{j,k,\ell} \varepsilon_{ik\ell} \omega_\ell a_{kj} \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{k,\ell} \varepsilon_{ik\ell} \omega_\ell \mathbf{e}'_k = \sum_{k,\ell} \omega_\ell \varepsilon_{lik} \mathbf{e}'_k = \sum_\ell \omega_\ell \mathbf{e}'_\ell \times \mathbf{e}'_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

但し, ここで ε_{ijk} の下付文字を偶置換しても値は変わらないことと, (3.14) を利用しました。ここで次の $\boldsymbol{\omega}$ ベクトルを導入します。

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}'_1 + \omega_2 \mathbf{e}'_2 + \omega_3 \mathbf{e}'_3 = \sum_\ell \omega_\ell \mathbf{e}'_\ell \quad (3.17)$$

そうすると (3.16) は

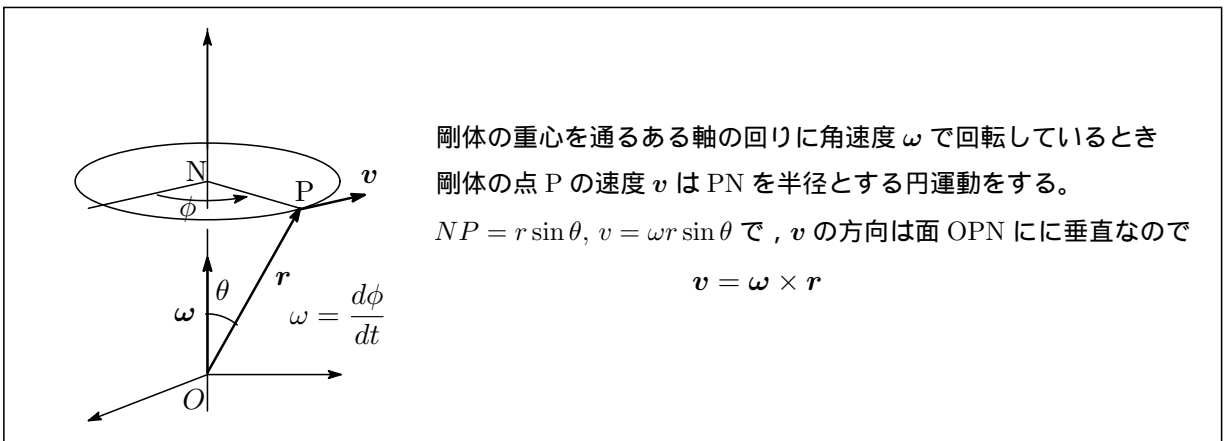
$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \sum_\ell \omega_\ell \mathbf{e}'_\ell \times \mathbf{e}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i \quad (3.18)$$

剛体の重心を原点とする剛体に固定した座標系での各質点の位置ベクトル \mathbf{r}' は

$$\mathbf{r}'_i = x'_i \mathbf{e}'_1 + y'_i \mathbf{e}'_2 + z'_i \mathbf{e}'_3$$

なので, これを t で微分して整理すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}'_i &= x'_i \dot{\mathbf{e}}'_1 + y'_i \dot{\mathbf{e}}'_2 + z'_i \dot{\mathbf{e}}'_3 = x'_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_1) + y'_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_2) + z'_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_3) = \boldsymbol{\omega} \times (x'_i \mathbf{e}'_1 + y'_i \mathbf{e}'_2 + z'_i \mathbf{e}'_3) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \end{aligned} \quad (3.19)$$



(3.19) の左辺は、重心を通り ω の方向を回転軸とし、 ω を角速度の大きさとする位置ベクトル \mathbf{r}' で与えられる点の速度を意味することが分かります。この ω を回転ベクトルと呼んでいます¹³。

3.2 剛体の回転運動

3.2.1 慣性テンソル

剛体の回転運動のエネルギーは (3.1) の右辺第 2 項で与えられました。それを T_R と記し、回転ベクトルを使って整理すると¹⁴

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \{ \mathbf{r}'_i'^2 \cdot \boldsymbol{\omega}^2 - (\mathbf{r}'_i' \cdot \boldsymbol{\omega})^2 \} \end{aligned} \quad (3.20)$$

となります。(3.20) を成分によって書き直します。ベクトル \mathbf{r}'_i , $\boldsymbol{\omega}$ の成分を次のように書くことにすると

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}), & \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \mathbf{r}'_i'^2 \cdot \boldsymbol{\omega}^2 = \mathbf{r}'_i'^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \\ (\mathbf{r}'_i' \cdot \boldsymbol{\omega})^2 = (r_{i1}\omega_1 + r_{i2}\omega_2 + r_{i3}\omega_3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_i'^2 \cdot \boldsymbol{\omega}^2 - (\mathbf{r}'_i' \cdot \boldsymbol{\omega})^2 &= \mathbf{r}'_i'^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - (r_{i1}\omega_1 + r_{i2}\omega_2 + r_{i3}\omega_3)^2 \\ &= \sum_{a,b} \{ \omega_a^2 \mathbf{r}'_i'^2 - \omega_a r_{ia} \omega_b r_{ib} \} \quad (\text{但し } a, b = 1, 2, 3) \\ &= \sum_{a,b} \{ \omega_a \omega_b \delta_{ab} \mathbf{r}'_i'^2 - \omega_a \omega_b r_{ia} r_{ib} \}, \quad \delta_{ab} = \begin{cases} 1 : a = b \\ 0 : a \neq b \end{cases} \\ &= \sum_{a,b} \omega_a \omega_b (\delta_{ab} \mathbf{r}'_i'^2 - r_{ia} r_{ib}) \end{aligned}$$

これを (3.20) に代入すると

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \omega_a \omega_b \sum_i m_i (\delta_{ab} \mathbf{r}'_i'^2 - r_{ia} r_{ib}) \quad (3.21)$$

ここで

$$I_{ab} = \sum_i m_i (\delta_{ab} \mathbf{r}'_i'^2 - r_{ia} r_{ib}) \quad (3.22)$$

というテンソル(何故テンソルかということについては 3.2.2 で説明します)を導入すると, (3.21) は

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{a,b} I_{ab} \omega_a \omega_b \quad (3.23)$$

と表すことができます。テンソル I_{ab} を慣性モーメント・テンソルあるいは単に慣性テンソルと呼んでいます¹⁵。慣性テンソルは定義から明らかかなように対称です。

$$I_{ab} = I_{ba} \quad (3.24)$$

¹³ 角速度ベクトルとも呼ばれます。

¹⁴ 公式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ を使う。

¹⁵ 運動エネルギーは $(1/2)mv^2$ と書かれますが, この式の質量項に I_{ab} が相当することが分かります。このことから“慣性”という名前が付いているのですね。

慣性テンソルを成分表示すると¹⁶

$$I_{ab} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & -\sum m_i x_i' y_i' & -\sum m_i x_i' z_i' \\ -\sum_i m_i y_i' x_i' & \sum m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & -\sum m_i y_i' z_i' \\ -\sum_i m_i z_i' x_i' & -\sum m_i x_i' y_i' & \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

I_{11}, I_{22}, I_{33} はそれぞれ x' 軸, y' 軸, z' 軸のまわりの慣性モーメント, $-I_{12}, -I_{23}, -I_{31}$ はそれぞれ $x'y'$ 平面, $y'z'$ 平面, $z'x'$ 平面に関する慣性乗積と呼ばれます。

剛体を連続体とした場合には点 \mathbf{r}' における密度を $\rho(\mathbf{r}')$ として

$$\sum_i m_i \longrightarrow \int dm \longrightarrow \int \rho(\mathbf{r}') dx' dy' dz'$$

と置き換えればよい¹⁷ので, 連続体の場合の慣性テンソルは

$$I_{ab} = \int \rho(\mathbf{r}') (\delta_{ab} \mathbf{r}'^2 - x_a x_b) dx' dy' dz' = \int (\delta_{ab} \mathbf{r}'^2 - x_a x_b) dm \quad (3.26)$$

となります¹⁸。 I_{ab} の成分は

$$\begin{cases} I_{11} = \int (y'^2 + z'^2) dm, & I_{23} = I_{32} = -\int y' z' dm \\ I_{22} = \int (z'^2 + x'^2) dm, & I_{31} = I_{13} = -\int z' x' dm \\ I_{33} = \int (x'^2 + y'^2) dm, & I_{12} = I_{21} = -\int x' y' dm \end{cases} \quad (3.27)$$

慣性テンソルは x', y', z' 軸の方向を適当に選ぶことで対角化できます。そのような方向を剛体の慣性主軸とよび, それに対応するテンソルの成分を値を主慣性モーメントと呼び, I_1, I_2, I_3 で表します。

$$\text{主軸変換: } \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

x' 軸, y' 軸, z' 軸 を慣性主軸に選ぶと, 慣性モーメントは次式で与えられます。

$$\begin{cases} I_1 = \int (y'^2 + z'^2) dm, & I_{23} = I_{32} = -\int y' z' dm = 0 \\ I_2 = \int (z'^2 + x'^2) dm, & I_{31} = I_{13} = -\int z' x' dm = 0 \\ I_3 = \int (x'^2 + y'^2) dm, & I_{12} = I_{21} = -\int x' y' dm = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

この場合, 回転運動のエネルギーの式は次のように簡単になります。

$$T_R = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (3.30)$$

¹⁶ $(r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}) \equiv (x_i', y_i', z_i')$ に留意してください。

¹⁷ 連続体では i 番目の質点という代わりにその座標での質点となるので位置座標 (x_i, y_i, z_i) の下付きサフィックス i は付かなくなります。

¹⁸ $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x', y', z')$

3.2.2 剛体の角運動量

以下，面倒なので剛体に固定された座標系に付けていたダッシュを省いて書くことにしますので留意ください。角運動量を L とするとベクトル解析の公式 $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ より

$$\begin{aligned} L &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i m_i \{ \mathbf{r}_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i \} \end{aligned} \quad (3.31)$$

右辺はベクトル量になっていますね。これを先ほどやったように成分に分けて

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} = r_i^2 \omega_1 \mathbf{e}_1 + r_i^2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + r_i^2 \omega_3 \mathbf{e}_3 \\ (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i = r_{i1}(r_{i1}\omega_1 + r_{i2}\omega_2 + r_{i3}\omega_3)\mathbf{e}_1 + r_{i2}(r_{i1}\omega_1 + r_{i2}\omega_2 + r_{i3}\omega_3)\mathbf{e}_2 + r_{i3}(r_{i1}\omega_1 + r_{i2}\omega_2 + r_{i3}\omega_3)\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

したがって各運動量の L_a 成分は

$$\begin{aligned} L_a &= \sum_{i,b} m_i \{ r_i^2 \omega_a - r_{ia} r_{ib} \omega_b \} = \sum_{i,b} m_i \{ \delta_{ab} r_i^2 - r_{ia} r_{ib} \} \omega_b \\ &= \sum_b I_{ab} \omega_b \end{aligned} \quad (3.32)$$

となります。これを行列あるいはベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \iff \mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (3.33)$$

となります。ところで慣性テンソルの命名ですが，一般に角運動量ベクトル L と回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は異なる方向を向いており¹⁹， L は $\boldsymbol{\omega}$ の関数というか， I はこの2つのベクトルを結びつけていますね。このような2つのベクトルの線形変換を表すものをテンソル²⁰というので， I を慣性テンソルと呼んでいます。

a, b, c 軸を剛体の慣性主軸の方向にとると，上式は

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3 \quad (3.34)$$

と表せます。行列で表せば

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

とくに3つの主慣性モーメントがすべて等しい球状のこまのようなものでは

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}, \quad (I_1 = I_2 = I_3 = I) \quad (3.36)$$

と書けます。この場合，角運動量ベクトルは回転ベクトルに比例し，それと同じ方向をもちます。(3.23)の回転のエネルギーを角運動量ベクトルで表すと

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}) \quad (3.37)$$

となります。

¹⁹ 一般に任意の物体の場合には， L と $\boldsymbol{\omega}$ の方向は一致しません。一致するのは物体が慣性主軸のどれか1つのまわりに回転する場合だけです。

²⁰ 正式には2階のテンソルといいます。

簡単な質量分布の場合の慣性主軸と慣性モーメント
 主な物体の慣性主軸と慣性モーメントは次の通りです。

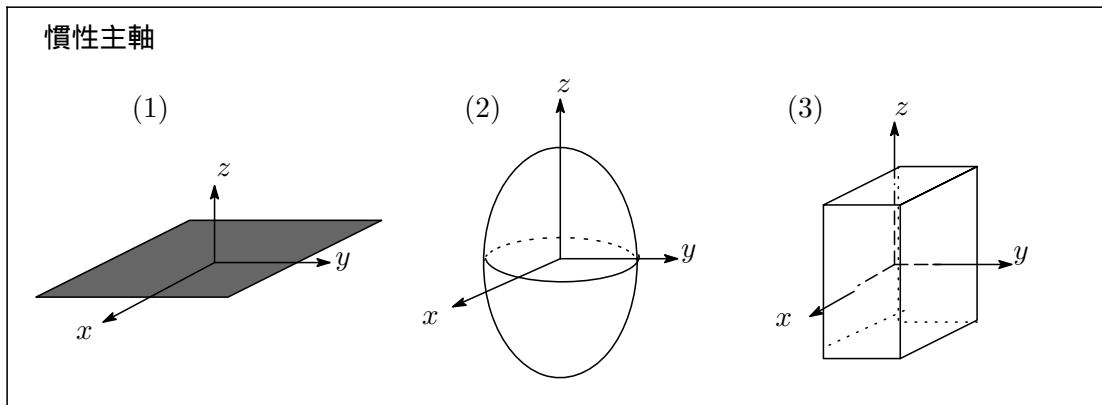
- (1) 板状の物体：板面に直角に z 軸をとり， $z = 0$ の面内での 1 つの対称軸を x 軸，それと垂直に y 軸をとると x, y, z 軸は慣性主軸となります。慣性モーメントは

$$I_x = \int y^2 dm, \quad I_y = \int x^2 dm, \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm \longrightarrow I_z = I_x + I_y \quad (3.38)$$

- (2) 回転体：回転対称軸を z 軸にとり，それに直角に x, y 軸をとると x, y, z 軸は慣性主軸となります。慣性モーメントは

$$I_x = I_y \quad (3.39)$$

- (3) 柱体：互いに直角な 2 つの対称軸を z, x 軸のとり，それに直角に y 軸をとると x, y, z 軸は慣性主軸となります。



3.2.3 任意の点に原点を持つ座標軸に関する慣性テンソル

今まで，剛体の重心 G を原点 O とする座標系における慣性テンソルを計算してきましたが，重心 G の基準点をベクトル d だけ移動した新たな点を原点 O' とした場合の慣性テンソルを求めて見ます。原点 O' に関する慣性テンソルを

$$I'_{ab} = \sum_i m_i (\delta_{ab} r_i'^2 - r'_{ia} r'_{ib}) \quad (3.40)$$

と定義します。ここで

$$\begin{cases} r'_i = r_i - d \\ r'_{ia} r'_{ib} = (r_{ia} - d_a)(r_{ib} - d_b) \end{cases} \quad \text{また，重心の定義より } \sum_i m_i r_i = 0$$

(3.40) の右辺はそれぞれ次のように書けます。

$$\begin{cases} \delta_{ab} \sum_i m_i r_i'^2 = \delta_{ab} \sum_i m_i (r_i^2 + d^2) - 2\delta_{ab} \sum_i m_i r_i d \\ \sum_i m_i (r'_{ia} r'_{ib}) = \sum_i m_i (r_{ia} r_{ib} + d_a d_b) - \sum_i m_i (r_{ib} d_a + r_{ia} d_b) \end{cases} \quad (3.41)$$

$a = b$ の場合，(3.41) の第 1 式右辺第 2 項と第 2 式の第 2 項は互いに消しあいます。 $a \neq b$ の場合は，第 1 式右辺第 2 項は 0 となり，第 2 式第 2 項は重心の座標を原点 $(0, 0, 0)$ としているので

0 となります。以上のことから

$$\begin{aligned}
 I'_{ab} &= \sum_i m_i (\delta_{ab} r_i'^2 - r'_{ia} r'_{ib}) \\
 &= \sum_i m_i (\delta_{ab} r_i^2 - r_{ia} r_{ib}) + \sum_i m_i (\delta_{ab} d^2 - d_a d_b) \\
 &= I_{ab} + \mu (\delta_{ab} d^2 - d_a d_b), \quad \text{ただし } \mu = \sum_i m_i
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

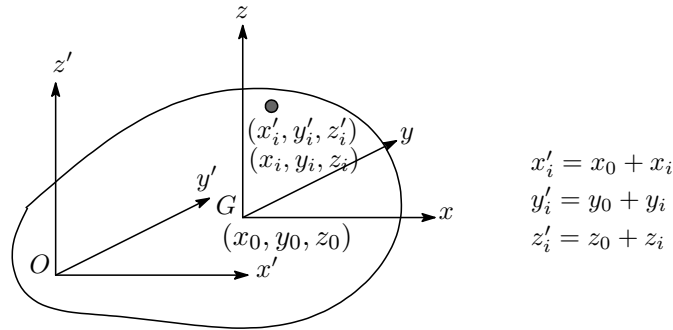
が得られます。

【例題】重心 (x_0, y_0, z_0) を原点とする座標系 (x, y, z) と任意の一点を原点とする xyz 座標系と平行な $(x'y'z')$ 座標系があり, xyz 系に関する慣性モーメント, 慣性乗積をそれぞれ $I_{xx}, \dots, I_{xy}, \dots$ とし, $x'y'z'$ 系に関する慣性モーメント, 慣性乗積をそれぞれ $I_{x'}, \dots, I_{x'y'}, \dots$, 全質量が重心に集中したときの慣性モーメント, 慣性乗積を $I_x^0, \dots, I_{xy}^0, \dots$ とすると

$$I_{x'} = I_x^0 + I_x, \dots, I_{x'y'} = I_{xy}^0 + I_{x'y'}, \dots$$

となることを示せ。

【解答】(3.29) と (3.42) を使うとすぐ示せますが, ここでは具体的な計算をやることにします。



$$\begin{aligned}
 I_{x'} &= \sum_i m_i (y_0^2 + z_0^2) + \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) + 2y_0 \sum_i m_i y_i + 2z_0 \sum_i m_i z_i \\
 &= M(y_0^2 + z_0^2) + \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad (M = \sum_i m_i) \\
 &= I_x^0 + I_x \quad (\because \sum_i m_i y_i = 0, \sum_i m_i z_i = 0 \dots \text{重心が原点の座標系}) \\
 I_{x'y'} &= \sum_i m_i x'_i y'_i = \sum_i m_i x_0 y_0 + \sum_i m_i x_i y_i + x_0 \sum_i m_i y_i + y_0 \sum_i m_i x_i \\
 &= M I_{xy}^0 + \sum_i m_i x_i y_i \\
 &= I_{xy}^0 + I_{xy}
 \end{aligned}$$

他の成分も同様にして求められます。 //

平行軸の定理

重心を通る軸に関する慣性モーメント I_G が知られているとき, それと平行で距離 d 離れた軸に関する慣性モーメントを I は

$$I = I_G + d^2 M, \quad (M: \text{全質量}) \tag{3.43}$$

であらわされます。これを平行軸の定理とか Steiner の定理といいます。

3.3 剛体の運動方程式

3.3.1 オイラーの運動方程式

剛体の回転運動を表す方程式はオイラーの運動方程式として知られています。(3.2) からスタートします。

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}', \quad (\mathbf{N}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i) \quad (3.44)$$

ここで \mathbf{N}' は剛体の重心周りのモーメントですね。議論を見通しよくするために慣性主軸を選んで、(3.31) を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \{ \mathbf{r}_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i \} \right] \quad (3.45)$$

右辺第 2 項のカッコ内の時間微分はベクトルの公式²¹ と (3.19) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) &= (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \\ &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \\ &= (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \end{aligned}$$

(3.44) は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \sum_i m_i \{ 2\mathbf{r}_i(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{r}_i^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \dot{\mathbf{r}}_i \} \\ &= \sum_i m_i \{ \mathbf{r}_i^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \} \\ &= \mathbf{N} \end{aligned} \quad (3.46)$$

となります。 $\sum m_i \rightarrow \int dm$ の連続体近似に焼きなおして上式の両辺の x 成分をとると

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_i^2 \dot{\boldsymbol{\omega}})_x = (x^2 + y^2 + z^2) \dot{\omega}_1 \\ ((\mathbf{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{r}_i)_x = x^2 \dot{\omega}_1 + xy \dot{\omega}_2 + zx \dot{\omega}_3 \\ (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)(\omega_2 z - \omega_3 y) \end{cases}$$

となることと、座標系として慣性主軸を選んでいるので (3.29) が成立することを考慮すると、結局 x 成分として次式が得られます。

$$\begin{aligned} & \dot{\omega}_1 \int dm(y^2 + z^2) - \int dm(x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)(\omega_2 z - \omega_3 y) \\ &= \dot{\omega}_1 \int dm(y^2 + z^2) - \omega_2 \omega_3 \int dm(z^2 - y^2) \\ &= I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ &= N_1 \end{aligned} \quad (3.47)$$

²¹ $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

同様にして y, z 成分も求めることができます。以下整理して書いておくと

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = N_1 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = N_2 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases} \quad (3.48)$$

(3.48) はオイラーの運動方程式と呼ばれます。とくに自由回転の時は $N = 0$ で、オイラーの3つの運動方程式にそれぞれ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ をかけ足し合わせると

$$I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = 0$$

つまり回転エネルギーの式 (3.30) の時間微分が 0 となって、回転エネルギー保存則を得ます。

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \longrightarrow \frac{d}{dt} T_R = 0 \quad (3.49)$$

本レポートはここで終了します。剛体のテーマでは種々の形状をした物体の慣性モーメントを求めるのが一般的ですが、それはまた適当な力学のテキストで取り組んでください。お疲れ様でした。

*GOOD LUCK !
SEE YOU AGAIN !*

by *KENZO*

(了)

< 補記 >

・ 2010.01.08 … 慣性テンソルの § 3.2.3 を補充