

# 構造力学談話

KENZOU

平成 29 年 11 月 20 日

## 第 1 話.

## 平面構造物のつり合い ( 1 )

- K 氏：平面構造物といっても構造形式によっていろいろあるよね。ラーメン構造とかトラス構造，アーチ構造にシェル構造といった具合だ。
- コニー：ラーメン構造ってラーメン屋の屋台の構造かな？と思ったりするわね。
- K 氏：うん，直接ラーメン屋の屋台とは関係ないんだね。このラーメンは「枠」とか「額縁」を意味するドイツ語の Rahmen からきていて，英語で rigid frame というように柱と梁を剛接合した骨組のことだ。トラス構造というのはピン接合した部材を三角形に組み合わせた骨組を単位に構成されているもので，英語で truss と書くが，これは“ くくる ”とか“ 縛る ”という意味だね。

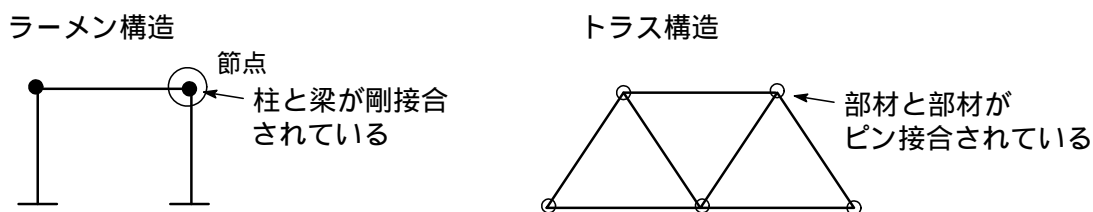


図 1.1: ラーメン構造とトラス構造

なお，ピンはドアなどについている蝶番（ちょうつがい）をイメージすればいい。アーチ構造は半円形に弧を描いた構造で，煉瓦作りの旧建築の出入り口などによく見かける。パリの凱旋門などがそうだね。シェル構造というのは薄い局面を貝殻のように外殻に用いた構造のことだ。

- コニー：いろいろあるのね。
- K 氏：そうだね。それではまず基本となる梁の話から入ってラーメン構造とかトラス構造などを取り上げていこう思う。

### 1 - 1 . 力のつり合い

#### ( 1 ) 構造物の節点・支点と反力

節点

- K氏：構造物の骨組を構成する部材と部材を継手を節点といい，節点には剛節点とピン節点の2種類がある。これらの節点は反力を考えるときに大切なポイントとなるので少し詳しく説明しておこう。
  - ・剛節点：節点部分の回転が拘束されて，その角度が変化しないものをいう。節点部分が固定されて移動も回転もできないので，部材相互間で水平方向，垂直方向の力の移動に加えて，モーメントを伝えることができる。
  - ・ピン節点：ヒンジとか滑節点ともいうが，節点部分が自由に回転できるものをいう。ちょうど蝶番ちようがひのイメージだね。ピン節点はモーメントは伝達できないが，水平方向，垂直方向の力の移動は伝えることができる。

## 支点

- K氏：地盤あるいは他の支持構造物と構造物の接点を支点と呼んでいる。支点は構造物に作用した力を地盤に伝える役割を果たしている。
- コニー：構造物が支点を通して地盤に力を作用させれば，構造物は当然地盤からの反作用力を受けるはずね。力のバランスがとれていないと構造物は安定しないから。
- K氏：その通りだ。地盤から支点を介して受ける反作用力を支点反力とか単に反力と呼んでいる。一般に反力は構造物の変位が固定されている点に生じる力で，水平反力，鉛直反力，モーメントがある。支点はこのすべての力に抵抗するのではなく，支点の種類によってある特定の力にのみ抵抗する構造になっているんだね。
  - ・固定支点：「水平」「鉛直」「回転（モーメント）」すべての力に抵抗。したがって，反力は水平，鉛直と回転に対して生じる。移動と回転の変位を拘束し、どのようにも移動ができない支点。拘束度は  $r = 3$ 。
  - ・ピン支点：「水平」と「鉛直」方向の力に抵抗。したがって，反力は水平方向と鉛直方向に生じる。水平・鉛直方向の移動変位を拘束するが、回転が可能な支点。拘束度は  $r = 2$ 。
  - ・ローラー支点：「鉛直」方向の力にだけ抵抗。したがって，反力は鉛直方向だけに生じる。鉛直方向の変位だけを拘束し、回転や水平方向に移動が可能な支点。拘束度は  $r = 1$ 。
- コニー：拘束度は反力の数  $h$  と一致するのね。
- K氏：そうだね。構造物の自由度の数より拘束度が少なければ不安定となるし，逆に多ければ安定となるわけだね。

## (2) 構造物の分類

- K氏：構造物は安定構造物と不安定構造物に分類される。不安定構造物とは外力によって容易に形を崩したり移動したりする構造物のことで，安定構造物は移動も回転もしない構造物のことだ。安定構造物はさらに静定構造物せいていと不静定構造物に分類される。
- コニー：静定とか不静定の意味は？

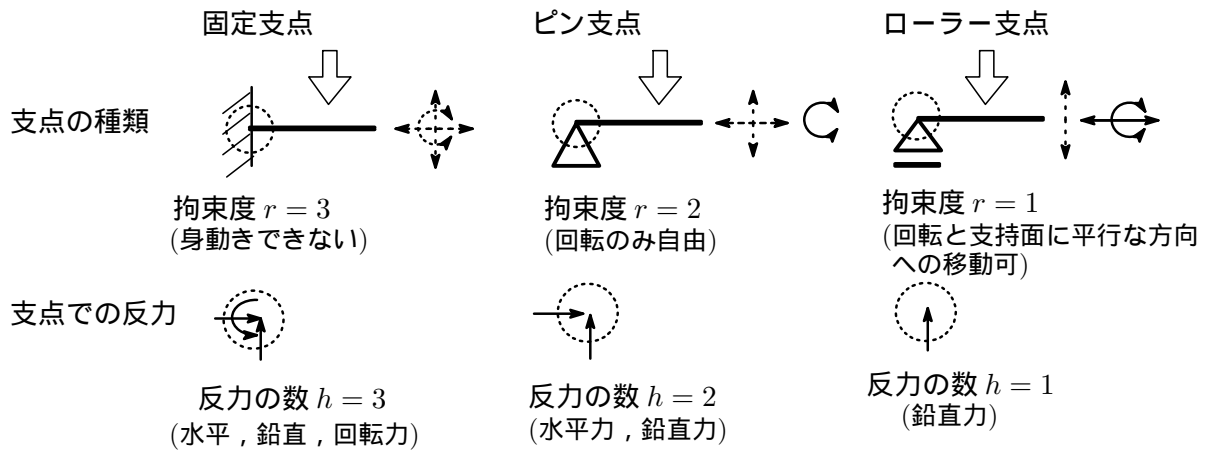
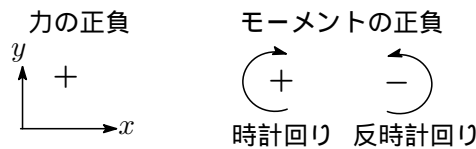


図 1.2: 支点の種類と反力

- K 氏：静定構造物は，力のつり合いの式だけで反力が求められる構造物のことだ。つり合いの条件式は水平，鉛直方向の力とモーメントのつり合いの三元連立一次方程式となる。ただし，力とモーメントの正負の符号は図のようにしておく。



力のつり合いの式

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_i = 0$$

図 1.3: 力とモーメントの正負の符号

不静定構造物は力のつり合いの条件式に加え構造物の変形状態まで考えた式が必要となる。

- コニー：ところで，部材に外力が加わると応力が発生するとどこかで聞いたことがあるけど。
- K 氏：そうだね，応力は外力に反応して部材の内部に生じる力（内力）のことだ。力学で勉強したと思うけど内力の総和はゼロだね。したがって，応力は「大きさが等しく，向きが反対な“一対の力”」という性質をもつ。応力は部材の任意の断面に働く力なので構造力学では「断面力」といっている。この力には，図に示すような「軸方向力  $N$ 」，「せん断力  $Q$ 」，「曲げモーメント  $M$ 」の 3 種類あり，その正負の符号の付け方も定められている。

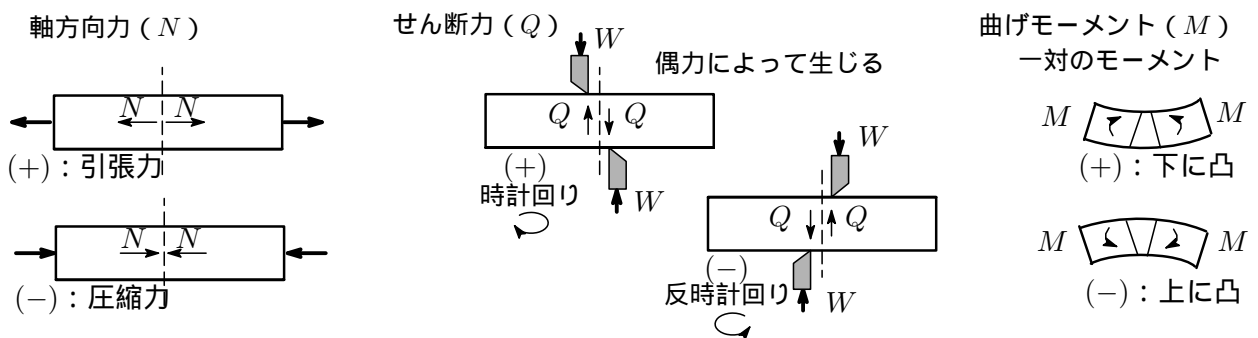


図 1.4: 断面力の種類

ただし、曲げモーメントに関しては正式な正負の符号の付け方はなく、通常下側に広がる変形（下に凸）が生じる場合を“+”，上側に広がる変形（上に凸）が生じる場合を“-”としているね。

- コニー：そうなんだ。一応規則としてそのように決めているのね。

種類	特長	部材に作用する力
軸方向力( $N$ )	外力が部材の軸方向に作用するときの応力。 引張力を正，圧縮力を負とする。	 引張力(+)      圧縮力(-)
せん断力( $Q$ )	外力が部材の材軸に垂直な方向に作用するときの応力。 せん断力は偶力によって生じる。 時計回りは正，反時計回りは負。	 正のせん断力      負のせん断力 左上がり右下がりの変形      左下がりの右上りの変形
曲げモーメント( $M$ )	外力が部材の材軸に垂直な方向に作用するときの応力。 正・負符号の正式な付け方はないが図に示すようにしておく。	 正の曲げモーメント      負の曲げモーメント 下に凸(+)      上に凸(-)

図 1.5: 断面力の種類と特長

### (3) 構造物の反力と断面力を求める

#### A. 片持ちばり

##### 集中荷重のケース

- K氏：それでは静定ばりの反力と断面力の計算をしていこう。ただし，静定ばりは剛体とみなす。図に示すようにA点に2kNの鉛直下方の外力がかかっているとしよう。

(1) 反力 固定端B点にははりを鉛直下方に動かさないための「鉛直反力」( $V_B$ )とはりが回転しないための「モーメント」( $M_B$ )の2の反力が生じる。はりには水平方向の外力作用がないので水平反力( $H_B$ )は0だが，これら3つの反力を”正の向き”になるように図に矢印を書き込む。

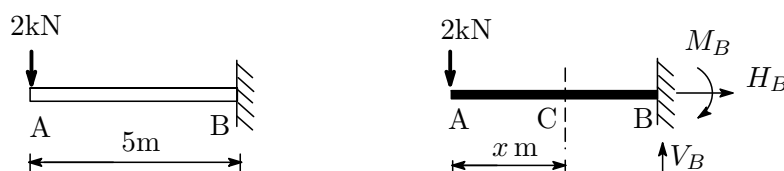


図 1.6: 片持ち梁と集中荷重

このような，はりに働くすべての力を矢印で描いた図をFBD，自由体図 (Free Body Diagram) と呼んでいる。力のつり合いの式を立てると

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -2 + V_B = 0$$

となるだろう。これから  $H_B = 0$ ,  $V_B = 2 \text{ kN}$  と求まる。次に B 点回りのモーメントのつり合いの式を立てると

$$\sum M = -2 \times 5 + M_B = 0 \quad (1.1)$$

から  $M_B = 10 \text{ kNm}$  と求められる。

- コニー：なるほど。ところで、はりには回転しないので、B 点以外でのモーメントのつり合いを考えてもいいのじゃない？
- K 氏：うん、一向にかまわない。力がつり合っているときはどの点に関してもモーメントの総和もゼロになるものね。ただうまい点を選ばないと計算が少し面倒になる。たとえば A 点から  $x \text{ m}$  離れた位置 C 点回りでのモーメントのつり合いを考えれば

$$\sum M = -2 \times x - (5 - x) \times V_B + M_B = 0 \quad (0 < x < 5)$$

と少し長い式になるね。  $V_B = 2$  を入れると  $M_B = 10$  と求まる。

## (2) 断面力

- K 氏：次に、はり AB 間の任意の位置 C の断面に生じる断面力を求めよう。はりを C 点で仮想的に切断し、左側のはりについて考えてみよう。
- コニー：ちょっと待って。仮想切断して穏やかじゃないわね。断面力を求めるにはそのようなことを考えなくてはならないの？
- K 氏：そうだね、例えばわかりやすい例として単純ばりを考えよう。荷重  $W$  が作用している単純ばりは静的な安定状態（つり合い状態）にあるとしよう。このとき、はりの一部が飛びだしたりはしないね。つまり、はりのどの部分も静的な安定状態にあると考えられるわけだ。この安定状

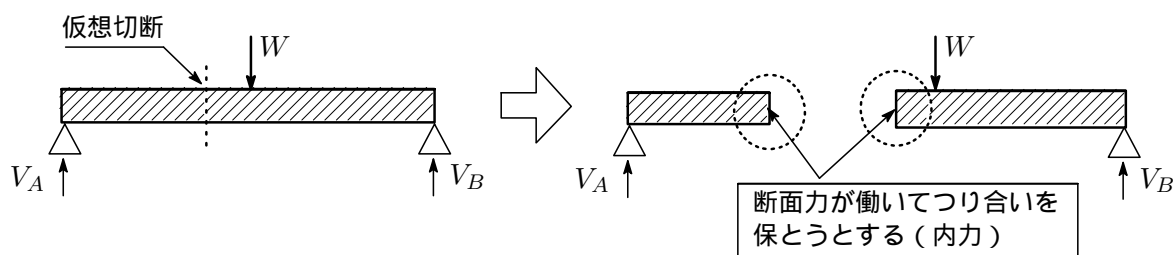


図 1.7: 仮想切断

態を保つには、外力に抗してはりの各部分に内力が働いているからと考えられる。いま、はりのある個所で仮想的に切断してやると、切断された左側あるいは右側どちらでもいいが、それぞれ静的な安定状態にあるわけだから、力のつり合いの関係から外力に抗する内力を設定しなければならない。つまり、内力を取りだすために仮想切断というのを考えるわけなんだね。この内力は切断面に生じるので断面力と呼ばれる。断面力の種類は先ほど説明した軸方向力、せん断力、曲げモーメントの3種類があるが、これらは外力の作用によって生じる。なお、当然だけど、仮想左切断面に生じる断面力と右切断面に生じる断面力は作用・反作用の関係にあり、互いに向き

が反対で大きさが等しい力となる。だから、断面力を求める問題では、一方の断面力を求めるだけで十分ということになるね。

- コニー：なるほど、仮想切断というのは断面力を顕在化させるための手段というわけね。
- K氏：そうだね。それでは具体的な計算に入っていきこう。ただし、ここで留意すべきことは、断面力の矢印の向きだ。テキストによって記述が異なっていたりして混乱しやすいが、ここでは切断した断面に「正の断面力」となるように、せん断力や曲げモーメントの矢印を描くやり方を採用する。これは切断位置に微小要素を介して3つの部分に切り分けて考えると分かりやすい。

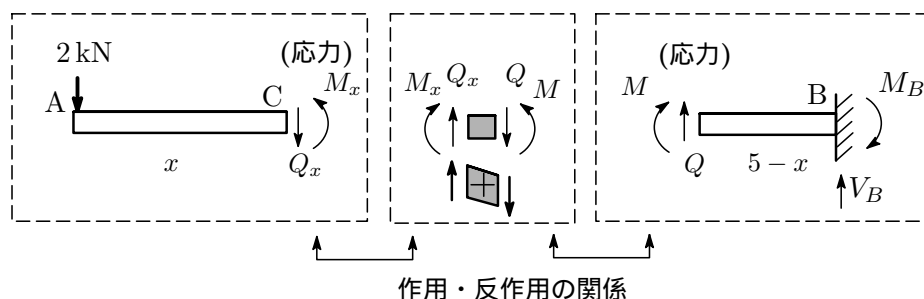


図 1.8: せん断力の求め方

図 1.8 に示すように、真ん中の微小部分（塗りつぶした部分）で左面が持ち上がり右面が持ち下がる変形を生じるせん断力が「正のせん断力」。また、下に凸の変形を起こすのが「正の曲げモーメント」となる。この符号の決め方は大した理屈はないので丸暗記するしかない。早い話、図 1.9（軸方向力は省略）のように矢印の向きを取ればいい。仮想切断された左側のはりでつり合いを考える場合は（1）、右側のはりでつり合いを考える場合は（2）で示す矢印の向きをとればいいということだ。

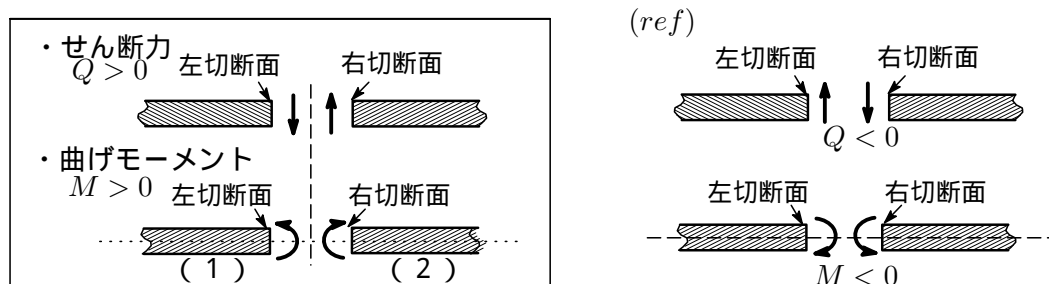


図 1.9: 仮想切断面と断面力の矢印の設定

- コニー：さて、そうするといまの場合の自由体図・FBD は次のように描けるわね。

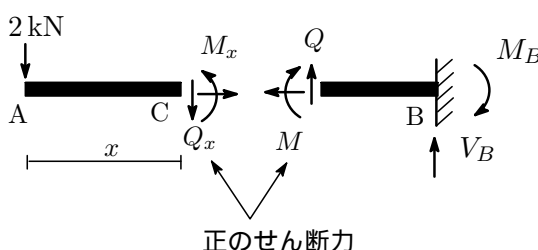


図 1.10: 片持ちばり 1 点荷重の FBD

- K氏：そうだね。それではAC間 ( $0 \leq x \leq 5$ ) の断面力を求めよう。まず、せん断力は鉛直方向の力のつり合いの式より

$$\sum Y = -2 - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = -2$$

片持ちばり AB の間のいたるところでせん断力は一定の  $Q = -2 \text{ kNm}$  となる。次に、切断点でのモーメントを  $M_x$  とすると、モーメントのつり合いの式より

$$\sum M = -2 \times x - M_x = 0 \quad \therefore M_x = -2x$$

A 点、B 点での曲げモーメントはそれぞれ  $M = 0$ ,  $M = -10 \text{ kNm}$  となる。得られた断面力の分布を描いた図をせん断力図・SFD (Shear Force Diagram), 曲げモーメント図・BMD (Bending Moment Diagram) というが、ここでは簡単に  $Q$  図,  $M$  図とする (図 1.11 を参照)。図中、プラスマイナスの符号の置き方もいろいろ流儀があるようだが、ここではせん断力  $Q$  は上方を (+), 下方を (-) に、曲げモーメント  $M$  は下方を (+), 上方を (-) に描くことにする。なお、 $Q$ ,  $M$  図に数値を書くときは通常 + - の符号は省略しているね。

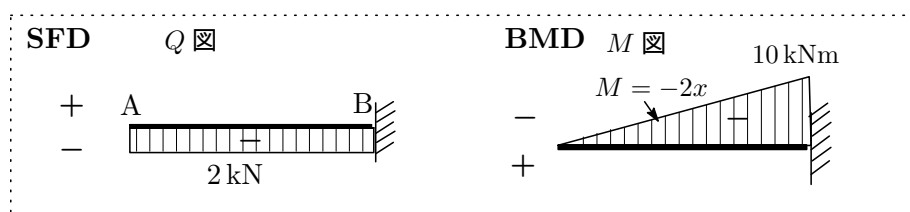


図 1.11: 片持ち梁の断面力

- コニー： $Q$  図,  $M$  図で正負の符号の領域が異なっているけどその理由はなにかあるの？
- K氏：うん、いまの場合せん断力はマイナス符号で左下がり・右上がりの変形を起こすだろう。この結果曲げモーメントは上に凸の変形を起こすことになる。この変形を方向を図でも示せるようにしているというわけだ。
- コニー：そうなんだ。ところでいま自由端の A 点側から考えたけど、固定端の B 点側から考えると。。。B 点の反力  $V_B$ ,  $M_B$  を考慮しなければならないのね。鉛直方向の力のつり合いより

$$\sum Y = V_B + Q'_x = 0 \quad \therefore Q'_x = -2$$

C 点回りのモーメントのつり合いの式より

$$\sum M = -(5-x) \times V_B + M_B + M'_x = 0, \quad \therefore M'_x = -2x$$

となって同じ結果となるわね。

- K氏：そうだね、片持ちばりの断面力計算をマニュアル化しておくとして
  - 1) はりを任意の位置で切断し、正の断面力となるように  $Q$ ,  $M$  の矢印を描く。
  - 2) 切断したはりの自由端側のはりで力のつり合いの式を立てる ( 計算が楽 )。
  - 3) これを解いて部材に生じる応力を求める。

## 分布荷重のケース

### A. 等分布荷重

- K氏：次にはり全体に荷重がかかった分布荷重を考えよう。力学で重心といえばその1点に質量が集中している点のことだった。したがって分布荷重は中点Mに働く集中荷重に置き換えて考えることができる。いま、片持ちはりに均一に20kN/mの荷重（等分布荷重）がかかっていると、反力と応力を求めよう。

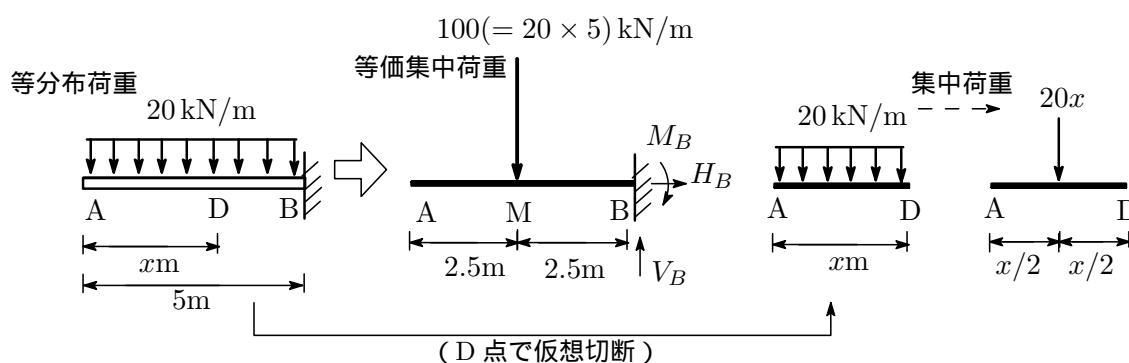


図 1.12: 片持ち梁と等分布荷重

(1) 反力 反力を  $V_B, H_B, M_B$  とする。モーメントは B 点に関して考えると、力のつり合いの式は

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -100 + V_B = 0, \quad \sum M = -100 \times 2.5 + M_B = 0$$

となる。これから  $H_B = 0, V_B = 100 \text{ kN}, M_B = 250 \text{ kNm}$  と求まる。

(2) 断面力 断面力は先ほどの応力計算マニュアルを活かして

- 1) はりを A 点から任意の距離  $x$  の点 D で切断し、
- 2) 点 D の切断面に正の  $Q, M$  の矢印を描く。
- 3) 長さが  $x$  のはり AD が受ける荷重は  $20x$  で AD の中点に集中荷重として作用する。
- 4) 力のつり合いの式より

$$\sum X = 0 + H = 0, \quad \sum Y = -20x - Q_x = 0, \quad \sum M = -20x \times (x/2) - M_x = 0$$

$$\therefore Q_x = -20x, \quad M_x = -10x^2 \quad (0 \leq x \leq 5)$$

と求まる。

A 点での応力は  $Q = 0, M = 0$ 、B 点では  $Q = -100 \text{ kN}, M = -250 \text{ kNm}$  となる。 $Q$  図、 $M$  図は図に示す通りだ。

なお、ここで曲げモーメント  $M_x$  とせん断力  $Q_x$  の間に成り立つ重要な関係式を紹介しておこう。

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (1.2)$$



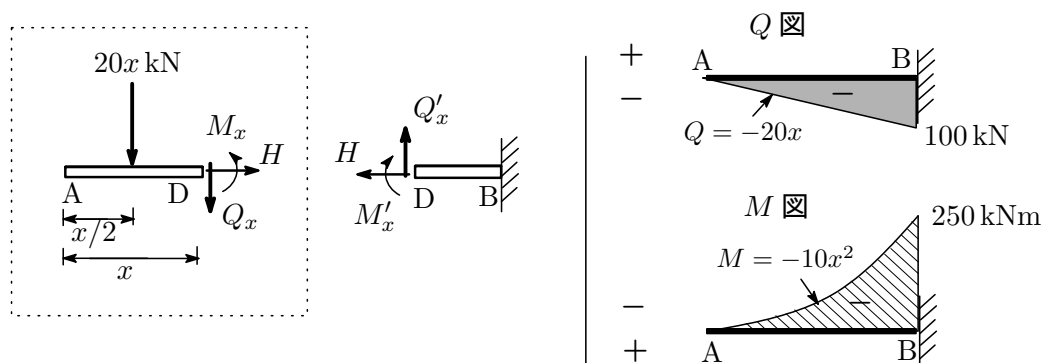


図 1.13: 片持ち梁・等分布荷重と断面力

これは有用な関係式で，断面力を計算する際のチェックに使えるし，なにより片方が分かればもう片方は即座に求められる。積分すれば

$$M_x = \int Q_x dx \quad (1.3)$$

で， $Q$  図から  $M$  図を作図することができる。この詳しい話は第 2 話でやる予定（お楽しみに）。なお，(1.2) の証明は第 1 話の最後でやろう。

## B. 等分布部分荷重

- K 氏：それでは次の問題をやってみるか。長さが 5m の片持ち梁があり自由端から 2m の幅で分布荷重 2kN/m が作用している。いわゆる等分布な部分荷重がかかっている場合で，反力と断面力を求めよという問題だ。

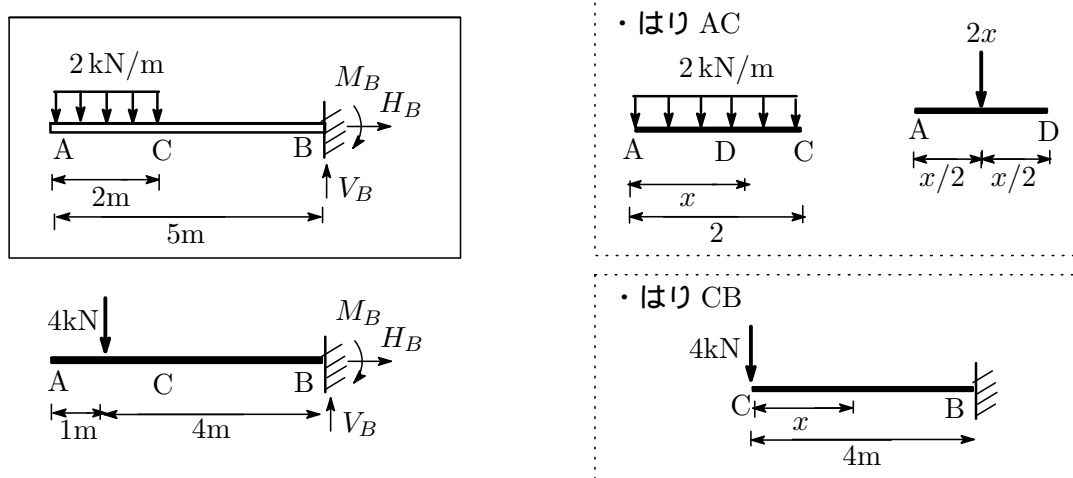


図 1.14: 片持ち梁・等分布部分荷重

- コニー：外力として鉛直力だけが作用しているので，力のつり合いの式を考える。反力のモーメント  $M_B$  は支点 B から 4m のところに集中荷重 4kN かかっていると考えればいい。だからつり

合いの式は

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -2 \times 2 + V_B = 0, \quad \sum M = -4 \times 4 + M_B = 0$$

となり, これから  $H_B = 0, V_B = 2 \times 2 = 4\text{kN}, M_B = 4 \times 4 = 16\text{kNm}$  と求められる。次に断面力だけ。。

- K氏: はりをC点で切断して考えるんだ。
- コニー: え~っと, そうすると, ACでは先ほどの等分布荷重のケースの計算結果がそのまま使えるので, ACの任意の位置  $x(0 \leq x \leq 2)$  でのせん断力は  $Q_x = -2x$ , 曲げモーメントは  $M_x = -x^2$  となるわね。A点 ( $x = 0$ ), C点 ( $x = 2$ ) での断面力はしたがって A:  $Q = 0, M = 0$ , B:  $Q = -4\text{kN}, M = -4\text{kNm}$ 。次にもう片方のはり CB( $2 \leq x \leq 5$ ) に発生する断面力は, C点に  $4\text{kN}$  の外力が作用していると考えと, 最初にやった計算結果が使えて  $Q_x = -4\text{kN}, M_x = -4x\text{kNm}$ 。Q図, M図は次のとおりね。

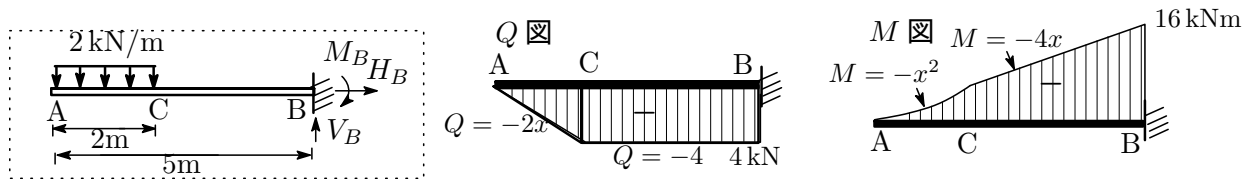


図 1.15: 片持ち梁・等分布部分荷重と Q 図・M 図

- K氏: そうだね。それでは次に等変分布荷重が作用したケースを考えてみよう。

#### 等変分布荷重

- K氏: 等変分布荷重というのは, はりの上に均質な直角三角形の重りを載せたようなものだ。全長  $6\text{m}$  の片持ちはり AB に  $W = 6 \times 12 \times (1/2) = 36\text{kN}$  の全荷重が載っているとしよう。  
(1) 反力 全荷重は直角三角形 ABC の重心に集中していると考えられるので, 重心 G からはり AB に垂線をおろした交点 D に集中荷重  $W$  が作用していることになる。したがって反力は力のつり合いの式

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -36 + V_B = 0, \quad \sum M = -36 \times 2 + M_B = 0$$

より  $H_B = 0, V_B = 36\text{kN}, M_B = 72\text{kNm}$  と求められる。断面力はどうなるかな, コニー計算してみるかい。

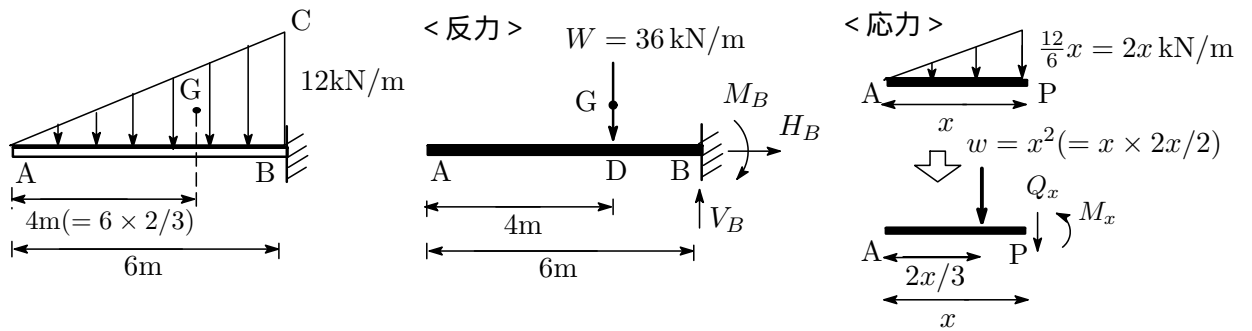


図 1.16: 片持ち梁・等変分布部分荷重

## (2) 断面力

- コニー：そうね。A 端から距離  $x$  の位置 P での断面力を計算するわ。はり AP に載っている荷重を  $w$  とすると、 $w = x \times 2x/2 = x^2$  となるわね。これは A 点から距離  $2x/3$  の位置に集中荷重として作用している。力のつり合いの式から、P 点でのせん断力を  $Q_x$  とすると

$$\sum Y = -w - Q_x = -x^2 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = -x^2 \quad (0 \leq x \leq 6)$$

曲げモーメントを  $M_x$  とすると、P 点に関するモーメントとのつり合いより

$$\sum M = -(x - 2x/3) \times w - M_x = 0, \quad \therefore M_x = -x^3/3$$

Q 図、M 図は次の通りね。

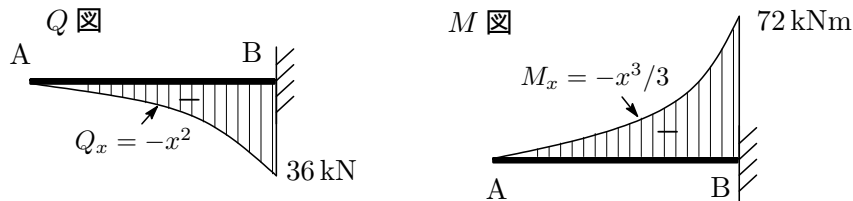


図 1.17: 片持ち梁・等変分布部分荷重の Q 図・M 図

- K 氏：OK。それじゃ第 1 話の最後にもう一つだけやっておこう。最初にやった集中荷重のケースをもう一度見直しておけばいいと思う。

## 2 点に荷重がかかるケース

- K 氏：はりの 2 点 A、C に 2kN と 3kN の荷重がかかっている場合の反力と断面力を求める。

(1) 反力 これは容易に求められるね。反力を  $V_B, H_B, M_B$  とすると、力のつり合いの式

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -2 - 3 + V_B = 0, \quad \sum M = (-2 \times 5) + (-3 \times 2.5) + M_B = 0$$

から  $H_B = 0, V_B = 5 \text{ kN}, M_B = 17.5 \text{ kNm}$  となる。

(2) 断面力 断面力を求めるには、はりを C 点で仮想的に切断し AC と CB に分けて考える。

はり AC には A 点に 2kN の荷重がかかっている。せん断力は力のつり合いの式から

$$\sum Y = -2 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = -2 \quad (0 \leq x \leq 2.5)$$

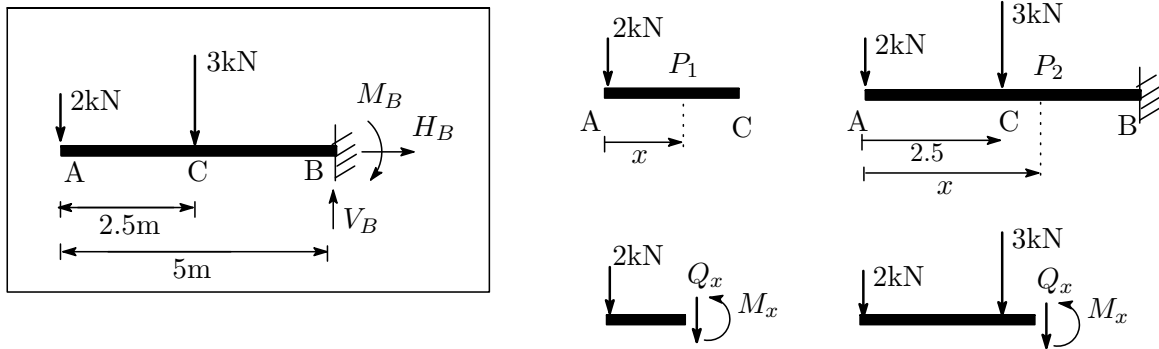


図 1.18: 片持ち梁・2点荷重

曲げモーメントは点  $P_1$  に関するモーメントのつり合いから

$$\sum M = -2 \times x - M_x = 0, \quad \therefore M_x = -2x$$

A 点 ( $x = 0$ ) では  $M = 0$ , C 点 ( $x = 2.5$ ) では  $M = -5$  となる。

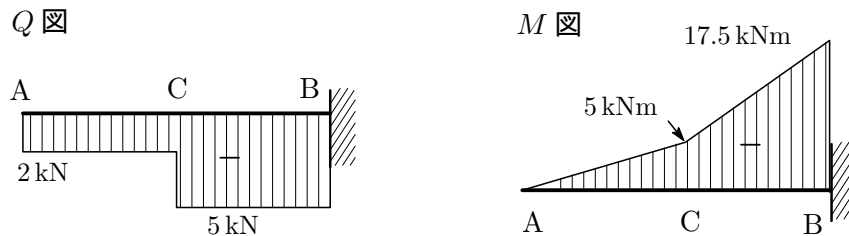
次に CB 間の断面力は力のつり合いから

$$\sum Y = -2 - 3 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = -5 \quad (2.5 \leq x \leq 5)$$

- コニー：B 点の固定端の反力  $V_B$  とちょうどつりあっているね。
- K 氏：そうだね。次に曲げモーメントだが、点  $P_2$  に関するモーメントのつり合いから

$$\sum M = -x \times 2 - (x - 2.5) \times 3 - M_x = 0, \quad \therefore M_x = -5x + 7.5 \quad (2.5 \leq x \leq 5)$$

断面力分布図は

図 1.19: 片持ち梁・2点荷重の  $Q$  図・ $M$  図

以上で第 1 話を終わると思う。

- コニー：お疲れ様でした。ところで固定端 B 点を起点として断面力を求める場合、計算が少し面倒になるということだけ最後に復習をかねてやってみるわね。

(1) BC 間の任意の位置  $P_1$  ( $0 \leq x \leq 2.5$ ) で仮想切断し、せん断力と曲げモーメントを  $Q_x$ ,  $M_x$  とする。力のつり合いから

$$\begin{aligned} \sum Y = Q_x + V_B = 0 & \quad \therefore Q_x = -5 \\ \sum M = M_x + M_B - x \times V_B = 0 & \quad \therefore M_x = 5x - 17.5 \end{aligned}$$

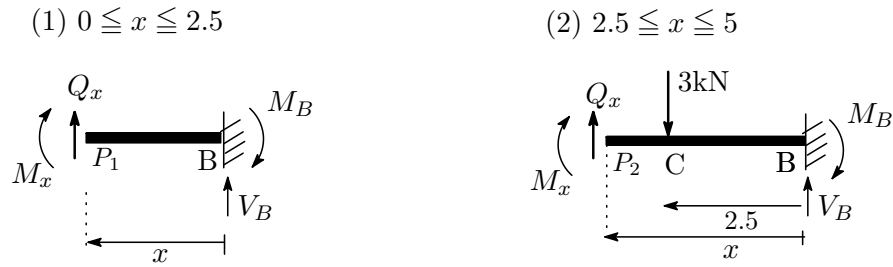


図 1.20: 固定端を起点とした場合

B 点 ( $x = 0$ ) での曲げモーメントは  $M = -17.5 \text{ kNm}$  で、反力モーメントとつり合っている。

(2) CA の任意の位置  $P_2$  で仮想切断し、せん断力と曲げモーメントを  $Q_x, M_x$  とする。力のつり合いから

$$\sum Y = -Q_x - 3 + V_B = 0 \quad \therefore Q_x = -2 \quad (2.5 \leq x \leq 5)$$

$$\sum M = M_x + M_B + (x - 2.5) \times 3 - x \times V_B = 0 \quad \therefore M_x = 2x - 10$$

曲げモーメントは C 点 ( $x = 2.5$ ) では  $M = -5 \text{ kNm}$  , A 点 ( $x = 5$ ) では  $M = 0 \text{ kNm}$  となる。当たり前なことだけで、A 点側から計算したのと同じ結果を与えるわね。

- K 氏：そうだね。モーメントの計算が少し面倒になるだろう。 $x$  の起点が異なるから違う表式とになっているけど、 $x = 5 - x$  と置換してしま得られた式に代入すると同じ表式となるね。さて、第 2 話では単純ばかりを取り上げよう。
- コニー：了解しました。第 2 話が楽しみね！

おまけ：(1.2) の証明：任意の分布荷重  $w = f(x)$  を受けるはりにおいて、左端から  $x$  の距離にある長さ  $dx$  の部分を取りだすと、図 1.21 のように左右の切断面にそれぞれ  $Q_x, M_x$  と  $Q_x + dQ_x, M_x + dM_x$  の断面力が作用する。力のつり合いから

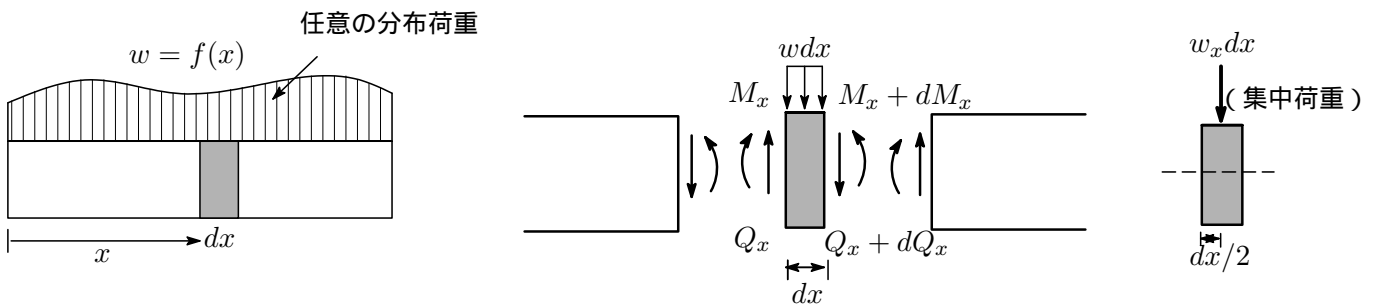


図 1.21: せん断力と曲げモーメントの関係

$$\sum Y = Q_x - (Q_x + dQ_x) - w_x dx = 0, \quad \therefore \frac{dQ_x}{dx} = -w_x \quad (1.4)$$

を得る。せん断力を位置微分したものは荷重の符号を変えたものと等しい。また、モーメントのつり合いから

$$\sum M = M_x - (M_x + dM_x) + Q_x dx - (w_x dx) \frac{1}{2} dx = 0, \quad \therefore \frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (1.5)$$

となる。ただし、2次の無限小を無視した。(1.4)と(1.5)より

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x, \quad \frac{d^2M_x}{dx^2} = -w_x (< 0) \quad (1.6)$$

の関係式が得られる。一般に、関数  $y = f(x)$  において  $f'(a) = 0$  であるとき、 $f''(x) > 0$  なら  $f(x)$  は  $x = a$  で極小(最少)、反対に  $f''(x) < 0$  なら  $f(x)$  は  $x = a$  で極大(最大)となった。したがって、 $Q_x = 0$  の断面で  $M_x$  は最大値をとることが分かる。//

## 第2話.

## 平面構造物のつり合い(2)

## B. 単純ばり

任意の1点に集中荷重がかかるケース

- K氏：第1話で片持ちばりの反力と断面力の計算のやり方を見てきた。第2話では単純ばりラーメンを取り上げよう。まず単純ばりから。
- コニー：単純ばりは第1話で仮想切断を考察したときに登場したわね。
- K氏：うん、2つの支点で支えられ一端がピン支点、もう一端がローラー支点のはりのことだね。第1話で説明したように、ピン支点は水平反力と鉛直反力の2つ、ローラー支点の方は鉛直反力だけが生じる。ではさっそく次のような単純ばりのケースを考えていこう。

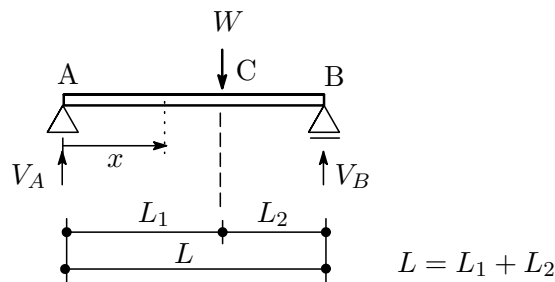


図 2.1: 単純梁

(1) 反力 力のつり合いの式から

$$\sum Y = -W + V_A + V_B = 0 \quad \therefore V_A + V_B = W$$

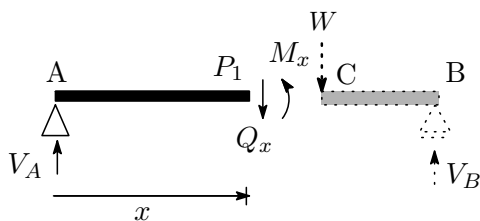
A点回りのモーメントのつり合いを考えると

$$\sum M = L_1 \times W - L \times V_B = 0 \quad \therefore V_B = \frac{L_1}{L} W$$

したがって  $V_A = \frac{L_2}{L} W$  と求められる。

(2) 断面力

(1)  $0 \leq x \leq L_1$



(2)  $L_1 \leq x \leq L$

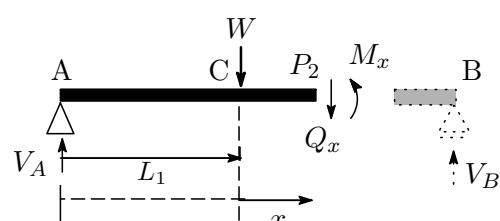


図 2.2: 単純ばりの断面力を求める

(1) AC間の任意の位置  $P_1$  で仮想切断し, 力のつり合いから

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = V_A = \frac{L_2}{L}W$$

点  $P_1$  まわりのモーメントのつり合いから

$$\sum M = x \times V_A - M_x = 0 \quad \therefore M_x = xV_A = \frac{L_2}{L}Wx$$

(2) CBの任意の位置  $P_2$  で仮想切断し, 力のつり合いから

$$\sum Y = V_A - W - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = V_A - W = -V_B = -\frac{L_1}{L}W$$

点  $P_2$  まわりのモーメントのつり合いから

$$\sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W - M_x = 0 \quad \therefore M_x = \frac{L_1 W}{L}(L - x)$$

以上の結果をまとめておくと

- ・反力 :  $V_A = \frac{L_2}{L}W$ ,  $V_B = \frac{L_1}{L}W$
- ・せん断力 :  $Q_{AC} = \frac{L_2}{L}W$ ,  $Q_{CB} = -\frac{L_1}{L}W$
- ・曲げモーメント :  $M_{AC} = \frac{L_2}{L}Wx$  ( $0 \leq x \leq L_1$ )  $M_{CB} = \frac{L_1}{L}W(L - x)$  ( $L_1 \leq x \leq L$ )
- (最大値/ $x = L_1$ ) :  $M_{max} = \frac{L_1 L_2}{L}W = L_1 V_A = L_2 V_B$

$W = 30\text{kN}$ ,  $L = 5\text{m}$ ,  $L_1 = 3\text{m}$ ,  $L_2 = 2\text{m}$  とした場合,  $V_A = 12\text{kN}$ ,  $V_B = 18\text{kN}$ ,  $M_{max} = 36\text{kNm}$  で  $Q$  図,  $M$  図は次の通りだ。

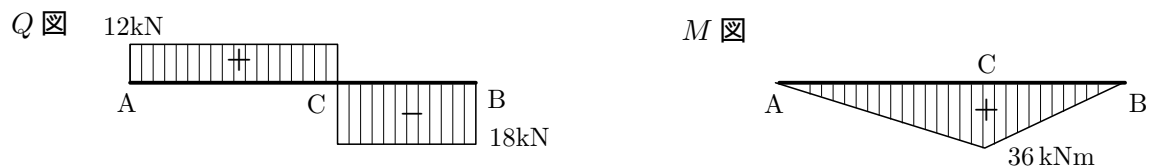


図 2.3: 単純梁の  $Q$  図・ $M$  図

2 点に荷重がかかるケース

- K 氏: 次は 2 点に荷重がかかる場合を取り上げよう。

(1) 反力力のつり合いの式から

$$\sum Y = -W_1 - W_2 + V_A + V_B = 0 \quad \therefore V_A + V_B = W_1 + W_2$$

A 点回りのモーメントのつり合いを考えると

$$\sum M = L_1 \times W + (L_1 + L_2) \times W_2 - L \times V_B = 0 \quad \therefore V_B = \frac{L_1 W_1 + (L_1 + L_2) W_2}{L}$$



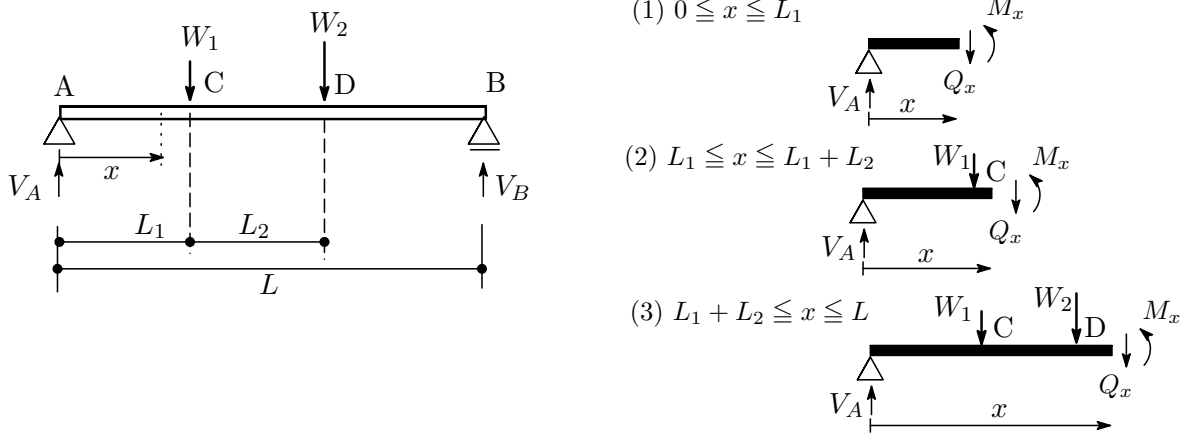


図 2.4: 単純梁・2点荷重

これから

$$V_A = W_1 + W_2 - \frac{L_1 W_1 + (L_1 + L_2) W_2}{L}$$

(2) 断面力 次の3つの領域に分けて考える。

(1)  $0 \leq x \leq L_1$

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = V_A$$

$$\sum M = x \times V_A - M_x = 0, \quad \therefore M_x = x V_A \begin{cases} M_A = 0 \\ M_C = L_1 V_A \end{cases}$$

(2)  $L_1 \leq x \leq L_1 + L_2$

$$\sum Y = V_A - W_1 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = V_A - W_1$$

$$\sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W_1 - M_x = 0,$$

$$\therefore M_x = (V_A - W_1)x + L_1 W_1 \begin{cases} M_C = L_1 V_A \\ M_D = L_1 V_A + L_2 (V_A - W_1) \end{cases}$$

(3)  $L_1 + L_2 \leq x \leq L$

$$\sum Y = V_A - W_1 - W_2 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = V_A - (W_1 + W_2)$$

$$\sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W_1 - (x - L_1 - L_2) \times W_2 - M_x = 0,$$

$$\therefore M_x = (V_A - W_1 - W_2)x + L_1(W_1 + W_2) + L_2 W_2$$

$$\begin{cases} M_D = L_1 V_A + L_2 (V_A - W_1) \\ M_B = L(V_A - W_1 - W_2) + L_1(W_1 + W_2) + L_2 W_2 \end{cases}$$

具体的に  $L = 4\text{m}$ ,  $L_1 = 1\text{m}$ ,  $L_2 = 1\text{m}$ ,  $W_1 = 10\text{kN}$ ,  $W_2 = 15\text{kN}$  とした場合,  $V_A = 15\text{kN}$ ,  $V_B = 10\text{kN}$ ,  $M_C = 15\text{kNm}$ ,  $M_D = 20\text{kNm}$  となり,  $Q$  図,  $M$  図は次の通りだ。

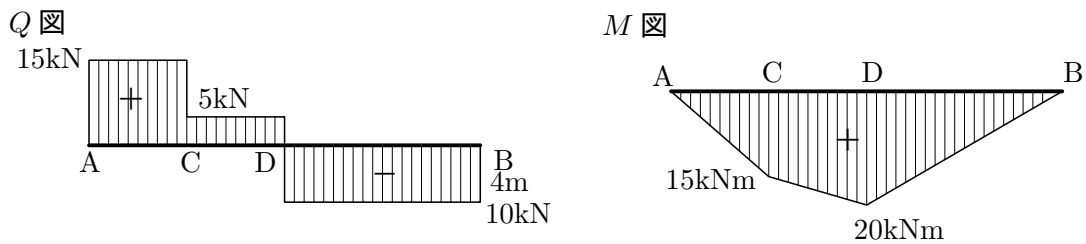


図 2.5: 単純梁・2点荷重の  $Q$  図・ $M$  図

$Q$ ,  $M$  図を図解で求める

(1)  $Q$  図

- K ところで上の  $Q$  図をよく見ると何か簡単なルールのようなものが見えてこないかい？
- コニー：そうねえ。。。アッ！簡単な関係があるじゃないの。左側から考えていくと図で示するような関係があるわね。

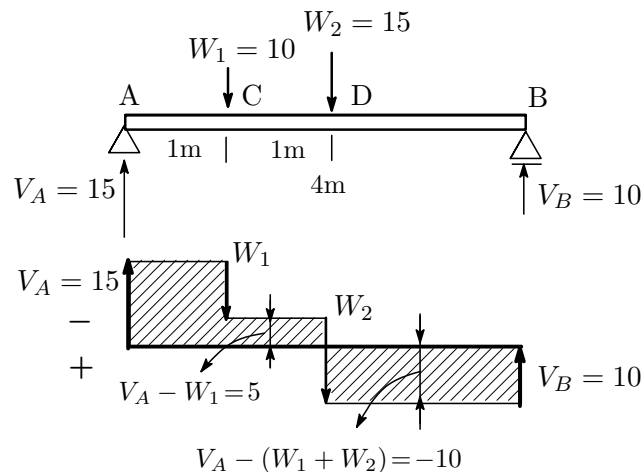


図 2.6: 単純梁のせん断力と荷重の関係

- K 氏：そうなんだ。このからくりを知っておくと，反力さえを求めておけば  $Q$  図は即座に描けることになる。例えば次のような3点荷重の単純ばりの  $Q$  図は即座に描けるね。

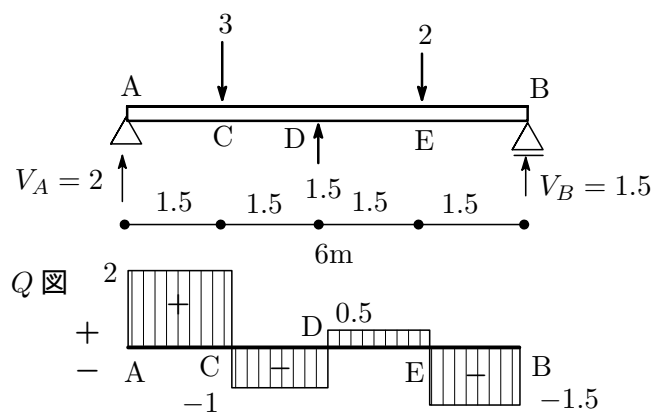


図 2.7: 単純梁・3点荷重の  $Q$  図

- コニー：なるほど。それでは例えば次のような均一な分布荷重の場合ではどうかしら。

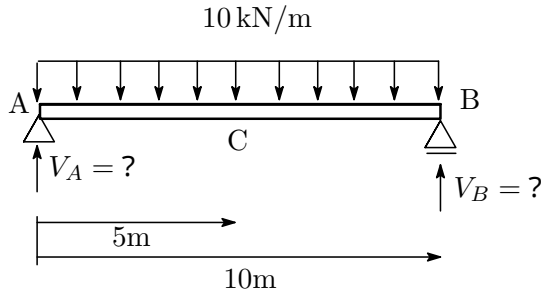


図 2.8: 単純梁・等分布荷重

- K氏：まず，正攻法(?)でやろう。計算はいままで何度もしてきたから簡単に済ますとして，まず反力を求める。力のつり合いから

$$\sum Y = V_A + V_B - 10 \times 10 = 0, \quad \sum M = 5 \times V_A - 5 \times V_B = 0 \quad \therefore V_A = 50, V_B = 50$$

次に，A 端から距離  $x$  の位置で仮想切断し，力のつり合いの式を立てて断面力を求める。

$$\sum Y = 50 - 10x - Q_x = 0, \quad \sum M = x \times 50 - (x/2) \times 10x - M_x = 0 \quad (0 \leq x \leq 10)$$

$$\therefore Q_x = -10x + 50, \quad M_x = -5x^2 + 50x$$

したがって， $Q$  図， $M$  図は次のようになる。

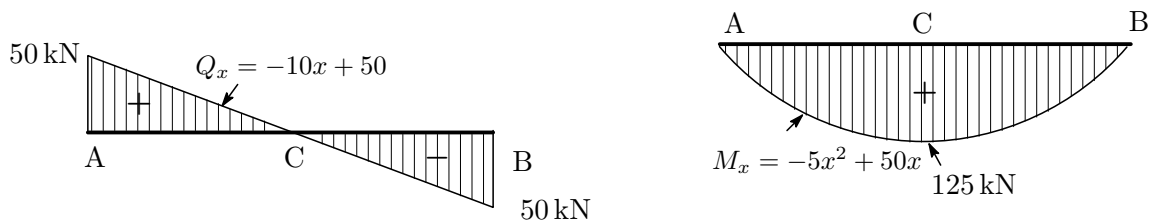


図 2.9: 単純梁・等分布荷重の  $Q$  図・ $M$  図

さて，図解でやろう。まず，A 端に反力  $V_A$  のベクトルを描く。そのベクトルを B 端にまで移動し，今度はそのベクトルの終点から分布荷重の総荷重 100 kN の鉛直下方に向けたベクトルを描く。次に双方のベクトルの終点と終点を結ぶ。あとは正負の符号を書き込んでできあがり。

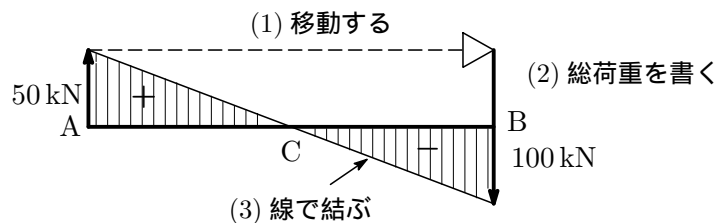


図 2.10:  $Q$  図の描き方

簡単だろう。このやり方は，第 1 話でやった片持ちばりにも適用できるので是非やってみてほしい。

- コニー：わかりました，確認しておきます。ところで， $M$  図はどうなるのから？

- K氏：そうきたか。じゃ次に  $M$  の描き方を説明しよう。

## (2) $M$ 図

- K氏：さて、第1話ででてきた曲げモーメント  $M_x$  とせん断力  $Q_x$  の関係式(??)を  $x$  で積分すると

$$M_x = \int Q_x dx \quad (2.1)$$

これは、曲げモーメントの値は  $Q$  図の面積に等しいことを意味している。この関係を利用すれば  $M$  図が簡単に描ける。例えば図 2.4 の  $M$  図は3ステップで描ける。各積分値をプロットしてあとは直線で結べば出来上がりという訳だね。

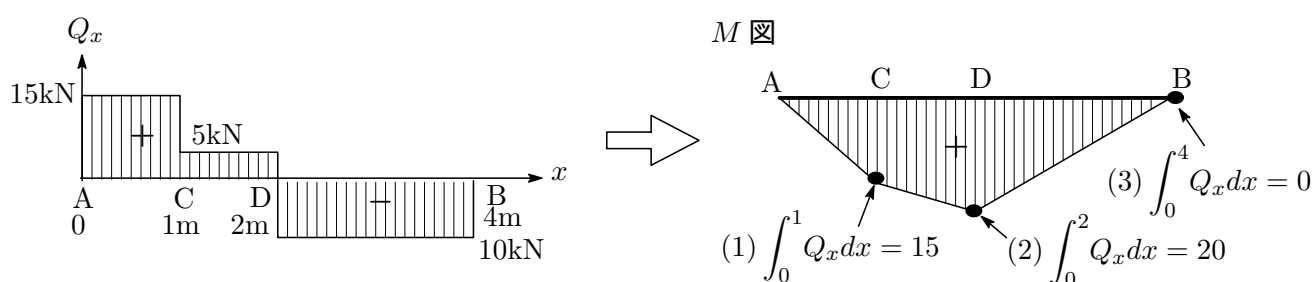


図 2.11: 単純梁・2点荷重の  $M$  図の描き方

- コニー：なるほど、簡単ね！図 2.7 のケースだったら次のようになるわね。

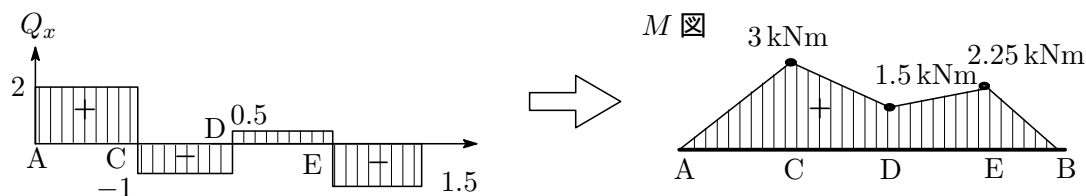


図 2.12: 単純梁・3点荷重の  $M$  図を描く

- K氏：そうだね。等分布荷重の場合も全く同じ要領だ。 $M$  図は2次曲線になることに注意をすればいい。図 2.9 を取り上げると次のようになるだろう。

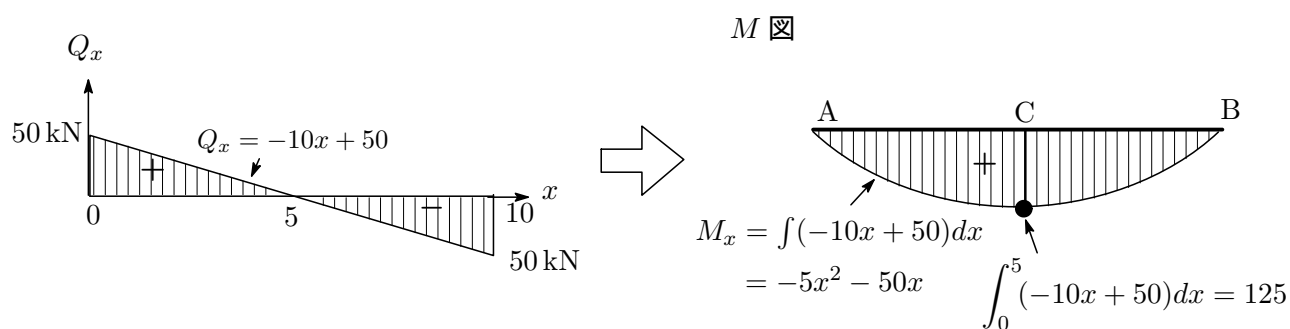


図 2.13: 単純梁・均一荷重の  $M$  図を描く

- コニー： $Q$  図が描ければ  $M$  図はモーメント計算をしなくても簡単に描けるわけね。

- K氏：そうだね。いろいろなケースに適用してみてごらん。少し疲れてきたので第2話はここらあたりで終了するとして，第3話はラーメンを取り上げよう。
- コニー：ラーメンといわれて急にお腹がすいてきたわ。ラーメンを食べに行かない，ご馳走しますから。
- K氏：それはありがたいね。ごちそうになるよ。

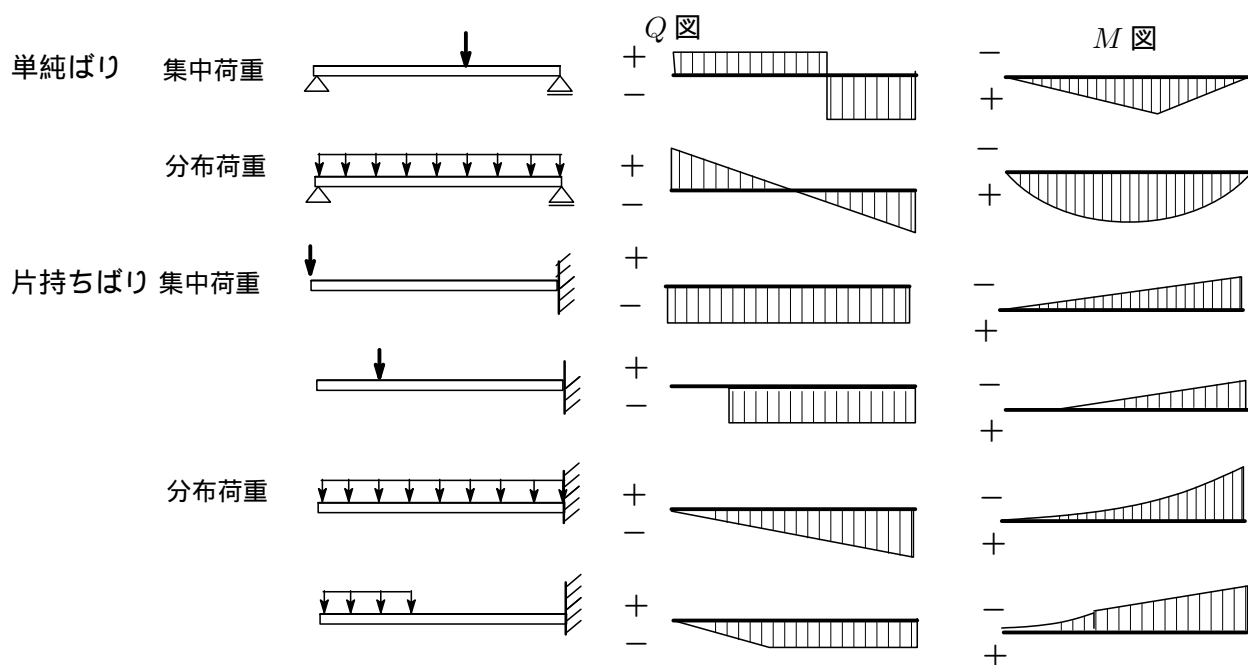


図 2.14: 代表的な梁と  $Q$  図・ $M$  図の形

## C. 静定ラーメン

## 静定ラーメンの種類

- K氏：静定ラーメンには大きく分けて「片持ちばり系」「単純ばり系」「3ヒンジ系」の3種類がある。それぞれの特徴は、片持ちばり系は支点が固定支点、単純ばり系は片側の支点がピン支点

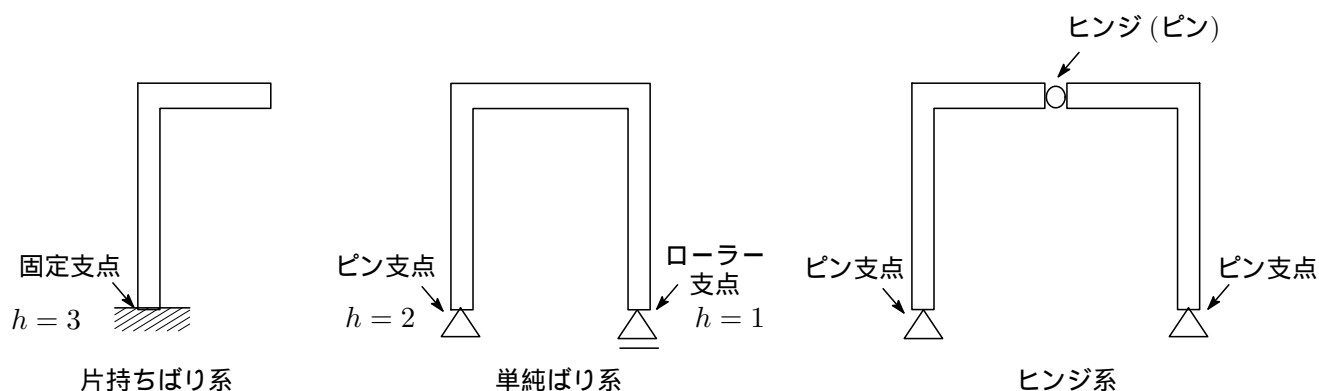


図 3.1: 静定ラーメンの種類

でもう片方がローラー支点。スリーヒンジ系は支点が2か所ともピン支点で、部材中のどこかにヒンジ(ピン)があるラーメン構造となっている。部材と部材の結合部(節点)は互いに回転できずに剛に接合されているため大きな力が加わるね。

- コニー：単純ばり系ラーメンはピン支点とローラー支点になっているけど、両方ともピン支点というのはないの？
- K氏：鋭い指摘だね。例えば両方ともピン支点となると未知数である反力の合計は4つになるだろう。一方、力のつり合いの式は3つで1つ不足する。つまり、力のつり合いの式だけでは求められず、もう一つの式が必要になるわけだね。このようなのを不静定構造物といっている。ここでは力のつり合いだけで解ける静定構造物を考える。
- コニー：ヒンジ系はピン支点が2つあるわね。反力の未知数は4個になるけど？
- K氏：うん、そうだね。ただ、ピン節点は回転が自由で、その点での曲げモーメントは0となる。この条件を力のつり合いの3つの方程式に加えると合計4個の方程式となるね。これでバランスがとれた。ということで3ヒンジ系ラーメンの場合、両支点がピンの場合でも静定構造物として扱うことができるというわけだね。具体的な計算は追々やっていくとして、まず単純ばり系からみていこう。

## C - 1 . 単純ばり系：鉛直荷重

- K氏：鉛直荷重のみが作用する単純ばり系ラーメンの反力と断面力を求めよう。

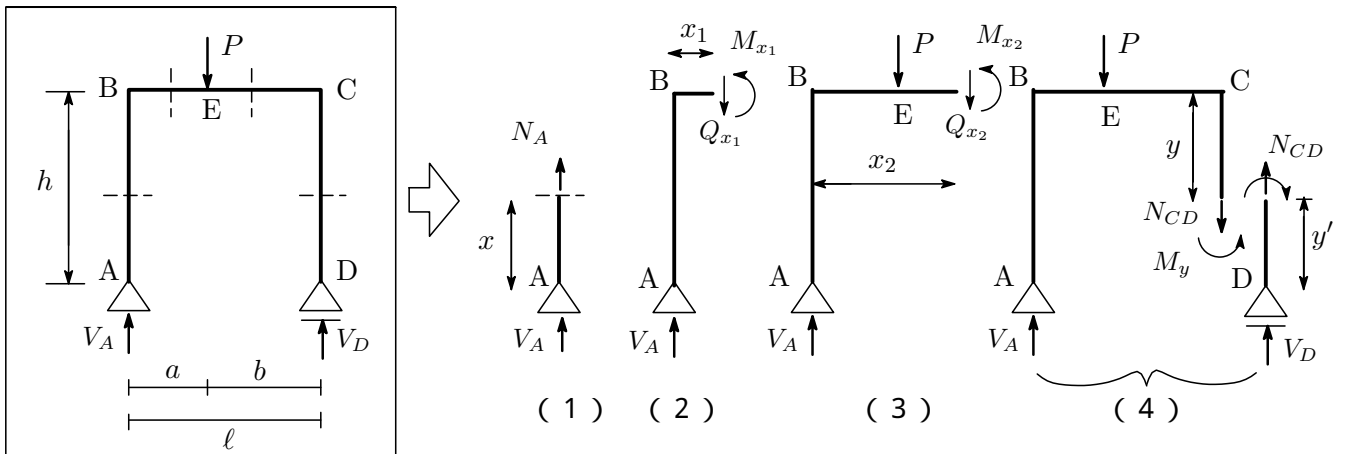


図 3.2: 単純ばり系ラーメン：鉛直力が作用

反力：まず反力から求めていこう。支点 A はピン支点なので水平 ( $H_A$ ) と鉛直反力 ( $V_A$ ) の 2 つ、支点 B はローラー支点なので鉛直反力 ( $V_B$ ) が 1 つで合計 3 つに反力が生じる。

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A = 0 & \therefore H_A &= 0 \\ \sum M &= a \times P - \ell \times V_D = 0 & \therefore V_D &= \frac{Pa}{\ell} \\ \sum Y &= V_A + V_D - P = 0 & \therefore V_A &= \frac{Pb}{\ell} \end{aligned}$$

断面力：断面力を求める点で仮想切断し、計算しやすい側で計算して断面力を求める。断面力は 1 対の力なので片方が分かればいわけだね。

- コニー：了解。ところで、 $Q$  や  $M$  の矢印の向きはどのようにして決めるの。これさえはっきりすればあとは力のつり合いの式から計算できるわね。
- K 氏：そうだね。ラーメンの場合、視点を内側において A, B, C, D のそれぞれを起点とした場合の断面力  $Q, M, N$  の矢印は図 3.3 に示す通りとなる。だからどちら側から計算しようとし

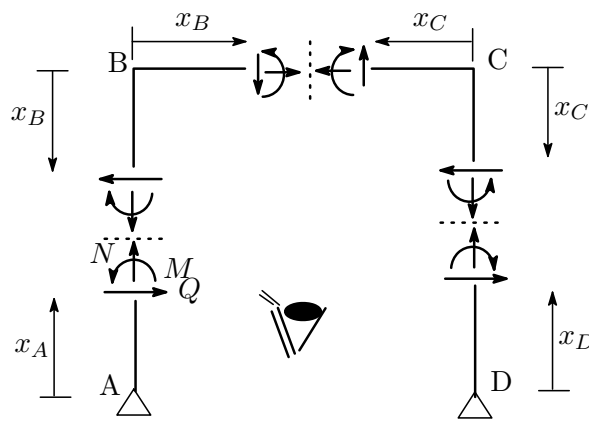


図 3.3: ラーメンの断面力の設定

ているのか、その点をハッキリしないと混迷することになってしまう。。。ということを入れて、断面力を計算していこう。

- (1) AB の間の任意の位置  $x$  ( $0 \leq x \leq h$ ) で仮想切断する。この位置に作用する力は支点 A から鉛直上方に働く反力  $V_A$  だけで、これは圧縮力  $N_{AB}$  として作用することに注意しよう。力のつり合いの式より

$$\sum Y = V_A + N_{AB} = 0 \quad \therefore N_{AB} = -\frac{Pb}{\ell}$$

$$Q_{AB} = 0, \quad M_{AB} = 0$$

- (2) 区間 BE の任意の位置  $x_1$  ( $0 \leq x_1 \leq a$ ) で仮想切断する。作用する外力は  $V_A$  のみ。

$$\sum Y = V_A - Q_{x_1} = 0 \quad \therefore Q_{x_1} = \frac{Pb}{\ell}$$

$$\sum M = -M_{x_1} + x_1 \times V_A = 0 \quad \therefore M_{x_1} = \frac{Pb}{\ell} x_1$$

$$N_{x_1} = 0$$

- (3) 区間 EC の任意の位置  $x_2$  ( $a \leq x_2 \leq \ell$ ) で仮想切断する。作用する外力は  $V_A$  と  $P$ 。

$$\sum Y = V_A - Q_{x_2} - P = 0 \quad \therefore Q_{x_2} = -\frac{Pa}{\ell}$$

$$\sum M = -M_{x_2} + x_2 \times V_A - (x_2 - a) \times P = 0 \quad \therefore M_{x_2} = P \left\{ \frac{b}{\ell} x_2 - (x_2 - a) \right\}$$

$$N_{x_2} = 0$$

- (4) 区間 CD の任意の位置  $y$  ( $0 \leq y \leq h$ ) で仮想切断する。左側部で計算してもよいが、この場合、右側部での計算の方が簡単に済む。

$$\sum Y = V_B + N_{CD} = 0 \quad \therefore N_{CD} = -\frac{Pa}{\ell}$$

$$M_{CD} = 0, \quad Q_{CD} = 0$$

左側部から計算してみるかい。

コニー：わかったわ。せん断力は働かないので  $Q_{CD} = 0$ 。鉛直方向のつり合いから

$$\sum Y = V_A - P - N_{CD} = 0 \quad N_{CD} = V_A - P = -\frac{Pa}{\ell}$$

C 点回りのモーメントのつり合いから

$$\sum M = \ell \times V_A - b \times P - M_{CD} = 0 \quad \therefore M_{CD} = 0$$

- K 氏：得られた結果をまとめておくと次のようになるね。

	せん断力	曲げモーメント	軸方向力
区間 AB	$Q_{AB} = 0$	$M_{AB} = 0$	$N_{AB} = -Pb/\ell$
区間 BE	$Q_{x_1} = Pb/\ell$	$M_{x_1} = (Pb/\ell)x_1$	$N_{x_1} = 0$
区間 EC	$Q_{x_2} = -Pa/\ell$	$M_{x_2} = \{(b/\ell)x_2 - (x_2 - a)\}P$	$N_{x_2} = 0$
区間 CD	$Q_{CD} = 0$	$M_{CD} = 0$	$N_{CD} = -Pa/\ell$

これから  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  図は次のようになる。なお、正負の符号は図を参照。



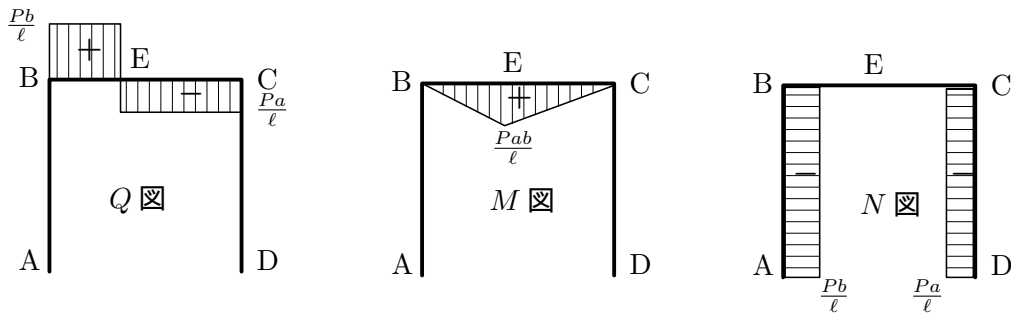


図 3.4: ラーメンの  $Q, M, N$  図 (鉛直荷重)

C - 2 . 単純ばり系 : 水平力が作用

- K 氏 : 水平力  $P$  が作用する単純ばり系ラーメンの反力と断面力を求めよう。

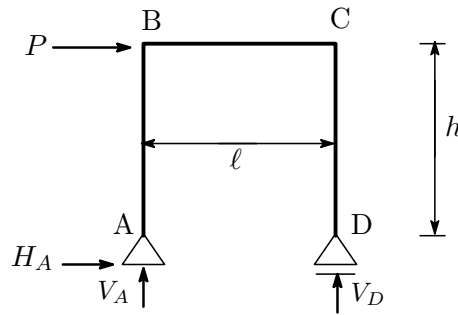


図 3.5: 単純ばり系ラーメン : 水平力が作用

反力 : D のローラー支点は拘束度が 1 で鉛直方向の反力しか生じないことに注意しよう。ピン支点 A の水平反力を  $H_A$  とすると, 力のつり合いの式より

$$\begin{aligned} \sum X &= P + H_A = 0 & \therefore H_A &= -P \\ \sum Y &= V_A + V_D = 0 & \therefore V_A &= -V_D \\ \sum M &= h \times P - l \times V_D = 0 & \therefore V_A &= -Ph/l, V_D = Ph/l \end{aligned}$$

断面力 : 図のように仮想切断して各位置での断面力を求める。(1)(2)(3)のように仮想切断し片側で計算する。

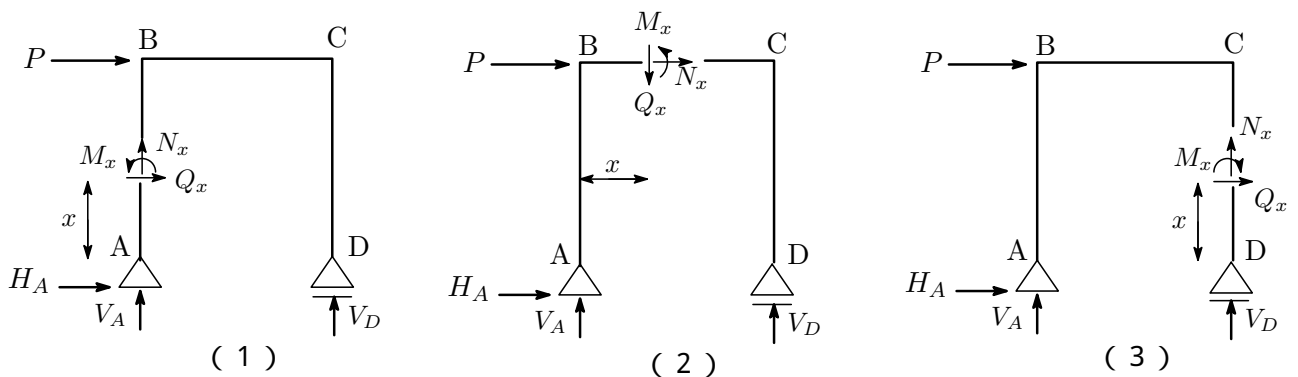


図 3.6: 断面力を求める

(1)  $0 \leq x \leq h$

$$\begin{aligned} \sum X = H_A + Q_x = 0 & \quad \therefore Q_x = -H_A = P \\ \sum Y = V_A + N_x = 0 & \quad \therefore N_x = -V_A = P \\ \sum M = -x \times H_A - M_x = 0 & \quad \therefore M_x = -H_A x = Px \end{aligned}$$

(2)  $0 \leq x \leq \ell$

$$\begin{aligned} \sum X = H_A + P + N_x = 0, \quad \sum Y = V_A - Q_x = 0, \quad \sum M = -h \times H_A + x \times V_A - M_x \\ \therefore Q_x = -P, \quad M_x = P(h - x), \quad N_x = 0 \end{aligned}$$

(3)  $0 \leq x \leq h$

$$\sum X = Q_x = 0, \quad \sum Y = V_D + N_x = 0, \quad \therefore N_x = -P, \quad \sum M = M_x = 0$$

Q, M, N 図は次の通り。

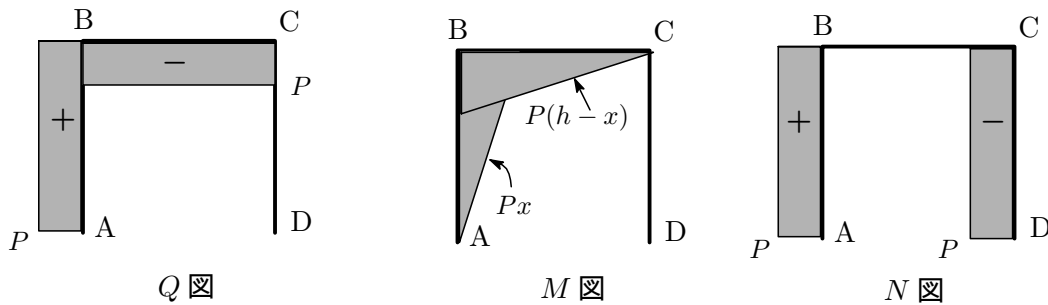


図 3.7: ラーメンの Q, M, N 図 (水平荷重)

### C - 3 . 片持ちばり系ラーメン

- K 氏: 自由端 A に P の鉛直荷重が作用する次の片持ちばり系ラーメンの断面力を計算しよう。断面力は AB, BC, CD の各区間ごとに仮想切断し, 自由端側で計算する。こうすることで反力を求める必要がないというメリットがある。

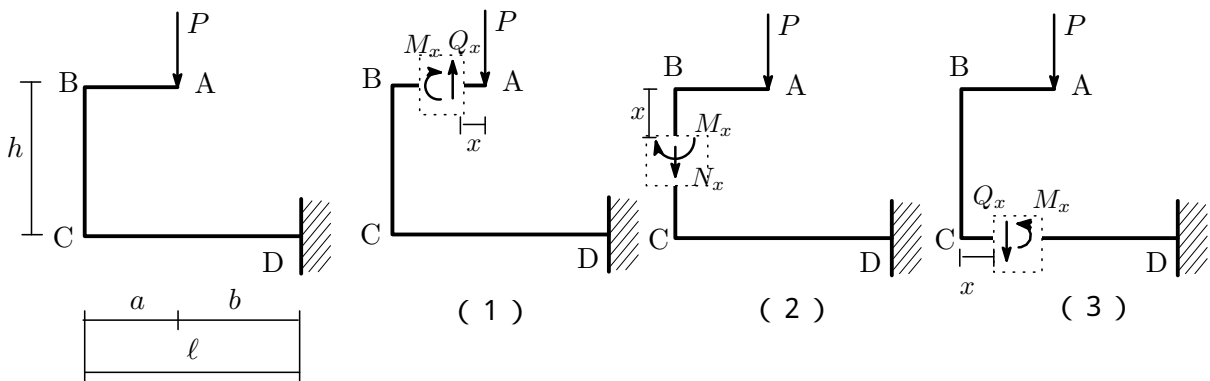


図 3.8: 片持ち梁系ラーメン

(1) 自由端側に水平荷重はないので軸方向力は  $N_x = 0$ 。

$$\sum Y = -P + Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = P$$

$$\sum M = x \times P + M_x = 0 \quad \therefore M_x = -Px \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = 0 \\ M_B = -Pa \end{array} \right.$$

(2) 自由端側に水平荷重はないのでせん断力は  $Q_x = 0$ 。

$$\sum Y = -P - N_x = 0 \quad \therefore N_x = -P$$

$$\sum M = a \times P + M_x = 0 \quad \therefore M_x = -Pa$$

(3) 自由端側に水平荷重はないので軸方向力は  $N_x = 0$ 。

$$\sum Y = -P - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = -P$$

$$\sum M = (a - x) \times P - M_x = 0 \quad \therefore M_x = P(a - x) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_C = Pa \\ M_D = P(a - \ell) = -Pb \end{array} \right.$$

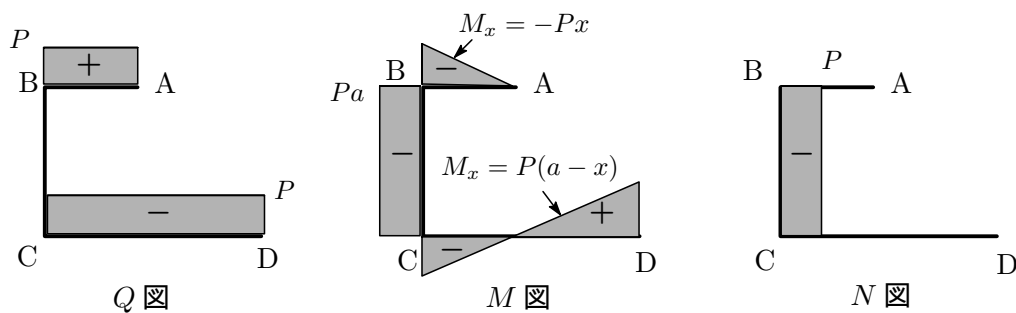
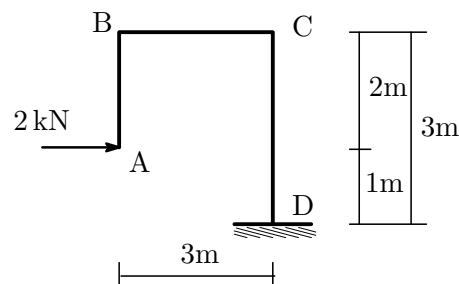


図 3.9: 片持ち梁ラーメンの  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  図 (水平荷重)

- K それじゃ次の片持ちばり系ラーメンの断面力を計算してごらん。

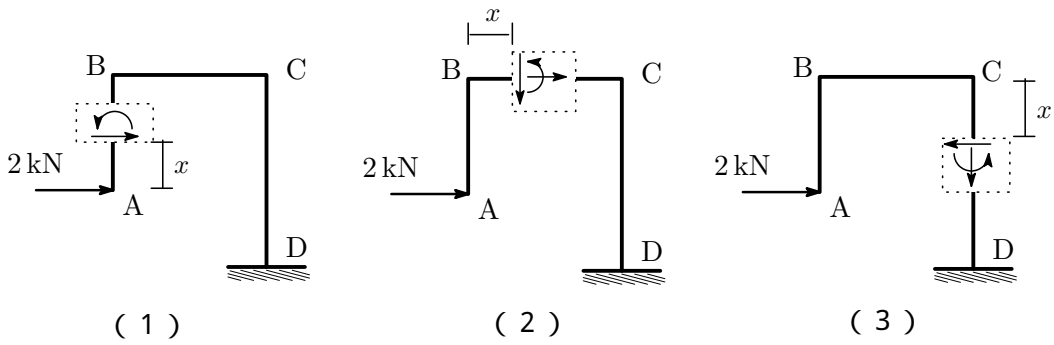


- コニー：わかったわ。自由端側から計算するんだわね。A点, B点, C点を起点として断面力を求める位置を  $x$  とする。

(1) 鉛直力はないので  $N_x = 0$ 。

$$\sum X = 2 + Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = -2$$

$$\sum M = -x \times 2 - M_x = 0 \quad \therefore M_x = -2x \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = 0 \\ M_B = -4 \end{array} \right.$$

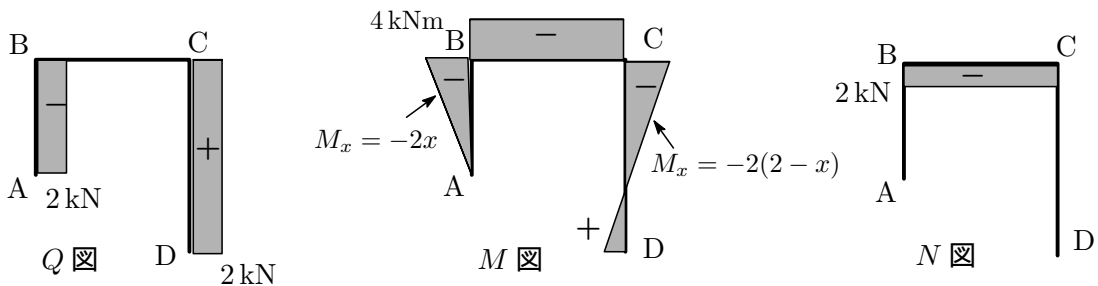


(2) 鉛直力はないので  $Q_x = 0$ 。

$$\begin{aligned} \sum X &= 2 + N_x = 0 & \therefore N_x &= -2 \\ \sum M &= -2 \times 2 - M_x = 0 & \therefore M_x &= -4 \end{aligned}$$

(3) 鉛直力はないので  $N_x = 0$ 。

$$\begin{aligned} \sum X &= 2 - Q_x = 0 & \therefore Q_x &= 2 \\ \sum M &= -(2-x) \times 2 - M_x = 0 & \therefore M_x &= -2(2-x) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_C = -4 \\ M_D = 2 \end{array} \right.$$



C - 4 . ヒンジ系

- K 氏：図 3.10 のスリーヒンジラーメンの反力と断面力を求めていこう。支点 A, F はピン支点なので水平と鉛直の 2 つの反力を生じ、反力の未知数は合計 4 個となる。

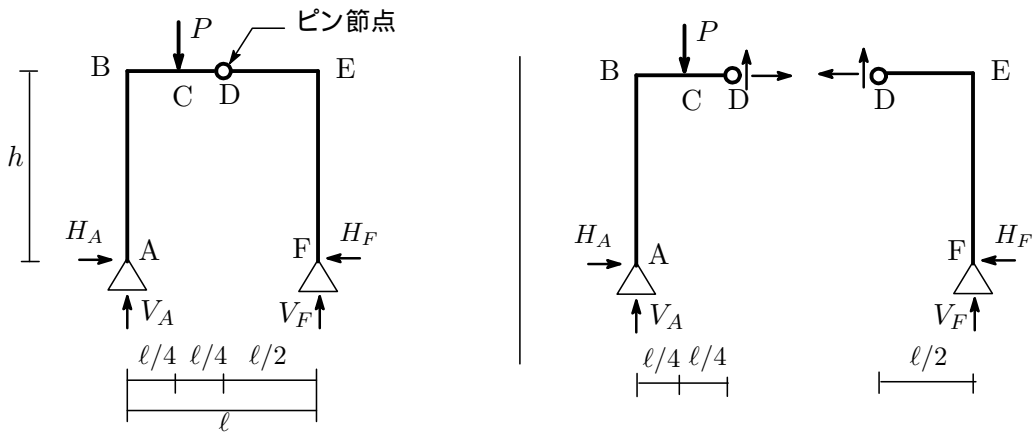


図 3.10: 3 ヒンジラーメン

ところで、ピン節点の位置での曲げモーメントはゼロ ( $M_D = 0$ ) となるので、ピンより左または右のつり合いの式を考えれば、合計 4 個の連立方程式となる。具体的にやってみよう。

反力：力のつり合いの式より

$$\begin{cases} \sum X = H_A - H_F = 0 & \therefore H_A = H_F \\ \sum Y = V_A + V_F - P = 0 & \therefore V_A + V_F = P \\ \sum M_A = \ell/4 \times P - \ell \times V_F = 0 & \therefore V_F = P/4, V_A = 3P/4 \end{cases}$$

未知数が 4 個で方程式が 3 個なので水平反力  $H_A, H_B$  が未定のまま。そこで  $D$  点での曲げモーメントが 0 という条件を使う。ピン節点  $D$  で分割して左側の  $D$  点回りのモーメントのつり合いを考える (もちろん右側で考えてもいっように構わない)。

$$\sum M_D = \ell/2 \times V_A - h \times H_A - \ell/4 \times P = 0 \quad \therefore H_A = \ell P/8h$$

ということですべての反力が求められる。

$$V_A = 3P/4, \quad V_F = P/4, \quad H_A = P\ell/8h, \quad H_F = P\ell/8h$$

断面力：何度もやってきたように、断面力は求める位置で仮想切断して力のつり合いから求めればいいんだね。コニーやってみるかい。

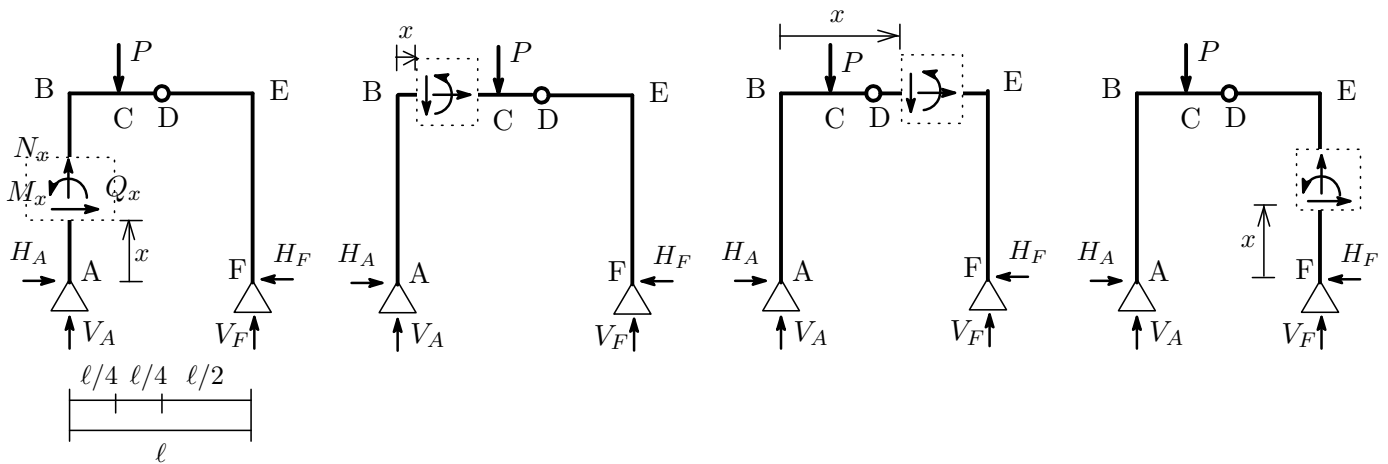


図 3.11: 3 ヒンジラーメンの断面力を求める

• コニー：了解。

$$\text{AB 間} \begin{cases} \sum X = H_A + Q_x = 0 & \therefore Q_x = -H_A = -\frac{P\ell}{8h} \\ \sum Y = V_A + N_x = 0 & \therefore N_x = -V_A = -\frac{3P}{4} \\ \sum M_x = -x \times H_A - M_x = 0 & \therefore M_x = -H_A x = -\frac{P\ell}{8h}x, M_B = -\frac{P\ell}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \text{BC間} & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum X = H_A + N_x = 0 \quad \therefore N_x = -H_A = -\frac{P\ell}{8h} \\
 \sum Y = V_A - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = V_A = \frac{3P}{4} \\
 \sum M_x = -h \times H_A + x \times V_A - M_x = 0 \\
 \quad \therefore M_x = -H_A h + V_A x = -\frac{P\ell}{8} + \frac{3P}{4}x, M_C = \frac{P\ell}{16} \\
 \quad x = \ell/6 \text{ で } M_x = 0 \text{ (反曲点) となる。}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{DE間} & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum X = H_A + N_x = 0 \quad \therefore N_x = -H_A = -\frac{P\ell}{8h} \\
 \sum Y = V_A - P - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = V_A - P = -\frac{P}{4} \\
 \sum M_x = -h \times H_A + x \times V_A - (x - \ell/4) \times P - M_x = 0 \\
 \quad \therefore M_x = -H_A h + V_A x = \frac{P\ell}{8} - \frac{P}{4}x, M_D = 0, M_E = -\frac{P\ell}{8}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{FE間} & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum X = Q_x - H_F = 0 \quad \therefore Q_x = H_F = \frac{P\ell}{8h} \\
 \sum Y = N_x + V_F = 0 \quad \therefore N_x = -V_F = -\frac{P}{4} \\
 \sum M_x = x \times H_F - M_x = 0 \\
 \quad \therefore M_x = H_F x = \frac{P\ell}{8h}x, M_E = \frac{P\ell}{8}, M_F = 0
 \end{array} \right.
 \end{cases}$$

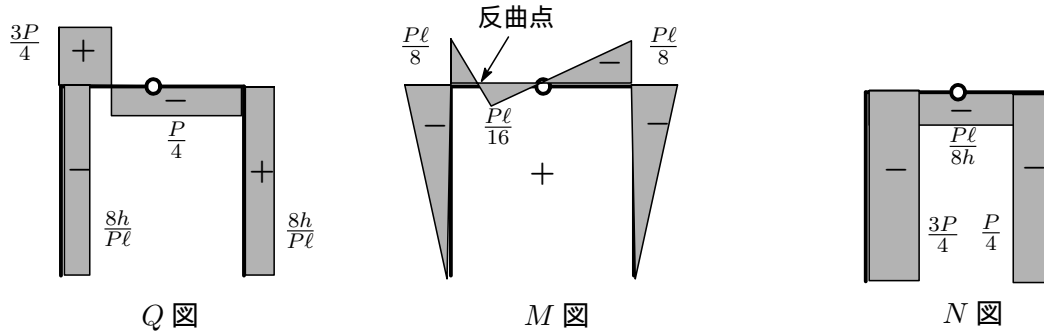


図 3.12: 3 ヒンジラーメン  $Q, MN$  図

- K 氏：OK。M 図で曲げモーメントが 0 になる点があるだろう。これを反曲点と呼んでいる。さて、第 3 話はここらあたりで終わろう。第 4 話では静定トラスをザット見ていくことにする。お楽しみに。
- コニー：お疲れ様でした。第 4 話が楽しみね。それじゃまた～。

## D. 静定トラス

## トラス構造とは

- K氏：トラス構造というのは部材が三角形を単位とした骨組みで、部材と部材の節点（接合部）がすべてピン接合になっている。外力は節点のみに加わり、部材には軸方向力のみが働くという特長がある。つまり、せん断力と曲げモーメントは発生しないということだね。

- 1) ピン接合節点では曲げモーメントはゼロ
- 2) 部材の圧縮力と引張力で外力（荷重）を支えている
- 3) 各接点に集まる力がつり合っている
- 4) 通常トラスに下向き外力がかかると、上弦材は圧縮力、下弦材は引張力になる

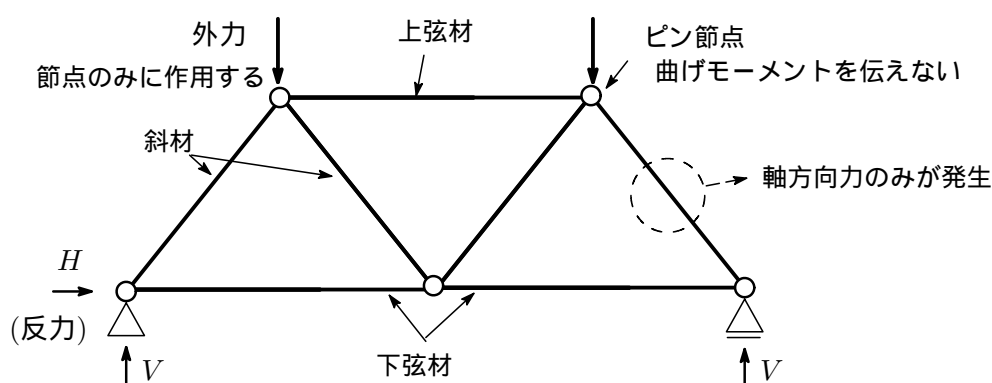


図 4.1: トラス構造

トラス構造には三角形の骨組みの構成方法によっていろいろな種類があり、代表的なものを下に示しておく。

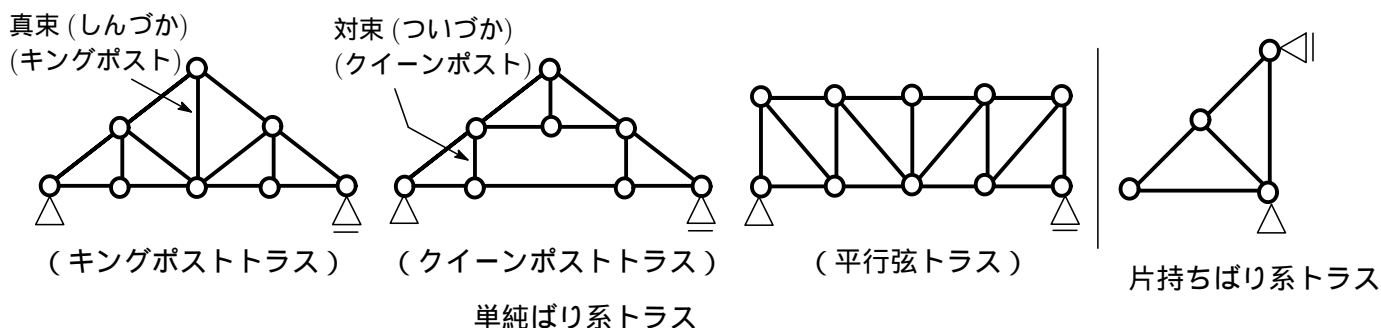


図 4.2: トラス構造の種類

- コニー：軸方向力は部材の断面に働く内力ね。内力は相対する断面に働く作用反作用の力なので、外力の働く方向と軸方向力の働く方向については注意が必要ね。
- K氏：その通りだ。軸方向力は第1話で説明したように部材が引っ張られる場合が「正」、反対に圧縮される場合が「負」と決めたね。部材に引張りまたは圧縮の外力を加えた場合、内力がど

のように働くかは図 4.3 に示す通りだ。軸方向力が圧縮力となる場合は、部材内部から節点の方向に向かう方向が軸方向力の正の方向となる、一方、引張力となる場合は、節点から部材内部に向かう方向が正の方向となる。最初は混乱するかもしれないがそのうちに慣れてくると思う。

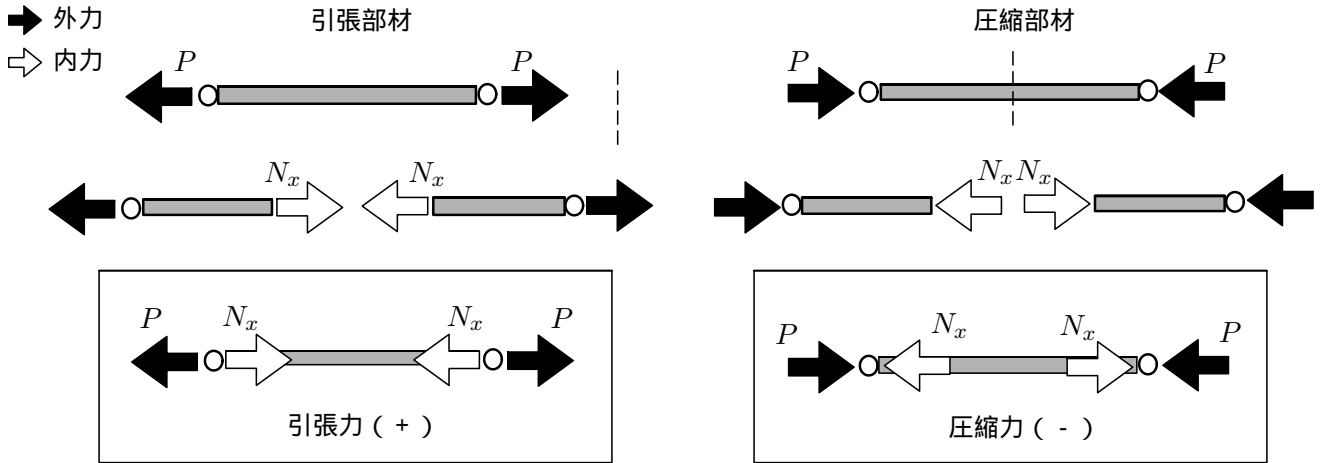


図 4.3: 軸方向力の正・負

さて、それでは具体的な計算に取りかかていこう。

- コニー：よろしく。

静定トラスの断面力を求める

- K 氏：静定トラスの断面力を求める主な方法には「節点法」と「切断法」がある。
  - ・節点法：各節点ごとに、その点に作用する力のつり合い条件式を立て軸応力を求めていく方法。全体の複数部材の断面力を求める場合によく使われる。
  - ・切断法：単純ばりの場合と同様に、求める点でトラスを切断し片側で計算する方法。ある特定の部材に働く軸応力を求める場合によく使われる。

まず、節点法からみていこう。

D - 1. 節点法

- K 氏：次の単純なトラスを取り上げる。

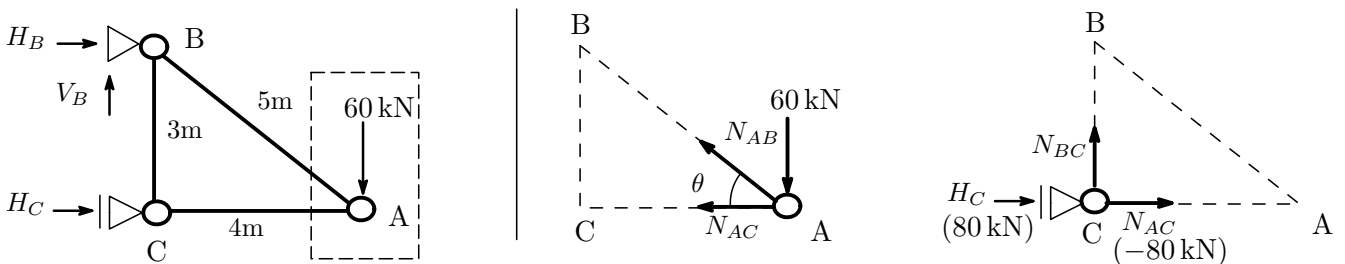


図 4.4: 3 部材で構成されたトラス



反力：まず反力を求めよう。力のつり合いから

$$\begin{aligned}\sum X &= H_B + H_C = 0 & \therefore H_B &= -H_C \\ \sum Y &= V_B - 60 = 0 & \therefore V_B &= 60 \\ \sum M &= 4 \times 60 - 3 \times H_C = 0 & \therefore H_C &= 80\end{aligned}$$

反力  $H_B$  は  $H_C$  と大きさが同じで向きは反対であることが分かる。

軸方向力：節点 A からの軸方向力を節点からでる方向に描き  $N_{AB}$ ,  $N_{AC}$  とする。節点 A での力のつり合いの式から

$$\begin{aligned}\sum X &= H_B + H_C = -N_{AC} - N_{AB} \cos \theta = 0 & \therefore N_{AC} &= -(4/5)N_{AB} \\ \sum Y &= N_{AB} \sin \theta - 60 = 0 & \therefore N_{AB} &= 100, \quad N_{AC} = -80\end{aligned}$$

$N_{AB}$  の符号は正なので部材 AB は引張材，一方， $N_{AC}$  の符号はマイナスなので部材 AC は圧縮材となる。次に節点 C について考える。節点 C には反力  $H_C = 80 \text{ kN}$  と軸方向力  $N_{BC}$ ,  $N_{AC}$  が掛かっている。これらの力をすべて書き込むが，数値が分かっているものは数値で書く。力のつり合いの式より

$$\sum X = H_C + N_{AC} = 80 - 80 = 0, \quad \sum Y = N_{BC} = 0$$

となるので，部材 BC の軸方向力  $N_{BC}$  は 0 となる。

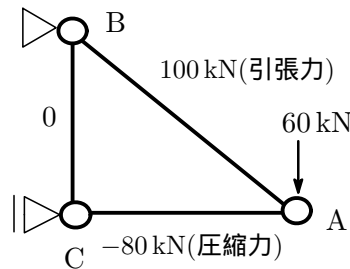


図 4.5: 節点法で求めた 3 部材の軸方向力

- コニー：なるほど。たしかに A 点に荷重がかかれば部材 AB には引っ張られるし，部材 AC は圧縮されることは経験的にもわかるわね。ところで，トラス構造では「各節点に集まる力はつり合っている」ことだったわね。節点 A のまわりの力のベクトルを向きに注意して書くと図 4.6 のようになるわ。

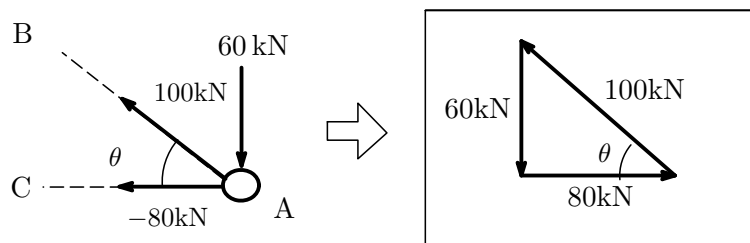


図 4.6: 示力図

- K氏：そうだね，節点にかかる力が釣り合うとき力の矢印は一周する。力のベクトルの始点と終点をつなぎ合わせた図を示力図（force diagram）というけど，示力図が閉じるというのが力のつり合いの一つの条件となるんだね。この性質を利用して軸方向力を求めることもできるんだ。この方法は図解法と呼ばれる。一方，先ほど計算したやり方は数式解法と呼ばれるね。
- コニー：そうなんだ。図解法で適当な問題はない？
- K氏：それじゃ次のトラスの生じる軸方向力を図解法で求めていこう。

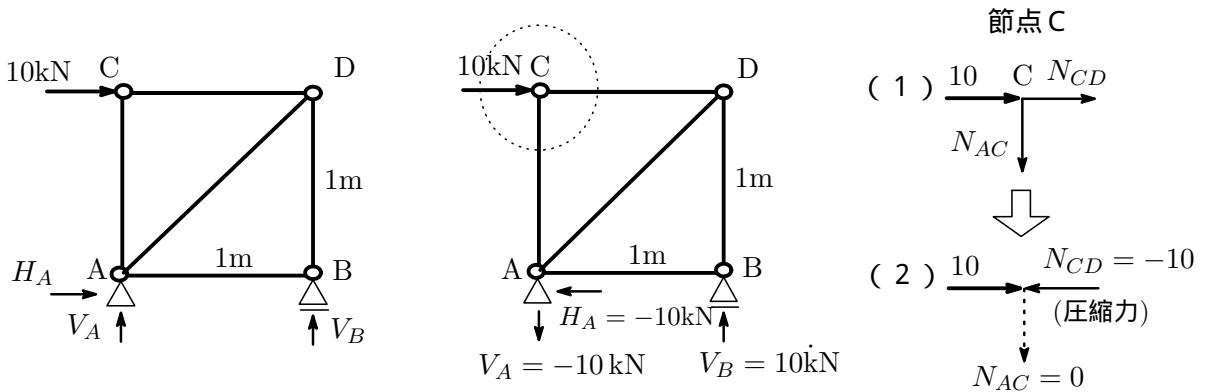


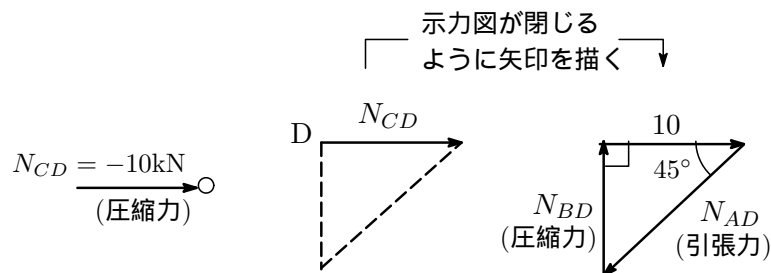
図 4.7: 図解法

まず反力を求めておく。反力の矢印を図 4.7 のように書き込んでおくと，力のつり合いより

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A + 10 = 0 && \therefore H_A = -10 \\ \sum Y &= V_A + V_B = 0 && \therefore V_A = -V_B \\ \sum M &= 1 \times 10 - 1 \times V_B = 0 && \therefore V_B = 10, \quad V_A = -10 \end{aligned}$$

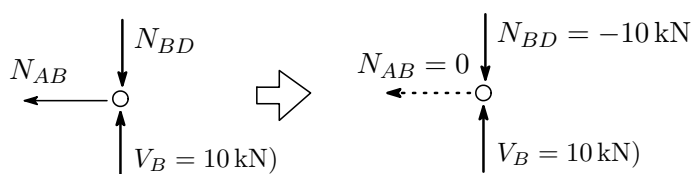
次に，未知の軸応力が 2 以下の節点を見つけてそこから解いていく。C 点から考える。引張力は節点から離れていく方向が正なので (1) に示すように力の矢印を設定すると，この示力図が閉じるには  $N_{CD} = -10$ ,  $N_{AC} = 0$  でなければならないね。部材 CD は圧縮材となる。

次に節点 D を考える。節点 D には  $N_{CD}$  の圧縮力と未知の  $N_{BD}$ ,  $N_{AD}$  の軸方向力が働いている。既知の  $N_{CD}$  をベースに矢印が 1 周するように  $N_{AD}$ ,  $N_{BD}$  の方向を定め，その長さを求める。そ



の結果，力の大きさは  $N_{BD} = 10 \text{ kN}$ ,  $N_{AD} = 10\sqrt{2} \text{ kN}$  と求まるが，矢印の向きから  $N_{BD}$  は圧縮力， $N_{AD}$  は引張力となることが分かる。それでは節点 B はどうなるかな？

- コニー：節点 B には反力  $V_B = 10 \text{ kN}$  と先ほど求めた  $N_{BD} = 10 \text{ kN}$  の圧縮力と未知の軸方向力  $N_{AB}$  が働いているわ。示力図を描くと



となって,  $N_{AB} = 0$  となるわね。部材 AB には軸方向力が働かないということね。

- K 氏：そうだね。このトラス構造の軸方向力をまとめると図 4.8 となる。

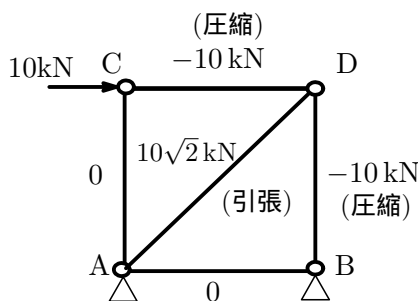
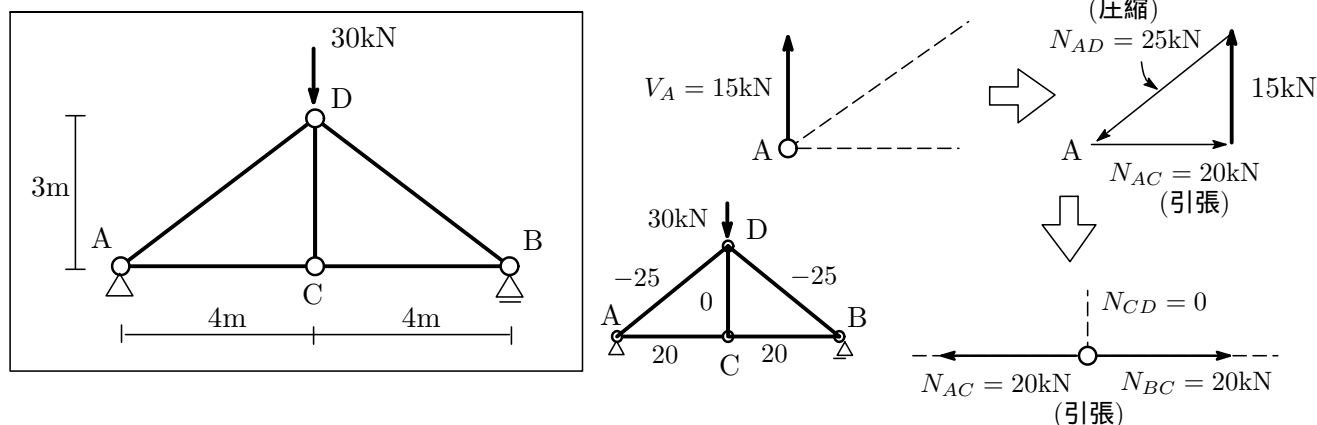


図 4.8: すべての軸方向力

それでは次のトラス部材に生じる軸方向力をすべて求めてごらん。



- コニー：了解。対称性から節点 A, B の反力は  $30 \div 2 = 15 \text{ kN}$  となるわね。節点 A に注目して閉じた示力図を描くと  $N_{AC} = 20 \text{ kN}$ ,  $N_{AD} = 25 \text{ kN}$  と得られる。 $N_{AC}$  の矢印の向きは節点 A から離れる方向なので引張力, 一方  $N_{AD}$  の矢印は節点に向かう方向なので圧縮力となる。 $N_{AC}$  が得られたので節点 C での閉じた示力図を描くと  $N_{CD} = 0$ ,  $N_{BC} = 20 \text{ kN}$  と得られ, これは引張力となる。
- K 氏：そうだね。ところで部材 CD の軸方向力が 0 というのは意外な感じがしないかい。ワタシャ最初は面食らったね。節点 D にかかる荷重は部材 AD と BD に分散されるというか, そのようなイメージだね。D が回転自由なピン節点でなかったらこうはいかない。接合がピン節点からなるトラス構造の特徴なんだね。

ところでトラスで軸方向力が 0 となる部材をゼロ部材とかゼロメンバーと呼んでいる。ゼロ部材は節点での力のつり合いには関係しないから, ゼロ部材を除く部材で力のつり合いがとれていることになる。

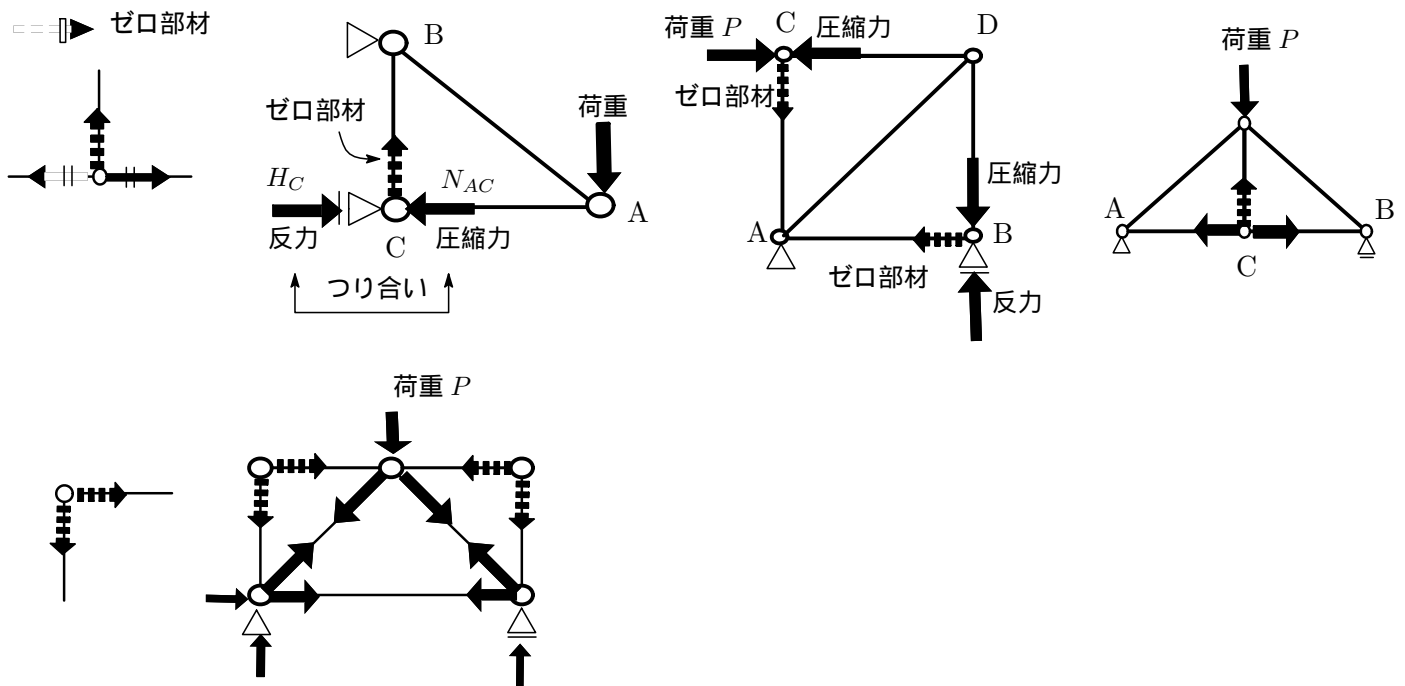


図 4.9: ゼロ部材

## D - 2. 切断法

- K 氏：次に切断法の説明だ。切断法は次の 3 つのステップを踏む。
  - 1) 軸方向力を求めようとする部材のある箇所で切断する。ただし、切断する部材の数は 3 つ以下とする。
  - 2) 切断した部材の軸方向力  $N_1, N_2, N_3$  を設定する。
  - 3) 力のつり合いの式を立て、これを解いて軸方向力を求める。
- コニー：ステップ 1. の切断する部材の数が 3 つ以下というのは、部材の軸方向力がすべて未知の場合ね。軸方向力が分かっている部材を含めれば切断する部材が 4 つでもいいわけね。
- K 氏：うん、要するに力のつり合いの式は 3 元連立方程式だから、未知数が 3 個以上では解けなくなるということだね。さて、次のトラス構造を考えよう。

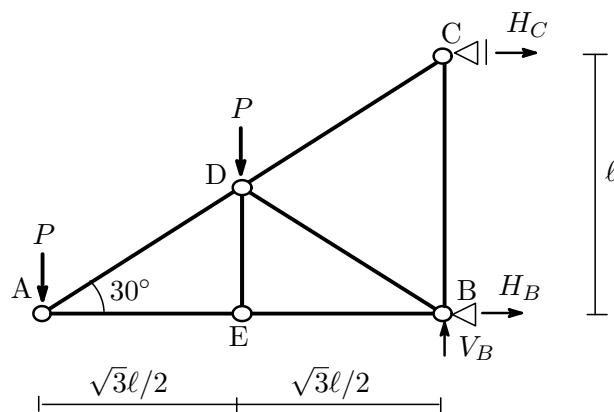


図 4.10: 静定トラス

まず。反力を求めておこう。力のつり合いより

$$\begin{aligned}\sum X &= H_B + H_C = 0 \quad \therefore H_B = -H_C \\ \sum Y &= V_B - 2P = 0 \quad \therefore V_B = 2P \\ \sum M_B &= -\sqrt{3}\ell \times P - \frac{\sqrt{3}\ell}{2} \times P + \ell \times H_C = 0 \quad \therefore H_C = \frac{3\sqrt{3}}{2}P, \quad H_B = -\frac{3\sqrt{3}}{2}P\end{aligned}$$

$M_B$  は B 点回りのモーメント。次に (1) の切断面について考える。部材 DE の軸方向力は 0 だね。各部材の断面に軸方向力  $N_1, N_2, N_3$  を図のように仮定する。力のつり合いより

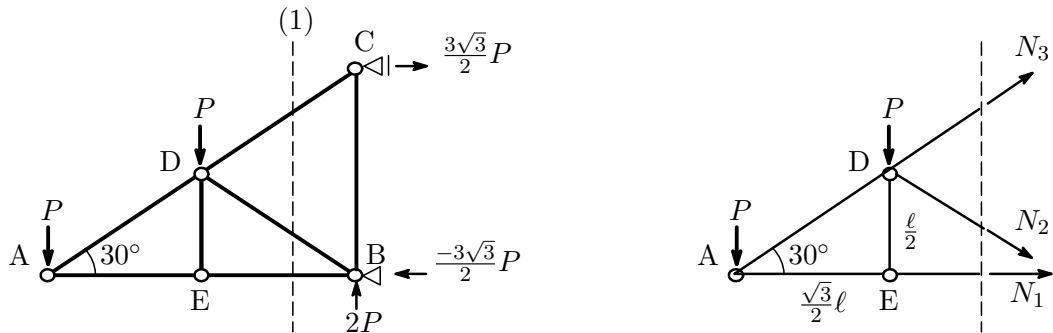


図 4.11: 切断法 ( 1 )

$$\begin{aligned}\sum X &= N_1 + N_2 \cos 30^\circ + N_3 \cos 30^\circ = N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_3 = 0 \\ \sum Y &= -N_2 \sin 30^\circ + N_3 \sin 30^\circ - 2P = -\frac{1}{2}N_2 + \frac{1}{2}N_3 - 2P = 0 \\ \sum M_D &= -\frac{\sqrt{3}\ell}{2} \times P - \frac{\ell}{2} \times N_1 = 0\end{aligned}$$

これから

$$N_1 = -\sqrt{3}P (\text{圧縮}), \quad N_2 = -P (\text{圧縮}), \quad N_3 = 3P (\text{引張}) \quad (4.1)$$

と求められる。同様にして (2) で切断すると

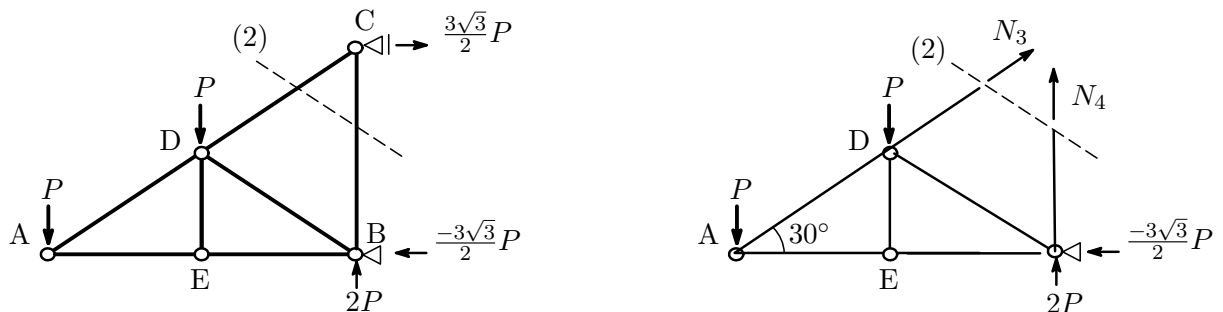


図 4.12: 切断法 ( 2 )

$$\sum Y = N_4 + N_3 \sin 30^\circ - 2P + 2P = N_4 + N_3 \sin 30^\circ = 0 \quad \therefore N_4 = -\frac{3}{2}P (\text{圧縮})$$

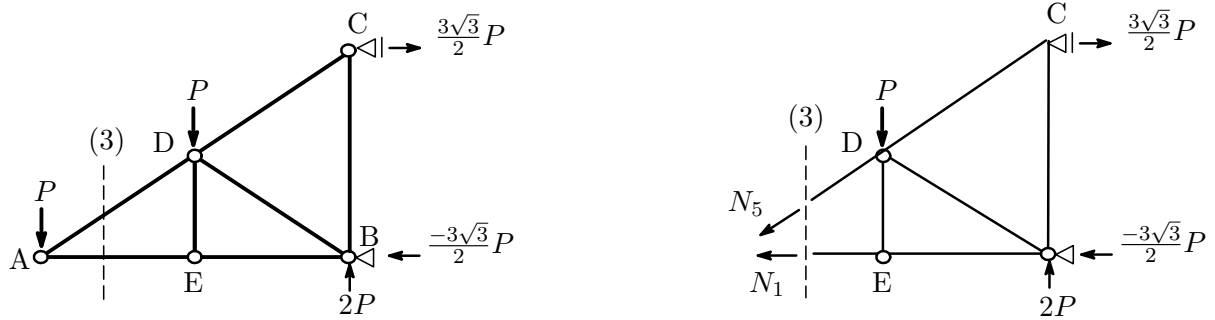


図 4.13: 切断法 ( 3 )

次に ( 3 ) で切断して

$$\sum X = -N_1 - N_5 \cos 30^\circ = \sqrt{3}P - \frac{\sqrt{3}}{2}N_5 = 0 \quad \therefore N_5 = 2P(\text{引張})$$

ということでこのトラス構造の軸方向力は次のようになる。

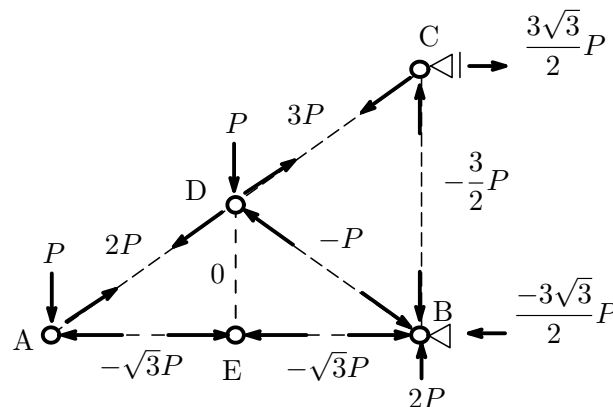


図 4.14: トラス構造の軸方向力

- コニー：トラス構造に組まれた各部材の圧縮あるいは引張の軸方向力を眺めていると力の伝わり方みたいなものが見えてきて面白いわね。たしかに A から E の各ピン節点では力のつり合いがとれているわね。
- K 氏：以上，第 1 話から第 4 話にかけて「平面構造物のつり合い」というテーマで梁やラーメン，トラス構造の反力や断面力の求め方を話してきた。第 5 話からは部材の断面に焦点を当てている話をしていこうと思う。まだそのシナリオは決まっていらないけど。決まり次第また連絡するから，楽しみに待っていてね。
- コニー：大変お疲れさまでした。面白かったわ。力のつり合いの式だけでこれだけのことが分かるという，目からウロコの思いで拝聴していたわ。第 5 話の連絡は気長に待つことにするわね。それじゃ今日はこの辺りで失礼します。
- K 氏：さようなら，気をつけて帰ってね。

- K氏：やぁ～，こんにちはコニー。秋もいよいよという感じだが，天高く馬肥ゆる秋ともいうように食欲も増進してくるね。
- コニー：こんにちは，Kさん。今年は秋刀魚が高そうね。炭火で焼いた秋刀魚にお醤油をかけると絶品だけどお口に入る機会が減るかもしれないわ。ところで今日は構造物の安定・不安定というお題でお話を聞けるということで，楽しみにしているの。
- K氏：あまり大した話はできないけど，第1話から第4話は梁やラーメン，トラスなどの反力や断面力の計算が中心だったね。断面力という割には具体的に広がりのある断面を考えない，いわば厚みのない理想化（単純化）した部材を考えていたわけだね。そこで一歩進めて具体的に断面を考えて断面力のことを詳しく議論していくのが次の話の流れと思うけど，ちょっと一服して，第1話で安定構造物は静定構造物（Statically determinate structure）と不静定構造物（Statically indeterminate structure）に分類されるといった話をしたよね，今日はそのあたりの話をしようと思うんだ。復習になるけど静定構造物は外力の作用によって生じる反力が3つの構造物，つまり3元連立方程式である力のつり合いの式

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_i = 0 \quad (5.1)$$

だけで反力が求められる構造物のことで，一方，不静定構造物は(5.1)の式だけでは解けない構造物のことだった。3つ以上の支点反力は同時に求めることができないからね。安定のために必要な数以上の余分な反力あるいは部材が存在している構造物だね。

- コニー：そうだったわね。ところで，安定，不安定という観点からいえば，安定構造物は外力の作用で移動も回転もしない構造物，不安定構造物は外力の作用で簡単に形を崩したり移動したりする構造物で，例えば不安定構造物としては次のようなものが考えられるわね。

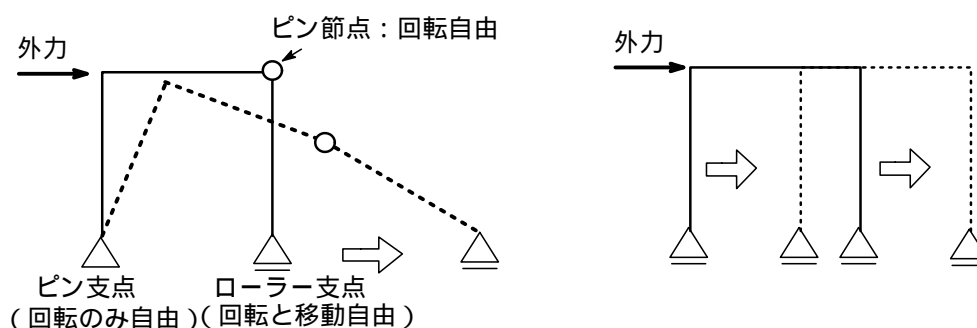


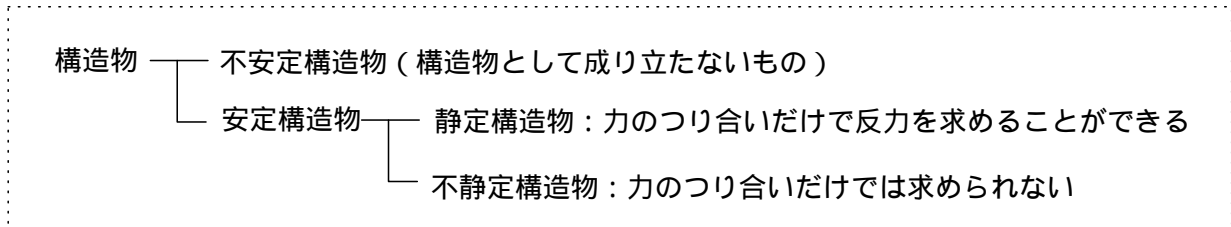
図 5.1: 不安定構造物

- K氏：そうだね。さて，構造物はいまコニーがあげた不安定構造物と安定構造物があるわけだけど，この種類を判別できる判別式というものがあるんだ。今日のお話はこの辺りのお話をしていこうと思う。
- コニー：不安定構造物か安定構造物か，安定構造物でも静定構造物か不静定構造物かが判別式でわかるというわけね。

- K氏：そうなんだ。それではさっそく話を進めていこう。

## 構造物の不静定次数

- K氏：構造物は安定・不安定，静定・不静定に分類できる。



### 判別式

構造物に次の判別式 を適用すればどのような構造物かを判定できる。 $m$  を不静定次数という。

$$\text{判別式} \quad m = s + n + r - 2k \quad \left\{ \begin{array}{ll} s: \text{部材数} & r: \text{剛接合部材数} \\ n: \text{反力の数} & k: \text{節点数} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$m = 0$ : 安定・静定       $m > 0$ : 安定・不静定       $m < 0$ : 不安定

- コニー：静定構造物はつり合い条件だけで反力や断面力を求めることができたけど，不静定構造物はつり合い条件だけでは求まることができない，つまり静定でないということから不静定構造物というワケね。ところで不静定次数を一言でいえばどういうこと。
- K氏：そうだね，不静定構造物の反力や断面力を求める際，力のつり合いの式だけでは間に合わずいくつかの条件式が必要になる。その条件の数を不静定次数というね。 $m = 1$  は1次不静定， $m = 2$  は2次不静定，等々という。
- コニー：具体的にどういうモノが考えられるかしら。
- K氏：例えば図 5.2 の単純ばりのケースを考えてみよう。力のつり合いの式は水平，鉛直，回転の3つだね。(1)の単純ばりの場合，反力は4つ存在するし(2)の場合は5つ存在するね。それぞれのケースの反力を求めるには(1)は条件式が1つ不足し(2)は2つ不足することになる。不足する条件式を考えなければ問題は解けないだろう。

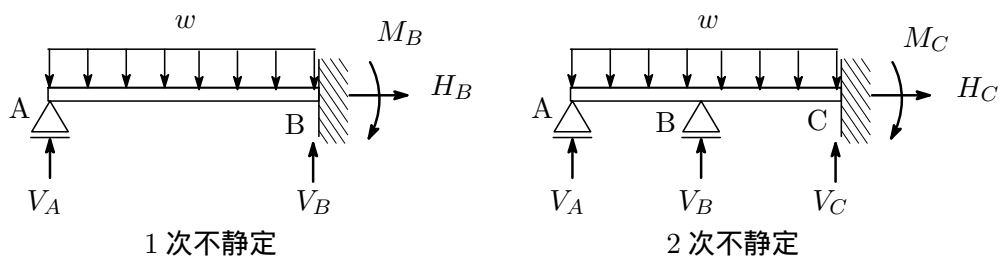


図 5.2: 不静定次数

- コニー：なるほど，よくわかったわ。



- K氏：ついでに，上の判別式での数の数え方についてちょっとした注意が必要なのでそれを補足しておこう。部材数( $s$ )はそれぞれの支点および節点(自由端を含む)間ならびに支点と節点との間の部材を1部材と数える。剛接合部材数( $r$ )は1つの部材に注目してその部材に剛接合でつながっている他の部材の数，あるいは剛接合された部材の数から1を差し引いた数でもよい。節点数 $k$ は自由端を含む節点の数。これらは口で説明するより図を見た方が早いと思うので図5.3を参照して頂戴。

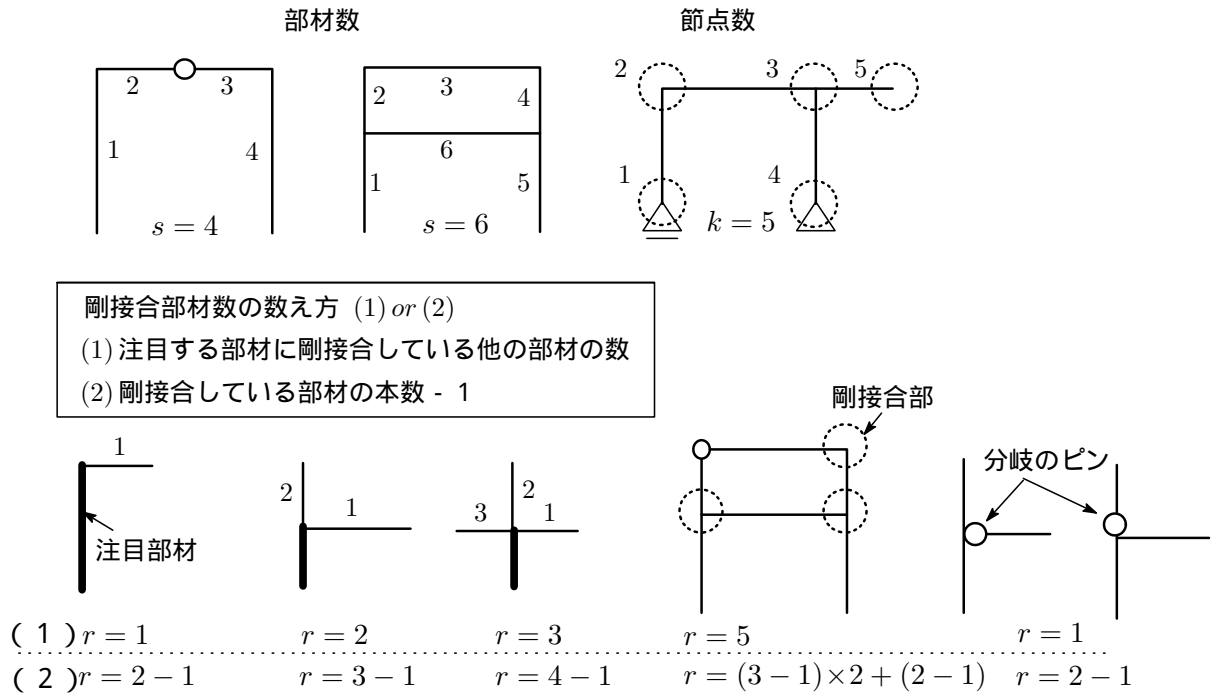


図 5.3: 部材数，節点数，剛接合部材数の数え方

それではさっそく判別式 を使って (1) から (10) までの構造物を判定してみよう。コニーやってみるか。

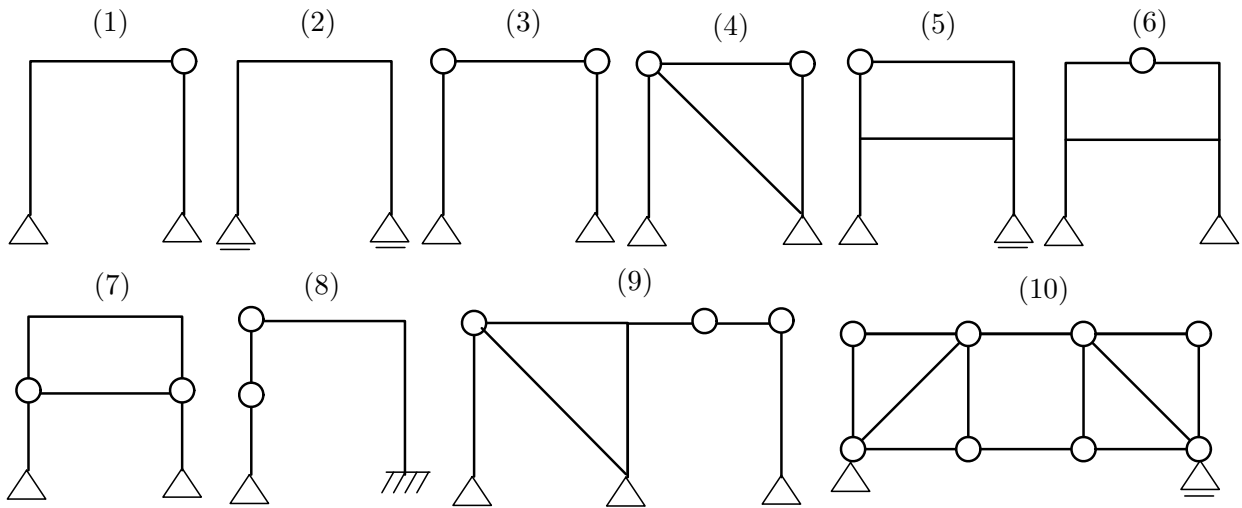


図 5.4: 構造物の判定

- コーナー：了解。

(1)  $s = 3, n = 2 + 1 = 3, r = 1, k = 4$  で  $m = -1$  となるので不安定構造物ね。

(2)  $s = 3, n = 1 + 1 = 2, r = 2, k = 4$  で  $m = -1$  となり不安定構造物。

(3)  $s = 3, n = 2 \times 2 = 4, r = 0, k = 4$  で  $m = -1$  となり不安定構造物。

(4) (1) に筋交いが一本入っているわね。 $s = 4, n = 2 \times 2 = 4, r = 0, k = 4$  で  $m = 0$  となり安定構造物となる。

(5) 剛接合部材数に注意が必要だわね。この場合,  $r = 5$  となり,  $s = 6, n = 2 + 1 = 3, k = 6$  で  $m = 2$  となるので 2 次不静定構造物。

(6)  $s = 7, n = 2 \times 2 = 4, r = 6, k = 7$  で  $m = 3$  となり 3 次不静定構造物。

(7)  $s = 6, n = 2 \times 2 = 4, r = 2, k = 6$  で  $m = 0$  となり安定構造物。

(8)  $s = 4, n = 2 + 3 = 5, r = 1, k = 5$  で  $m = 0$  となり安定構造物。

(9)  $s = 7, n = 2 \times 2 + 1 = 5, r = 2, k = 7$  で  $m = 0$  となり安定構造物。

(10)  $s = 12, n = 2 + 1 = 3, r = 0, k = 8$  で  $m = -1$  となり不安定構造物。

- K 氏：OK。判別式 もあるんだ。判別式 も も同じことをいっているが、視点が異なっているだけだね。それでは判別式 を紹介しておこう。

判別式

$$\text{判別式} \quad m = n + j - 3s \quad \left\{ \begin{array}{l} n: \text{支点反力の数 (拘束度)} \\ j: \text{接点拘束度} \\ s: \text{部材数} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$m = 0: \text{安定・静定} \quad m > 0: \text{安定・不静定} \quad m < 0: \text{不安定}$$

部材 1 本に対して力のつり合い条件は 3 個なので部材  $s$  本では  $3s$  個となるね。 $n + j$  はこれから求めようとする未知数の数。したがって、その差は力のつり合い条件だけでは解けない未知数の数になるので、不静定次数  $m$  となるだろう。表 1 に支点、接合点における拘束度の数を示しておく。なお、 $S$  は節点に集まる部材の本数を表す。

表 1: 支点・接合点における拘束度

支点	拘束度 ( $n$ )	接合点	拘束度 ( $j$ )
固定支点	$n = 3$	剛接合	$j = 3(S - 1)$
ピン支点	$n = 2$	ピン接合	$j = 2(S - 1)$
ローラー支点	$n = 1$		

$n$  や  $j$  の数の数え方は図 5.5 を参照してほしい。

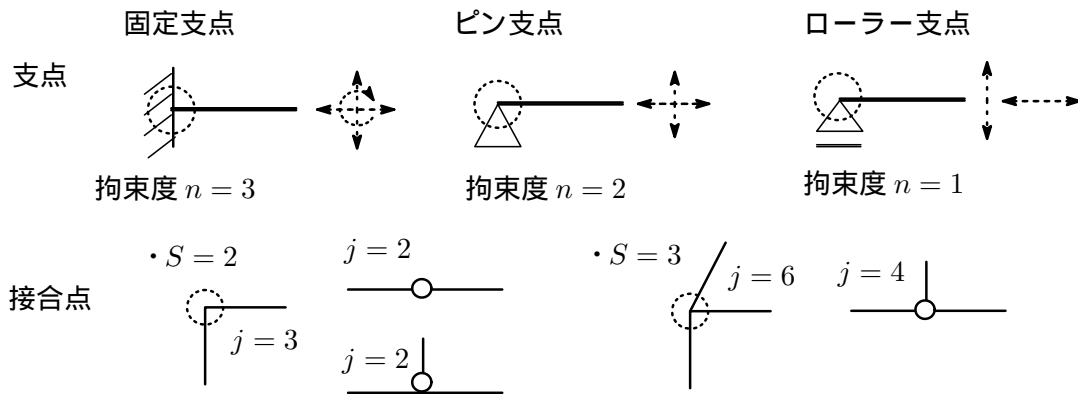


図 5.5: 支点・節点の種類と拘束度

ということで判別式 を使った判定をしてみよう。先ほどの (3) と (6) の構造物はどうなるかな？

- コニー：きゅうに振ってくるのネ！ いいわ，まず (3) ね。2 つの支点はピン節点なので拘束度は  $n = 2 \times 2 = 4$ 。次に節点拘束度はピン節点ばかりなので  $j = 2(2 - 1) \times 2 = 4$ 。部材の数は  $s = 3$  となるので  $m = n + j - 3s = 1$  となって 1 次の不静定構造物。次に (6) のケースは  $n = 4$ ,  $j = 6 + 3 + 2 + 3 + 6 = 20$ ,  $s = 7$  より  $m = 3$  となって 3 次の不静定構造物となるわね。
- K 氏：判別式 を適用した例として次の構造物をあげておく。

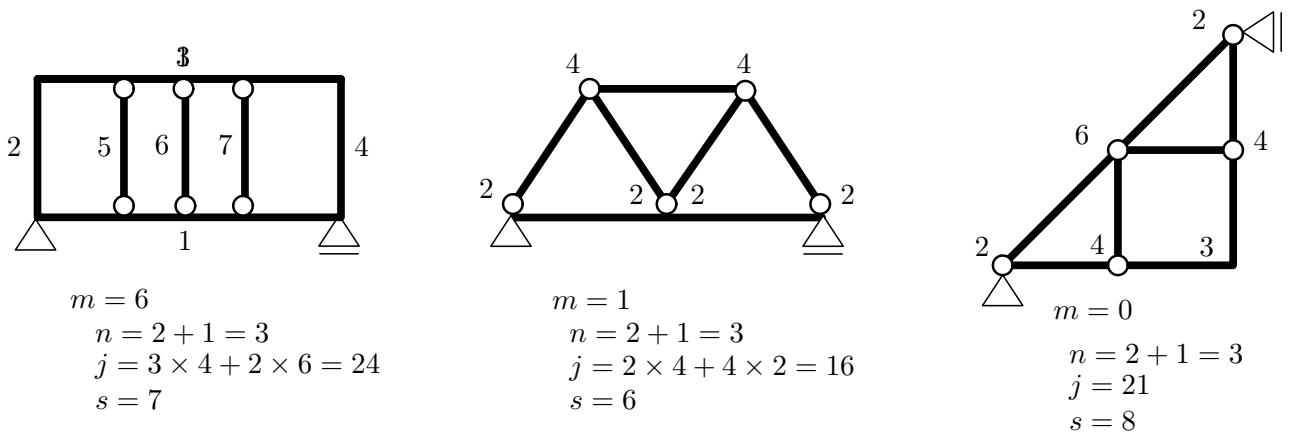


図 5.6: 判別式

それでは次の構造物を判別式 を使って判定すればどうなるかな，コニーやってみよう。

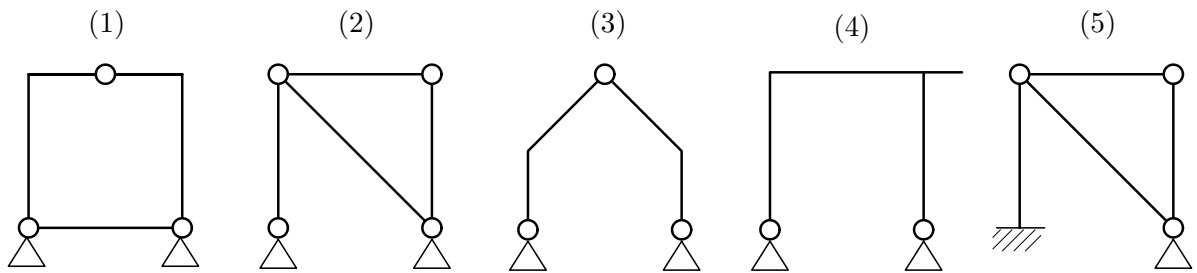


図 5.7: 判別式 の問題

- コニー：了解。結果をまとめると次の表のようになるわ。

	$n$	$j$	$s$	$m$	判定
(1)	3	12	5	0	安定
(2)	3	8	4	-1	不安定
(3)	3	8	4	-1	不安定
(4)	3	9	4	0	安定
(5)	4	6	3	1	1次不静定

- K氏：OK。それではここらあたりで第5話を終わろう。お疲れ様でした。
- コニー：ありがとうございました。第6話の話題が楽しみだわ。それではまたお邪魔します～。

2017.09.28

- K氏：いよいよ第6話に入ったね。これから少し数学的な取扱いがでてくるけど大したことないので気楽にお付き合いしていただければいいと思う。
- コニー：わかりました。ところで第6話の話題はなに？
- K氏：うん、第1話から第4話では構造物に荷重が作用したとき、部材に生じる断面力（せん断力、曲げモーメント、軸方向力）などの求め方について説明してきた。現実の構造物は荷重の作用によってあたりまえだけ変形するよね。変形がきつくなると崩壊につながるので、荷重の作用による変形量をあらかじめ計算で求めておくことは安全上必須なことだ。第6話ではこの計算のやり方の基本を説明しようと思う。
- コニー：そうなんだ。できるだけわかりやすくお願いします。

### はりの変形

- K氏：簡単な例として片持ちばりの変形をとりあげる。片持ちばりのA点に荷重 $P$ がかかるとA点は押し下げられて斜めに傾くね。この押し下げられた量（変形量）をA点のたわみ $\delta$ といい、傾いた角度（変形角）をA点のたわみ角 $\theta$ という。別にA点のはりの端とは限らない。はりの任意の位置C点ではC点でのたわみとたわみ角がある。たわみ $\delta$ とたわみ角 $\theta$ を計算するのがここでの仕事となる。

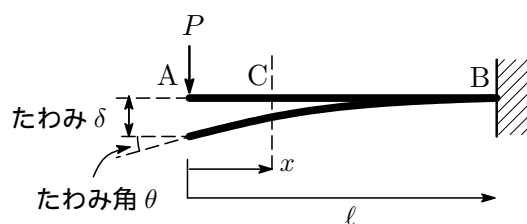


図 6.1: 片持ち梁のたわみとたわみ角

- コニー：。。。どうするのかしら？
- K氏：うん、やり方は大体次の3つの方法がある
  - (1) 仮想仕事法による計算法
  - (2) たわみ曲線の微分方程式による解法
  - (3) モールの定理により計算法

まず(1)の方法で計算していくことにしよう。仮想仕事という解析力学を思い出すかもしれないが、ここでは構造力学風(?)にアレンジした計算法を紹介する。

- コニー：(2)や(3)の方法はおあずけになるのかしら？
- K氏：そうだね、体力と気力が残っていたら取り組むこととしよう。さて、ということで、はりの内部の微小変形を考えよう。真っ直ぐなはりが下側に凸に曲がり微小要素ABCDがA'B'C'D'に

変形したとしよう。図 6.2 を参照してほしい。はりの上側の軸方向の長さは元の長さより短くなり、下側は元の長さより長くなるね。ということは、軸方向の長さが変形前後で変わらない面が存在することになるだろう。この面のことを中立面と呼んでいる。図では  $M'N'$  面が中立面だ。そして中立面と横断面の交線を中立軸という。さて、変形前の  $\overline{PQ} = dx$  が変形後  $\widehat{P'Q'} = \Delta x + dx$  となったとしよう。ひずみを  $\varepsilon$  とすると

$$\widehat{P'Q'} = \left(1 + \frac{\Delta x}{dx}\right) dx = (1 + \varepsilon) dx \quad (6.1)$$

と表せる。中立軸の曲率半径を  $\rho$  とすると

$$\widehat{M'N'} = dx = \rho d\theta \quad \therefore d\theta = \frac{1}{\rho} dx = \kappa dx \quad (\kappa \equiv 1/\rho: \text{曲率}) \quad (6.2)$$

$$\widehat{P'Q'} = (\rho + y) d\theta \quad (y: \text{中立軸からの距離})$$

となるので

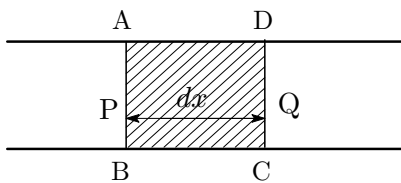
$$\frac{\widehat{P'Q'}}{\widehat{M'N'}} = \frac{\rho + y}{\rho} = 1 + \varepsilon$$

これから

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (6.3)$$

を得る。

変形前



変形後

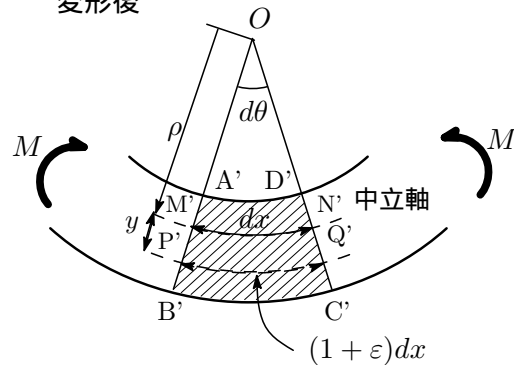


図 6.2: 梁の曲げ

垂直応力  $\sigma$  と微小ひずみ  $\varepsilon$  は図 6.3 に示すようにフックの法則で結ばれていて  $\sigma = E\varepsilon$  が成り立ち

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} \quad (6.4)$$

を得る。比例常数  $E$  はヤング率とか弾性係数と呼ばれる。 $\sigma$  は中立軸から  $y$  の距離に生じる応力だね。この垂直応力  $\sigma$  を曲げ応力といい、断面  $A'B'$  あるいは  $C'D'$  に生じる。

また曲率と曲げモーメント  $M$  の間には

$$M = \frac{EI}{\rho} = \kappa EI \quad (6.5)$$

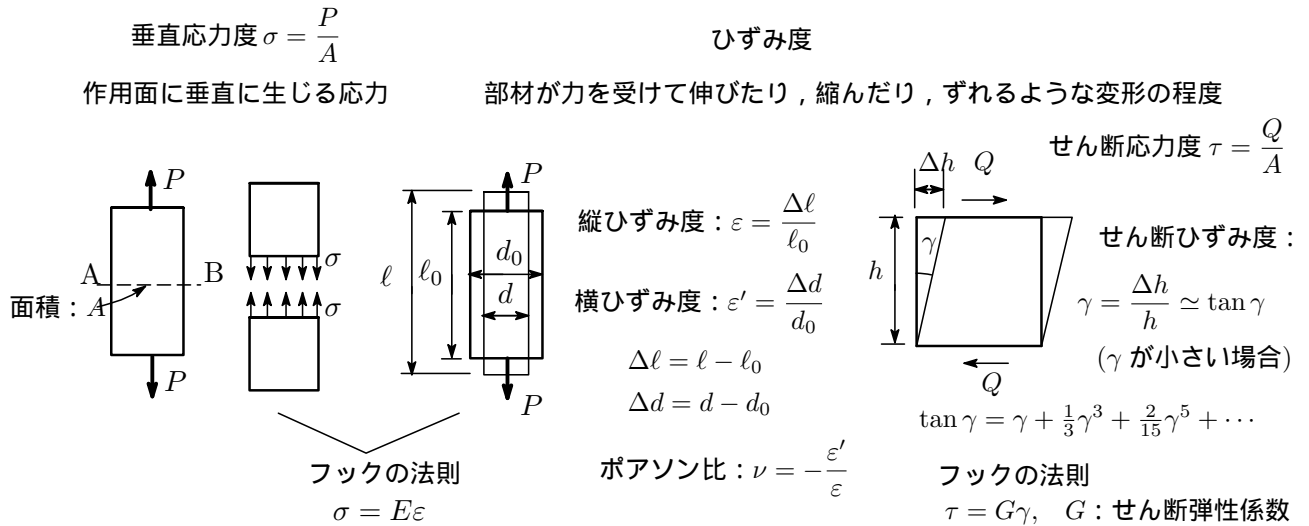


図 6.3: 応力と歪み

の関係式が成り立つことを補足しておく。ここで  $I$  は断面の 2 次モーメント、 $EI$  は曲げ変形のしにくさを示す指標で曲げ剛性と呼ばれる量だ。

断面 2 次モーメントや曲げ剛性については第 7 話あたりで詳しく説明する予定だが、ついでなので簡単に触れておこう。断面 2 次モーメントは断面の形状により決まるが、中立軸を中央にもつ幅  $b$ 、高さ  $h$  の長方形断面の断面 2 次モーメントは

$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{6.6}$$

で与えられる。

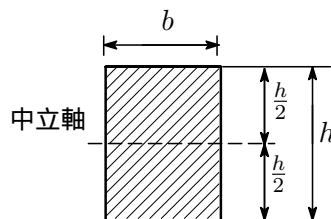


図 6.4: 断面 2 次モーメント

また、(6.5) より  $\rho = \frac{EI}{M}$  なので、 $EI$  の小さいはりは曲率半径  $\rho$  が小さく、曲りが強くなることを意味するだろう。このことから曲げ剛性  $EI$  は曲りに対する抵抗を表すと考えられるわけだね。

さて、ひずみの話はまたあとで取りあげるとして仮想仕事法を使ってたわみ  $\delta$  とたわみ角  $\theta$  を求める計算法を紹介していこう。

仮想仕事法による計算法

- K 氏：モーメントのなす仕事を  $W$  とすると

$$W = M \times \theta \tag{6.7}$$

で表される。 $M$  はモーメントの大きさを  $\theta$  は回転角だ。

- コニー：ちょっと待って。仕事の次元は  $[W] = [N][L] = ML^2T^{-2}$  でモーメントの次元  $[M] = [N][L] = ML^2T^{-2}$  と一緒じゃない。角度  $\theta$  の次元はどうなっているのかしら？
- K 氏：ご指摘のことはごもっともだ。ただ、角度  $\theta$  は無次元量なんだね。例えばラジアンは「弧と半径の長さの比」としての無次元量となる。つまり同じ次元を持つ量同士の比は無次元量になるわけだ。無次元量の特長としてどんな単位で物理量を測っても値が変わらないということだね。
- コニー：そうなんだ。仕事は「力 × 移動量」で定義されるのでモーメントによる仕事は (6.7) で定義されるのね。
- K 氏：それでははりの内部に作用している曲げモーメント  $M$  のなす仕事を考えよう。
- コニー：内力は曲げモーメント以外にせん断力  $Q$  や軸方向力  $N$  があるけど、それらの仕事はどうなるの？
- K 氏：部材の内力がなす仕事量としてはコニーが指摘したように次の 3 つがある。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{せん断力による仕事量} & : \int Q\gamma dx \\ \text{曲げモーメントによる仕事量} & : \int M d\theta \\ \text{軸方向力による仕事量} & : \int N\varepsilon dx \end{array} \right. \quad (6.8)$$

$\gamma$  や  $\varepsilon$  は先ほど説明したひずみ度で無次元の物理量だ。積分は部材の全長にわたって行う。いずれも仕事の次元となっているだろう。ところで、梁やラーメン構造では曲げモーメント  $M$  以外の他の内力  $Q$ ,  $N$  による仕事量は無視できるほど小さいんだね。つまりせん断変形や軸方向の変形は曲げ変形に較べてはるかに小さいので、それらをカットして曲げモーメントによる仕事だけを考えるというわけなんだ。このあたりの詳しい話は後日触れる予定なので楽しみに<sup>1</sup>。

- コニー：そうなんだ。分かったわ。
- K 氏：曲げモーメント  $M$  による仕事は、はり内部の任意の点  $x$  における曲げモーメントの値とその点  $x$  における変形量  $d\theta$  の積  $Md\theta$  をはり全長にわたって足し合わすことで求められるので

$$W = \int M d\theta = \int M\kappa dx \quad (6.9)$$

と表すことができる。ここから仮想仕事法に入るのだが、仮想仕事の原理を説明しておこう。ある構造物に仮想の変位を与えるとその結果仮想のひずみが生じ、内力が仮想の仕事をするにたろう。「構造物がつり合いの状態にあるとき、外力が任意の仮想変位に対してなす仮想仕事は内力の仮想仕事に等しい」というのがその原理だ。要するに外力の仕事量と内力の仕事量は等しいということだね。

- コニー：う～ん。。。
- K 氏：考えすぎでもつかみにくいと思うので具体的に見ていこう。図 6.1 をご覧。外力  $P$  がなした仕事は  $W_{ex} = P\delta$  だね。一方内力のなした仕事は  $W_{in} = \int M\kappa dx$ 。はりはこの状態がつり合っ

<sup>1</sup>第 9 話を参照。



ているから両者の仕事量は等しい。

$$P\delta = \int M\kappa dx$$

ここで、外力  $P$  を仮想荷重  $\bar{P}$  として考えると、仮想内力は仮想荷重  $\bar{P}$  によって生じる仮想曲げモーメント  $\bar{M}$  となるので

$$\bar{P}\delta = \int \bar{M}\kappa dx$$

と表すことができる。仮想荷重  $\bar{P}$  は任意なので  $\bar{P} = 1$  の単位荷重とすれば

$$\delta = \int \bar{M}\kappa dx \quad (6.10)$$

となる。ここまで仮想の話ばかりだったが、現実との関係性は曲率  $\kappa$  が担ってくれる。 $\kappa$  は実荷重  $P$  に対する真の曲げモーメント  $M$  と (6.5) の関係で結ばれていた。 $\kappa = \frac{M}{EI}$  を (6.10) に代入すると

$$\delta = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx \quad (6.11)$$

を得る。この式がたわみ  $\delta$  を求める基本式だね。

- コニー：それではたわみ角  $\theta$  のほうはどうなるのかしら？
- K氏：うん、仮想単位荷重を考えたように仮想単位モーメント荷重を考えるんだ。モーメント荷重というのはモーメント（回転力）として作用する荷重のことだね。仮想曲げモーメントと仮想モーメント荷重を区別する意味から仮想単位モーメント荷重を  $\bar{M}_\theta$  と表すことにする。(6.9) より

$$\int \bar{M}_\theta d\theta = \int \bar{M}_\theta \kappa dx$$

ここで  $\bar{M}_\theta = 1$  とするとたわみ角を表す式

$$\theta = \int \bar{M}_\theta \frac{M}{EI} dx \quad (6.12)$$

が得られる。なお、説明の都合上仮想モーメント荷重に添え字  $\theta$  を付けたが、もうとくに混乱はないと思うのでこの添え字は外すことにする。このように、仮想単位荷重や仮想単位モーメント荷重を考える仮想仕事法は単位荷重法とも呼ばれる。計算の手順は次の通りだ。

- 1) 実荷重を作用させた場合の曲げモーメント  $M(x)$  の式を求め  $M$  図を描く。
- 2) たわみ  $\delta$  を求めたい点に仮想単位荷重  $\bar{P} = 1$  を作用させ、その結果生じる仮想曲げモーメント  $\bar{M}(x)$  を求め  $\bar{M}$  図を描く。
- 3) たわみ角  $\theta$  を求めたい点に仮想単位モーメント荷重  $\bar{M} = 1$  を作用させ、その結果生じる仮想曲げモーメント  $\bar{M}(x)$  を求め  $\bar{M}$  図を描く。
- 4) (6.11), (6.12) に  $M(x)$ ,  $\bar{M}(x)$  を代入して積分計算を行い、たわみ  $\delta$  とたわみ角  $\theta$  を求める。

さて、それでは具体的な計算に入ろう。

#### A . 片持ちばり集中荷重

・ A - 1. たわみ  $\delta_A$  の計算

実荷重  $P$  をかけた片持ちばりの  $M$  図と単位仮想荷重  $\bar{P} = 1$  をかけた  $\bar{M}$  は図 6.5 に示す通りだね。A 点のたわみ  $\delta_A$  は (6.11) より

$$\delta_A = \int_0^\ell \bar{M}(x) \frac{M(x)}{EI} dx = \int_0^\ell -x \frac{-Px}{EI} dx = \int_0^\ell \frac{Px^2}{EI} dx = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (6.13)$$

と求められる。

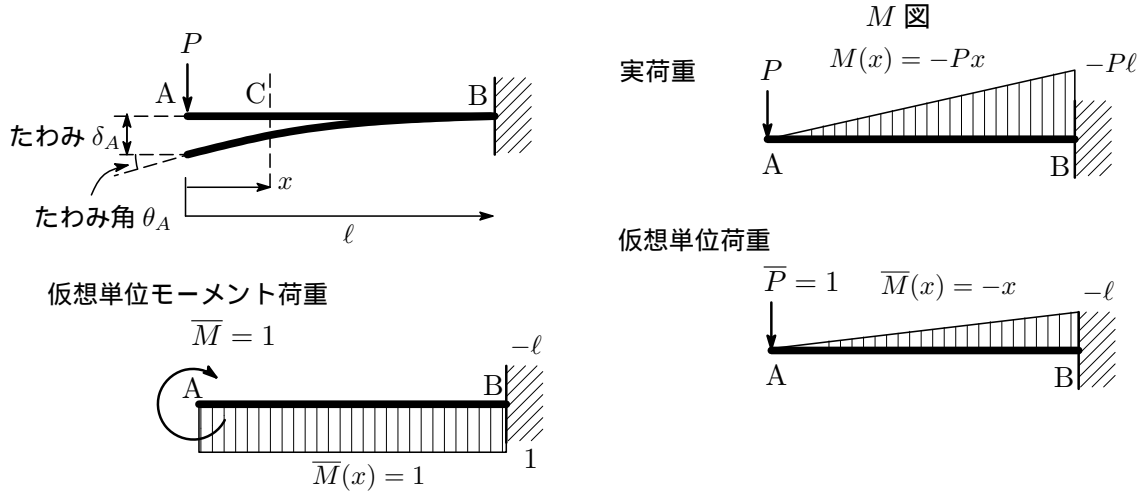


図 6.5: 仮想仕事法

- コニー：断面 2 次モーメントが (6.6) で与えられるはりとするとき、幅  $b$  が 2 倍になるとたわみ  $\delta$  は元の 1/2 倍、高さ  $h$  が 2 倍になれば元の 1/8 のたわみとなるわけね。
- K 氏：そういうことだね。それでは次にたわみ角の計算に入ろう。

・ A - 2. たわみ角  $\theta_A$  の計算

モーメント荷重はすべての点に等しいモーメントの影響を与えるので、仮想単位モーメント荷重の場合の仮想モーメントは  $\bar{M}(x) = 1$  となる。(6.12) よりたわみ角  $\theta_A$  は

$$\theta_A = \int_0^\ell \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \int_0^\ell \frac{-Px}{EI} dx = -\frac{P\ell^2}{2EI} \quad (6.14)$$

と求められる。ここでマイナス符号は仮定した仮想単位モーメント荷重の方向に対して逆方向にたわみ角が生じることを意味している。

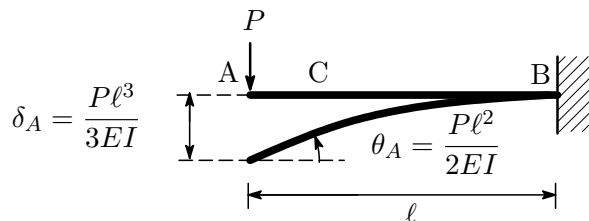


図 6.6: たわみとたわみ角

B . 単純ばり分布荷重

・ B - 1. たわみ  $\delta_C$  の計算

等分布荷重  $w$  が作用した単純ばりの中央 C 点におけるたわみ  $\delta_C$  と A 点におけるたわみ角  $\theta_A$  を求めよう。その前に下準備をしておかなければならない。等分布荷重が作用する単純

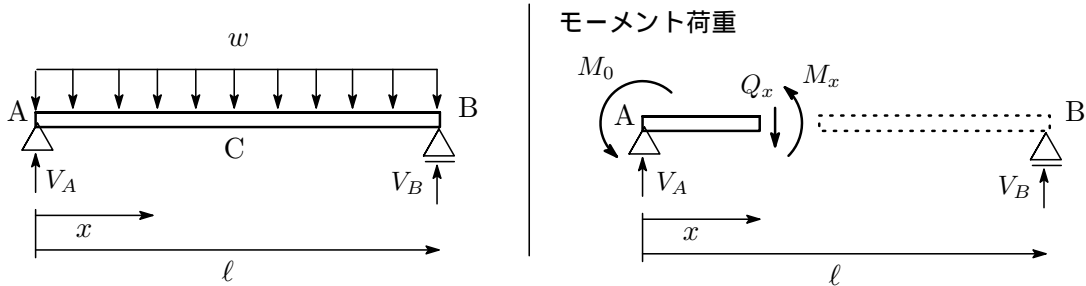


図 6.7: 単純梁・等分布荷重のたわみ

ばりの曲げモーメント  $M(x)$  の表式は第 2 話で説明したけど、おぼえているかい？

- コニー：え～っと，ちょっと復習をかねてやってみるわね。支点 A, B の反力をそれぞれ  $V_A, V_B$  とし，水平方向の荷重はないので力のつり合いから

$$\sum Y = V_A + V_B - w\ell = 0, \quad \sum M = \frac{\ell}{2} \times V_A - \frac{\ell}{2} \times V_B = 0 \quad \therefore V_A = V_B = \frac{w\ell}{2}$$

次に A 端から距離  $x$  の位置で仮想切断し，その位置でのせん断力を  $Q_x$ ，曲げモーメントを  $M_x$  として力のつり合いの式を立てると

$$\sum Y = V_B - wx - Q_x = 0, \quad \sum M = x \times V_A - (x/2) \times wx - M_x = 0$$

これから

$$Q_x = \frac{w\ell}{2} - wx, \quad M_x = \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \quad (6.15)$$

と求まるわ。曲げモーメントは  $x$  の 2 次曲線で表される。

- K 氏：そうだね。また，単純ばりの中央 C 点に集中荷重  $P$  を作用させた場合，曲げモーメントは

$$M_x = \frac{P}{2}x \quad (0 \leq x \leq \ell/2) \quad (6.16)$$

で与えられたね。

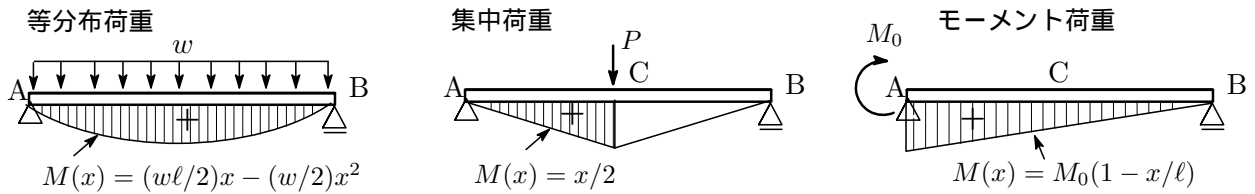
次に支点 A に曲げモーメント荷重  $M_0$  が作用した場合のケースを考えよう。力のつり合いより

$$\begin{aligned} \sum Y = V_A + V_B = 0 & \quad \therefore V_A = -V_B \\ \sum M = M_0 - \ell \times V_B = 0 & \quad \therefore V_A = -\frac{M_0}{\ell}, \quad V_B = \frac{M_0}{\ell} \end{aligned}$$

距離  $x$  で仮想切断してその位置での断面力を  $Q_x, M_x$  とすると

$$\begin{aligned} \sum Y = V_A - Q_x = 0 & \quad \therefore Q_x = V_A = -\frac{M_0}{\ell} \\ \sum M = M_0 + x \times V_A - M_x = 0 & \quad \therefore M_x = M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

以上で下準備が完了だ。

図 6.8:  $M$  図

それではたわみ  $\delta_C$  の計算に入ろう。C 点に仮想単位荷重  $\bar{P} = 1$  を与えた場合、仮想曲げモーメント  $\bar{M}(x)$  は (6.16) より

$$\bar{M}(x) = \frac{x}{2} \quad (0 \leq x \leq \ell/2) \quad (6.18)$$

となる。C 点のたわみ  $\delta_C$  は (6.11) に (6.15) と (6.18) を入れて

$$\begin{aligned} \delta_C &= 2 \int_0^{\ell/2} \bar{M}(x) \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\ell/2} \frac{x}{2} \left( \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx \\ &= \frac{5w\ell^4}{384EI} \end{aligned} \quad (6.19)$$

と求められる。ここで留意してほしいのは積分区間を  $0 \leq x \leq \ell$  とすべきだが、(6.18) で  $x$  の定義域を  $0 \leq x \leq \ell/2$  としているだろう。ところがうまい具合に  $M$  図は  $x = \ell/2$  の C 点で対称形になっているので半分の積分区間での積分値を 2 倍しておけばよいという点だ。

#### ・ B - 2. たわみ角 $\theta_A$ の計算

A 点に仮想単位モーメント荷重  $\bar{M} = 1$  を作用させた場合、仮想曲げモーメント  $\bar{M}(x)$  は (6.17) より

$$\bar{M}(x) = 1 - \frac{x}{\ell} \quad (6.20)$$

これを (6.12) に入れて

$$\begin{aligned} \theta_A &= \int_0^{\ell} \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) \left( \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx \\ &= \frac{w\ell^3}{24EI} \end{aligned} \quad (6.21)$$

と求められる。

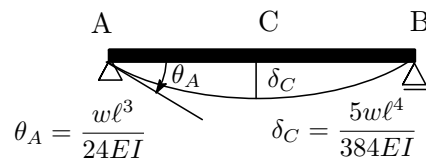


図 6.9: 単純ばりのたわみとたわみ角

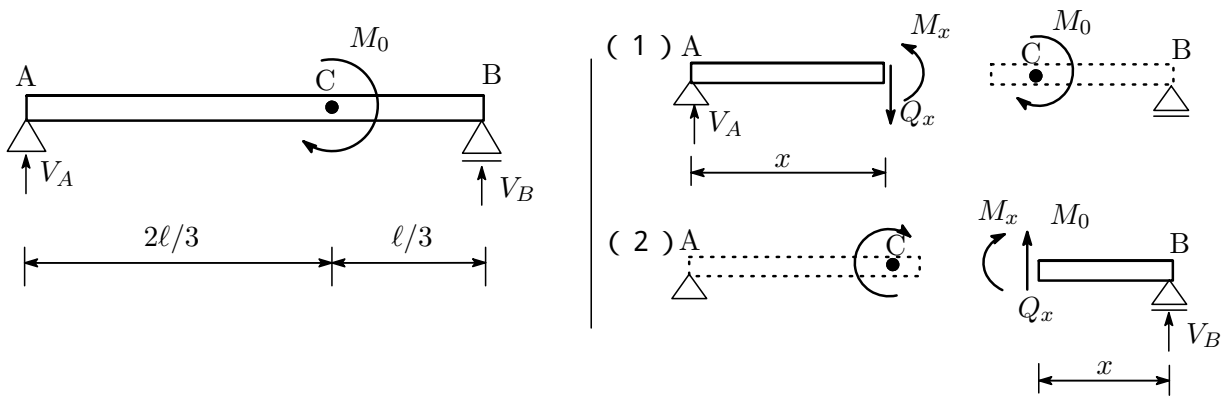


図 6.10: モーメント荷重

- K氏：単純ばりのC点に  $M_0$  のモーメント荷重が作用しているとき，C点のたわみとたわみ角を求めよという問題だが，コニーやってみるかい？
- コニー：そうね，挑戦してみるわ。教えていただいた「計算の手順」に従ってやってみるわ。
  - 1) まず実荷重を作用させた場合の  $M(x)$  を求める。水平力はないので，支点A, Bの反力を  $V_A, V_B$  として力のつり合いの式をたて反力を求めると

$$\sum Y = V_A + V_B = 0, \quad \sum M = M_0 - l \times V_B = 0 \quad \therefore V_A = -\frac{M_0}{l}, V_B = \frac{M_0}{l}$$

次に，支点Aから  $x$  ( $0 \leq x \leq 2l/3$ ) の距離で仮想切断し。その位置での断面力を  $Q_x, M_x$  として力のつり合いの式を立てると

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0, \quad \sum M = x \times V_A - M_x = 0 \quad \therefore Q_x = -\frac{M_0}{l}, M_x = -\frac{M_0}{l}x$$

また，支点Bから  $x$  ( $0 \leq x \leq l/3$ ) の距離で仮想切断しその位置での断面力を  $Q_x, M_x$  として力のつり合いの式を立てると

$$\sum Y = V_B + Q_x = 0, \quad \sum M = -x \times V_B + M_x = 0 \quad \therefore Q_x = -\frac{M_0}{l}, M_x = \frac{M_0}{l}x$$

と求まり， $M$  図は次の通りとなるわね。

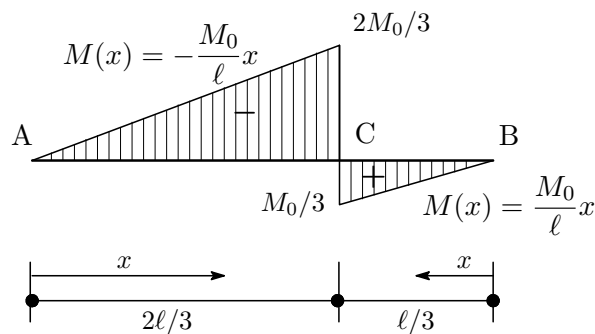


図 6.11: モーメント荷重のM図

- 2) 次に手順2。C点に仮想単位荷重  $\bar{P} = 1$  を作用させ仮想曲げモーメント  $\bar{M}(x)$  を求める。これはすでに第2話のB. 単純ばりのところでやった。

3) 手順3。C 点に仮想単位モーメント荷重  $\bar{M}_0 = 1$  を作用させ仮想曲げモーメント  $\bar{M}(x)$  を求める。ということで、手順2と3の結果は次のようになる。

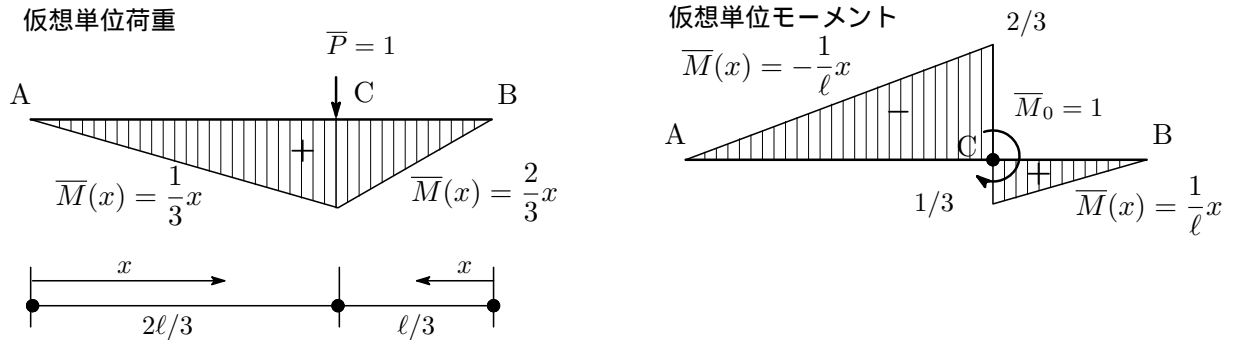


図 6.12: 仮想単位荷重と仮想単位モーメント荷重

4) 最後に  $\delta_C$  と  $\theta_C$  を計算すると

$$\delta_C = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{2\ell/3} \frac{1}{3}x \left( -\frac{M_0}{\ell}x \right) dx + \int_0^{\ell/3} \frac{1}{\ell}x \frac{M_0}{\ell}x dx \right\} = -\frac{2M_0\ell^2}{81EI}$$

$$\theta_C = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{2\ell/3} \left( -\frac{1}{\ell}x \right) \left( -\frac{M_0}{\ell}x \right) dx + \int_0^{\ell/3} \frac{1}{\ell}x \frac{M_0}{\ell}x dx \right\} = \frac{M_0\ell}{9EI}$$

- K 氏: OK。少し疲れてきたが、はり以外の適用例として第3話C - 2で紹介した単純ばり系ラーメン構造をとりあげて第6話を終わるとしよう。図 6.13 で C 点でのたわみ  $\delta_C$  と A 点のたわみ角  $\delta_A$  を求める。

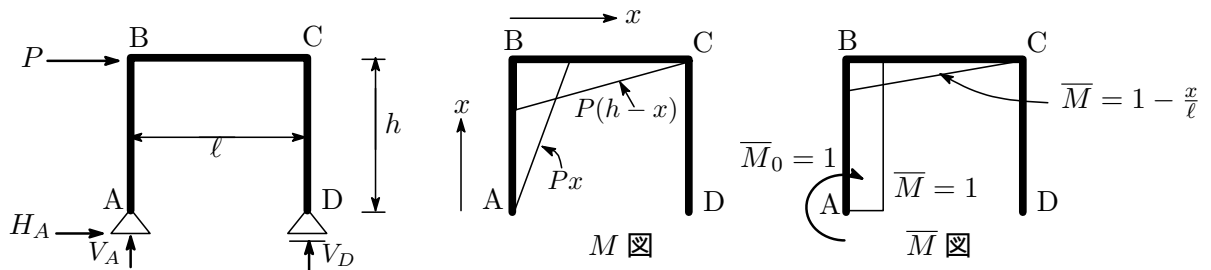


図 6.13: 単純ばり系ラーメン構造

M 図は第3話ですでに求めている。A 点に仮想単位モーメント荷重  $\bar{M}_0 = 1$  を作用させた場合、節点 B にそのまま伝搬するので、BC の仮想モーメント  $\bar{M}(x)$  は (6.17) より  $\bar{M}(x) = 1 - \frac{x}{\ell}$  とな

る。したがって

$$\begin{aligned}\delta_C &= \int \overline{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \int_0^h x \cdot Px dx + \int_0^\ell (h-x) \cdot P(h-x) dx \right) \\ &= \frac{P}{EI} \left( \int_0^h x^2 dx + \int_0^\ell (h-x)^2 dx \right) = \frac{h^3 + 3h^2\ell - 3h\ell^2 + \ell^3}{3EI} P \\ \theta_A &= \int \overline{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \int_0^h 1 \cdot Px dx + \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot P(h-x) dx \right) \\ &= \frac{3h^2 + 3h\ell - \ell^2}{6EI} P\end{aligned}$$

以上で仮想仕事法の要領は大体つかめたと思うので第6話はこれで終了しよう。第7話は「たわみ曲線の微分方程式による解法」の話を予定している。微分方程式といっても難しいものはでてこないのが気楽に聴けばいい。

- コニー：お疲れ様でした。第7話も面白そうね，どういのお話になるのか楽しみだわ。それではまた～。

2017.10.5

- K氏：やあ～，コニー。秋もいよいよこれからといった今日この頃だけど，元気そうだね。
- コニー：こんにちは，Kさん。おかげさまで食欲だけは旺盛よ。太らないように気をつけてはいるけどね。ところで第7話は微分方程式を解いてたわみを求めようというお話だったわね。
- K氏：そうなんだ。第6話では仮想仕事法を使ってたわみを求めたが，第7話では微分方程式を適切な境界条件のもとで解いてたわみ曲線を求めようという話なんだ。それでははじめよう。

## はりの変形

たわみ曲線の微分方程式による解法（弾性曲線法）

- K氏：曲率半径  $\rho$  の逆数  $1/\rho$  を曲率といった。平面関数  $y(x)$  の曲率は

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (7.1)$$

で定義される。詳しいことが知りたければHPの数学のコーナーの「曲線と曲面」のレポートなどを参照すればいいだろう。関数  $y(x)$  は撓んだはりの曲線を表している。いま，たわみが微小であるとすると  $y' \ll 1$  となるので，(7.1)の分母は  $(1 + y'^2)^{2/3} \doteq 1$  とおけば，(7.1)は

$$\frac{1}{\rho} \doteq \frac{d^2y}{dx^2}$$

となる。ところで曲率  $1/\rho$  と曲げモーメント  $M$  の関係式 (6.5) より  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$  だから

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (7.2)$$

となる。これがたわみ曲線を表す微分方程式となるのだが，曲げモーメント  $M$  の正負を定義していたので次のような事情から符号を調整する必要があるんだ。2次導関数  $y''(x)$  の正負は曲線の凹凸を表し，下に凸の曲線なら  $y''(x) > 0$ ，上に凸の曲線なら  $y''(x) < 0$  であった。ここで構造力学の一般のテキストと歩調を合わせるために  $y$  軸の正の方向を鉛直下方にとることにする。そうすると曲線の凹凸と曲げモーメントによるたわみの凹凸の関係は図 7.1 のようになるだろう。

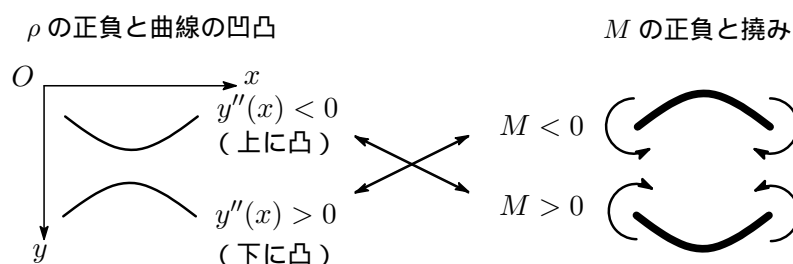


図 7.1: 曲率と曲げモーメントの符号



$EI > 0$  なので曲線の凹凸と曲げモーメントの凹凸を一致させるためには (7.2) にマイナス符号をつけた

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (7.3)$$

を採用しなければならないね。これがはりのたわみの微分方程式となる。たわみ角  $\theta$  はたわみ曲線  $y(x)$  の接線の傾きの角度なので

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (7.4)$$

で与えられる。なお, (7.3) の微分方程式は弾性曲線方程式とも呼ばれる。歴史的には 1700 年代にベルヌーイやオイラーが盛んに研究したらしいね。

- コニー：そうなんだ。ところで (7.3) の 2 階微分方程式を 1 回積分すればたわみ角が, 2 回積分すればたわみが求まるのね。

- K 氏：そうだね,  $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI}$  を積分してやると

$$\int d\theta = -\int \frac{M}{EI} dx \quad \rightarrow \quad \theta = -\int \frac{M}{EI} dx + C_1 \quad (7.5)$$

$$\int dy = \int \theta dx \quad \rightarrow \quad y = -\int \left( \int \frac{M}{EI} dx + C_1 \right) dx + C_2 \quad (7.6)$$

となるだろう。  $C_1, C_2$  は積分定数で適当な境界条件を設定することで決まる値だ。

- コニー：境界条件を具体的に説明すると？

- K 氏：うん, 例えば長さが  $\ell$  の片持ちばりと単純ばりのケースで見ると境界条件は図 7.2 に示すように設定できる。これは変位で与えられる境界条件で幾何学的境界条件と呼ばれる。また, 片持ち

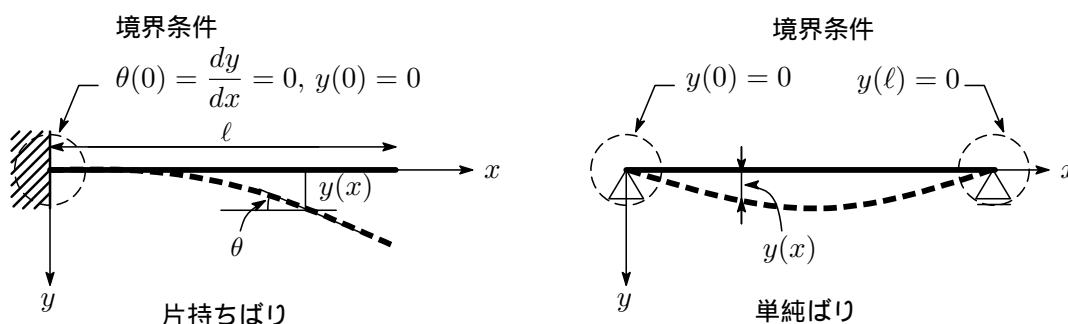


図 7.2: 片持ち梁と単純梁の境界条件

ばりでは  $x = \ell$  の端は自由端になるので曲げモーメントとせん断力が 0, つまり  $y''(x) = 0, Q = \frac{dM}{dx} \rightarrow y'''(x) = 0$ , また単純ばりでは  $x = 0, x = \ell$  で曲げモーメントが 0, つまり  $y''(x) = 0$  という力で与えられる境界条件も設定でき, これを力学的境界条件をいう。力学的境界条件はこの

表 2: 境界条件

	幾何学的境界条件	力学的境界条件
片持ちばり	$y(0) = 0, \theta(0) = 0$	$Q(\ell) = 0, M(\ell) = 0$
単純ばり	$y(0) = 0, y(\ell) = 0$	$M(0) = 0, M(\ell) = 0$

後の「モールの定理によるたわみの計算」のところで活躍する。

### A. 片持ちばり（弾性曲線法）

- K氏：それでは片持ちばりの自由端に荷重  $P$  が作用している場合を解いていこう。曲げモーメントは  $M(x) = -P(\ell - x)$  と表されるので

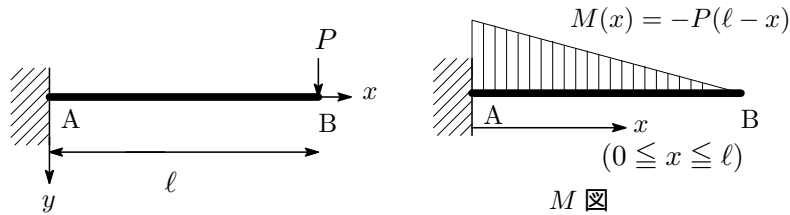


図 7.3: 片持ち梁

(7.5) より

$$\theta(x) = - \int \frac{M}{EI} dx + C_1 = \frac{1}{EI} \int P(\ell - x) dx + C_1 = \frac{P}{EI} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

積分定数  $C_1$  は境界条件  $\theta(0) = 0$  より  $C_1 = 0$  となるので

$$\theta(x) = \frac{P}{2EI} (2\ell - x)x \quad (7.7)$$

$\theta(x)$  は  $0 \leq x \leq \ell$  の範囲で単調増加関数となるので  $x = \ell$  で最大値を取る。したがって最大たわみ角は

$$\theta_{max} = \theta(\ell) = \frac{P\ell^2}{2EI} \quad (7.8)$$

これは仮想仕事法で得られた (6.14) と一致する。符号の違いは  $y$  軸を鉛直下方にとったことによる。次に (7.6) より

$$y(x) = \int \theta(x) dx + C_2 = \frac{P}{6EI} (3\ell - x)x^2 + C_2$$

積分定数  $C_2$  は境界条件  $y(0) = 0$  より  $C_2 = 0$  となり、

$$y(x) = \frac{P}{6EI} (3\ell - x)x^2 \quad (7.9)$$

$y(x)$  は  $0 \leq x \leq \ell$  の範囲で単調増加関数となるので  $x = \ell$  で最大値を取る。したがって最大たわみは

$$\delta_{max} = y(\ell) = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (7.10)$$

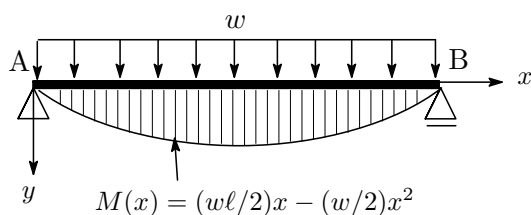
となり、仮想仕事法で得られた (6.13) と一致する。

- コニー：なるほど。

### B. 単純ばり（弾性曲線法）

- K氏：それじゃ長さが  $\ell$  の単純ばりに等分布荷重が作用しているケースをやってみよう。
- コニー：了解。えっと、曲げモーメントの分布曲線は  $M(x) = \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2$  だったわね。そうすると

$$\theta(x) = - \int \frac{M}{EI} dx = - \frac{w}{2EI} \int (\ell x - x^2) dx = \frac{wx^2(2x - 3\ell)}{12EI} + C_1 \quad (7.11)$$



次に

$$y(x) = \int \theta(x)dx + C_2 = \frac{wx^3(x-2\ell)}{24EI} + C_1x + C_2 \quad (7.12)$$

境界条件  $y(0) = 0$  より  $C_2 = 0$  ,  $y(\ell) = 0$  より  $C_1 = \frac{w\ell^3}{24EI}$  となる。まとめると

$$\theta(x) = \frac{wx^2(2x-3\ell)}{12EI} + \frac{w\ell^3}{24EI} \rightarrow \begin{cases} \theta_A = \frac{w\ell^3}{24EI} & (x=0) \\ \theta_B = -\frac{w\ell^3}{24EI} & (x=\ell) \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{wx^3(x-2\ell)}{24EI} + \frac{w\ell^3}{24EI}x \rightarrow \delta_{max} = \frac{5w\ell^4}{384EI} \quad (x=\ell/2)$$

仮想仕事法で求めた (6.19) , (6.21) と一致するわ。

- K氏：OK。それでは最後にモールの定理によるたわみ計算の方法を紹介して第7話を終わろう。

#### モールの定理によるたわみの計算

- K氏：モールの定理というのは (7.3) の微分方程式を直接解かなくてもはりのたわみを求めることができるといった内容で、ドイツの土木工学技術者 Christian Otto Mohr (1835-1918) が 1868 年に発表したんだね。具体的にみていこう。第1話の「おまけ」のところで曲げモーメント  $M$  とせん断力  $Q$  , 荷重  $w$  の間に

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} = -w_x, \quad Q_x = \frac{dM_x}{dx} \quad (7.13)$$

という関係式が成り立つことをみた。一方、たわみ  $y$  と曲げモーメント  $M$  の間には

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI}, \quad \theta = \frac{dy}{dx} \quad (7.14)$$

の関係式が成立することを見てきたね。この両者を見比べるとたわみ  $y$  が曲げモーメント  $M_x$  に、たわみ角  $\theta$  がせん断力  $Q_x$  に対応していることが分かるだろう。

$$\begin{pmatrix} y \longleftrightarrow M_x \\ \theta \longleftrightarrow Q_x \end{pmatrix}$$

ということは、(7.13) の荷重  $w_x$  を  $M_x/EI$  に置き換えて力のつり合いから曲げモーメントとせん断力の分布を求めれば、それがすなわちたわみとたわみ角の分布を求めることになるというわけで、これがモールの定理の内容だ。  $M_x/EI$  を弾性荷重 (elastic load) と呼んでいる。

- コニー：確かに曲げモーメントとせん断力が満たす微分方程式とたわみとたわみ角が満たす微分方程式の形は一致するわね。だからどうなの？

- K氏：まあ，そう先を急がないで。。。モールの定理の言っていることは『 $x$ 点におけるはりのたわみ  $y$  とたわみ角  $\theta$  は弾性荷重  $M_x/EI$  が作用しているはりのその点におけるせん断力  $\tilde{Q}$  と曲げモーメント  $\tilde{M}$  に等しい』ということなんだね。
- コニー：ということは，いままでいろいろなはりのせん断力と曲げモーメントを計算してきたけど，その計算がそっくり活かされるということかしら？
- K氏：ある意味ではその通りだ。ある意味といったのは，弾性荷重が作用している「はり」は「実際のはり」と同じとみなしてよいかという点なんだね。はりのたわみの微分方程式 (7.3) には，支点などによって設定された「たわみ」と「たわみ角」の境界条件，幾何学的境界条件を設定しただろう。弾性荷重が作用するはりも (7.14) の微分方程式を満たすので境界条件を設定しなければならない。この境界条件が表 2 の力学的境界条件なんだね。このように境界条件を満たすために仮想的に考えられたはりを，共役はり (conjugate beam) と呼んでいる。共役はりのせん断力，曲げモーメントであることを強調するために  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{M}$  と頭に  $\sim$  を付けた。そして，モールの定理を利用してたわみやたわみ角を求める方法を弾性荷重法という。弾性荷重法の計算手順は次の通りだ。
  - 1) 問題としているはりの曲げモーメント  $M$  を求める。
  - 2) 弾性荷重を共役はりに作用させる。
  - 3) 共役はりにおけるせん断力  $\tilde{Q}$  と曲げモーメント  $\tilde{M}$  を求め， $\tilde{Q} = \theta$ ,  $\tilde{M} = y$  より，たわみ角  $\theta$  とたわみ  $y$  を得る。
- コニー：そうなんだ。
- K氏：それではモールの定理を使った具体的な問題をみていこう。その前に，くどいようだが境界条件の整合性を見ておかなければならない。表 2 で，単純はりの場合は幾何学的境界条件と力学的境界条件の整合性がとれているが，片持ち梁の場合は固定端  $y(0) = 0, \theta(0) = 0$  に対してそれらに相当する  $\tilde{Q}, \tilde{M}$  が  $\tilde{Q}(\ell) = 0, \tilde{M}(\ell) = 0$  となっているだろう。つまり，共役はりでは実際のはりの固定端を自由端に置き換えてやらなければならないんだね。そうすることで境界条件の整合性がとれる。

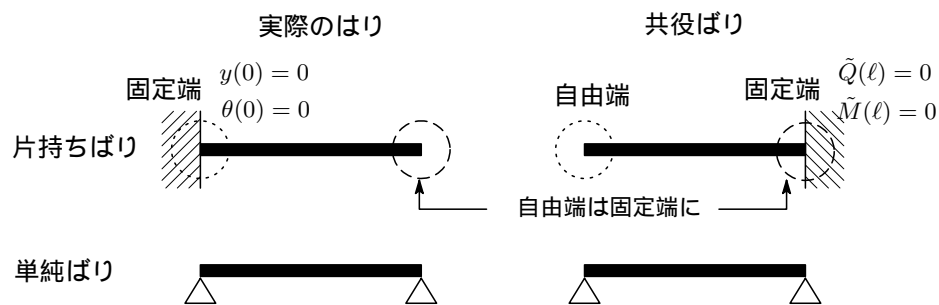


図 7.4: 共役梁

- コニー：つまり，実際のはりの固定端は，共役はりでは自由端にしなければならないし，その逆も言えるわけね。
- K氏：そういうことだね。

## A. 片持ちばり (モールの定理)

## (1) 集中荷重

- K氏: お待たせした, モールの定理を使って図 7.3 の片持ちばりの最大たわみと最大たわみ角を求めていこう。この片持ちばりの  $M$  図は第 1 話で求めている真ん中の図となる。共役ばりは境

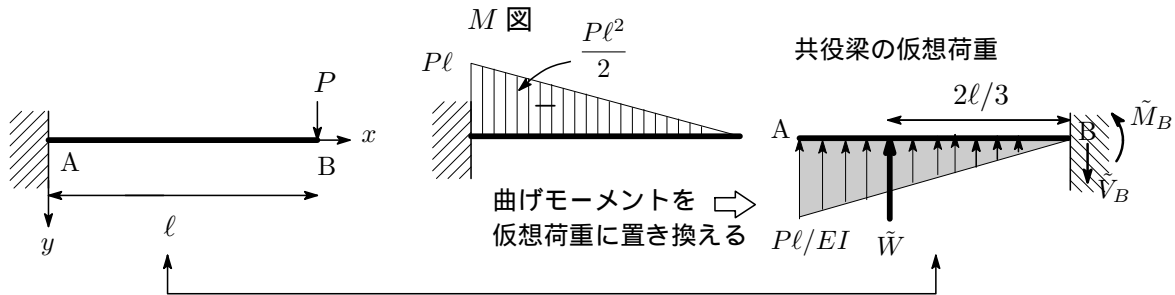


図 7.5: モールの定理と片持ち梁

界条件である元のはりの固定端と自由端を入れ替えたものになるね。また, 曲げモーメント  $M_x$  を  $EI$  で割った共役ばりの仮想 (分布) 荷重  $\tilde{w}_x$  は, いまのケースでは曲げモーメントの符号が負なのでその向きは  $y$  軸の負の向き, つまり下から上の方向に作用することになるだろう。分布荷重を集中荷重  $\tilde{W}$  に置き換えると三角形の面積計算より

$$\tilde{W} = l \times \frac{Pl}{EI} \times \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

となり, この荷重が A 端から  $l/3$  の位置に作用していることになる。固定端での曲げモーメントを求めよう。固定端でのモーメントのつり合いより

$$\sum M = \frac{2}{3}l \times \tilde{W} - \tilde{M}_B = 0 \quad \therefore \tilde{M}_B = \frac{2}{3}l\tilde{W} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

モールの定理よりこの曲げモーメント  $\tilde{M}_B$  は片持ちばりの最大たわみ  $y_{max}$  となるので

$$y_{max} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (7.15)$$

また, 固定端での反力  $V_B$  は力のつり合いから

$$\sum Y = \tilde{V}_B - \tilde{W} = 0 \quad \therefore \tilde{V}_B = \frac{Pl^3}{2EI}$$

モールの定理よりこの反力  $\tilde{V}_B$  は片持ちばり先端の最大たわみ角  $\theta_{max}$  となるので

$$\theta_{max} = \frac{Pl^2}{2EI} \quad (7.16)$$

いずれも仮想仕事法で求めた値と一致する。

- コニー: なるほど。片持ちばりの場合, 共役ばりというモノを考え微分方程式を解くことなく力のつり合いから同じ結果が得られるというわけね。

- K氏：うん。ところで最大たわみ，最大たわみ角は上で見たように

$$y_{max} = \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{2}{3}\ell \times \bar{W} = -\frac{1}{EI} \times \frac{2}{3}\ell \times \text{片持ちばりの } M \text{ 図の面積}$$

$$= -\frac{1}{EI} \times \text{「片持ち梁 } M \text{ 図の面積の自由端 (B) まわりのモーメント」} \quad (7.17)$$

$$\theta_{max} = \frac{P\ell^2}{2EI} = -\frac{1}{EI} \times \text{片持ちばりの } M \text{ 図の面積} \quad (7.18)$$

で表すことができるだろう。ただし  $M$  図の面積はマイナス符号が付くことに注意。この関係式を活用すれば計算が簡略化できるね。早速，等分布荷重が作用している片持ちばりに適用してみよう。

## (2) 等分布荷重

- K氏：等分布荷重が作用している片持ちばりの自由端におけるたわみとたわみ角を求めよう。

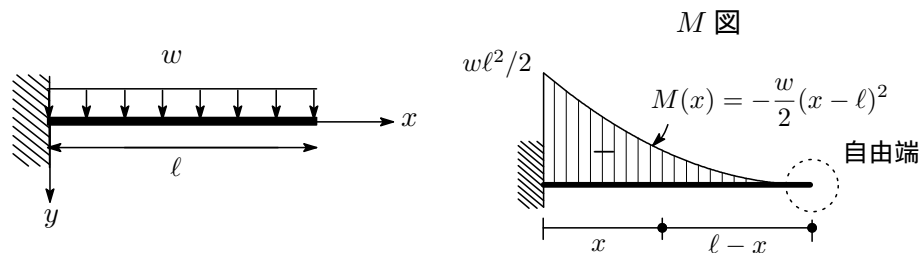


図 7.6: 片持ち梁・等分布荷重

位置  $x$  における曲げモーメント  $M(x)$  は

$$M(x) = -\frac{w}{2}(x-\ell)^2$$

で与えられるので， $M$  図の面積は

$$S_M = \int_0^\ell M(x)dx = -\frac{w}{2} \int_0^\ell (x-\ell)^2 dx = -\frac{w\ell^3}{6}$$

したがって，最大たわみ角は (7.18) より

$$\theta_{max} = -\frac{1}{EI} \times \left(-\frac{w\ell^3}{6}\right) = \frac{w\ell^3}{6EI}$$

次に最大たわみだが，「片持ち梁  $M$  図の面積の自由端まわりのモーメント」は，面積素片  $M(x)dx$  の自由端まわりのモーメント  $(\ell-x) \times M(x)dx$  を  $x=0 \sim \ell$  にわたって積分したことになるので

$$y_{max} = -\frac{1}{EI} \int_0^\ell M(x)(\ell-x)dx = \frac{w}{2EI} \int_0^\ell (x-\ell)^2(\ell-x)dx = \frac{w\ell^4}{8EI}$$

と得られる。

- コニー：なるほど，簡単な積分計算だけで求められるのね。片持ちばりの理論的な計算はわかったけど，実際に片持ちばりに荷重をかけたときのたわみ量とたわみ角はどの程度の値になるのか，イメージをつかみたいわ。

- K 氏：そうだね。具体的に見積もってみよう。断面が  $20 \times 30\text{cm}^2$ ，断面 2 次モーメント  $I = 45 \times 10^3\text{cm}^4$ ，ヤング率  $E = 9.8 \times 10^5\text{N/cm}^2$  の鋼材からなる長さが 2m の片持ちばりがあり，その自由端に 4kN の荷重が作用した場合の最大たわみと最大たわみ角を求めると

$$\begin{cases} \text{最大たわみ} & y_{max} = \frac{P\ell^3}{3EI} = 0.242\text{ cm} \\ \text{最大たわみ角} & \theta_{max} = \frac{P\ell^2}{2EI} = 0.00181\text{ rad} \end{cases}$$

4kN の荷重といえば体重が 200kg の力士 2 人分の重さになる。まあ，目に見えないほどのたわみ量だね。

## B. 単純ばり（モールの定理）

### (1) 集中荷重

- K 氏：長さが  $\ell$  の単純ばりの C 点に荷重  $P$  が作用している。C 点のたわみと A, B 点のたわみ角をモールの定理を使って求めよう。

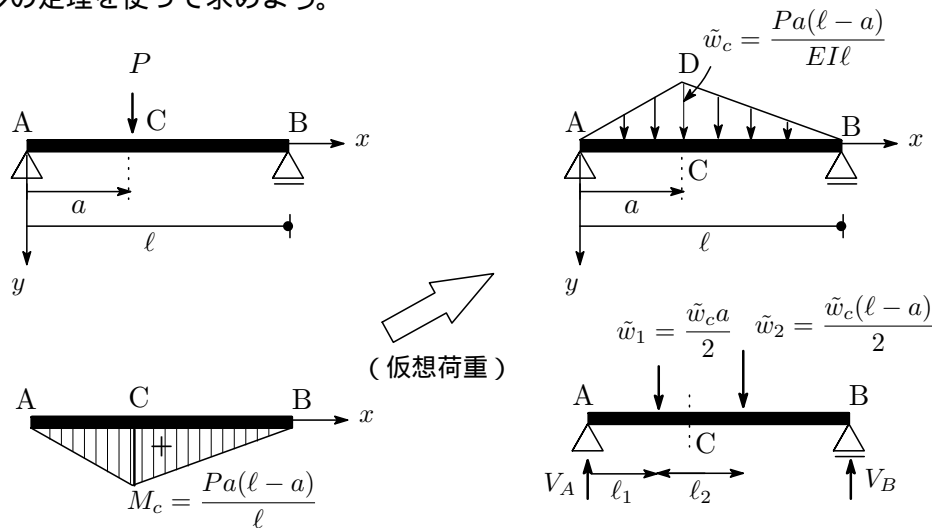


図 7.7: 単純梁・集中荷重

基本的な計算は第 2 話でやっている ( $y$  軸の向きは逆) のので省略するが，C 点での曲げモーメントは  $M_C = \frac{Pa(\ell-a)}{\ell}$  だったね。共役ばりでは  $M$  図の面積を  $EI$  で割った仮想分布荷重が作用する。そこで分布荷重を集中荷重に直してやる。C 点での仮想荷重を  $\tilde{w}_c$  とすると

$$\tilde{w}_c = \frac{M_C}{EI} = \frac{Pa(\ell-a)}{EI\ell}$$

となるね。そうすると共役ばり AC には三角形 ACD の荷重  $\tilde{w}_c a/2$  が，はり BC には三角形 BCD の荷重  $\tilde{w}_c(\ell-a)/2$  が作用することになる。A 点，B 点での反力  $\tilde{V}_A$ ， $\tilde{V}_B$  と C 点での曲げモーメント  $\tilde{M}_C$  は

$$\tilde{V}_A = \frac{\tilde{w}_c}{6}(2\ell-a), \quad \tilde{V}_B = \frac{\tilde{w}_c}{6}(\ell+a), \quad \tilde{M}_C = \frac{1}{3}a(\ell-a)\tilde{w}_c$$

で与えられる。したがってモールの定理より A 点，B 点のたわみ角  $\theta_A$ ， $\theta_B$  と C 点のたわみ  $y_C$  は

$$\theta_A = \tilde{V}_A = \frac{Pa(\ell-a)(2\ell-a)}{6EI\ell}, \quad \theta_B = \tilde{V}_B = \frac{Pa(\ell^2-a^2)}{6EI\ell}, \quad y_C = \tilde{M}_C = \frac{Pa^2(\ell-a)^2}{3EI\ell} \quad (7.19)$$

となる。

## (2) 分布荷重

- K氏：次に図 7.8 に示す単純ばりに等分布荷重が作用しているケースを考えよう。

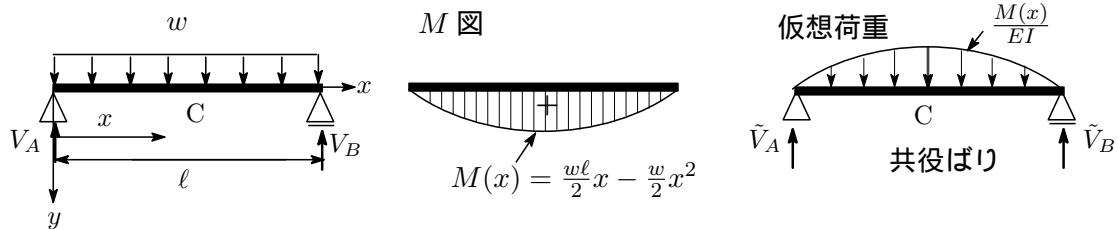


図 7.8: 単純ばり・等分布荷重

この単純ばりの A 点でのたわみ角  $\theta_A$  と最大たわみ  $y_{max}$  を求めるのだが、コニーやってみるかい？

- コニー：あまり自信はないけどやってみるわ。曲げモーメントの分布関数は

$$M(x) = \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

で与えられたので、共役ばりの仮想分布荷重はこれを  $EI$  で割って図の右のようになるわね。総仮想荷重を  $\tilde{W}$  とすると

$$\tilde{W} = \frac{1}{EI} \int_0^\ell M(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left( \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx = \frac{w\ell^3}{12EI}$$

共役ばりの A 点, B 点での反力を  $\tilde{V}_A, \tilde{V}_B$  とすると中点で対称なので力のつり合いより

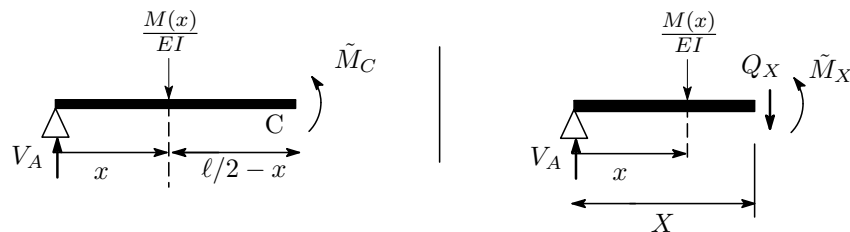
$$\tilde{V}_A = \tilde{V}_B, \quad \tilde{W} - (\tilde{V}_A + \tilde{V}_B) = 0 \quad \therefore \tilde{V}_A = \tilde{V}_B = \frac{w\ell^3}{24EI}$$

と求められるので、モールの定理より

$$\theta_A = \tilde{V}_A = \frac{w\ell^3}{24EI}$$

次に共役ばりの中点 C でのモーメント  $\tilde{M}_C$  を求めなければならないけど。。

- K氏：C 点で仮想切断してモーメントのつり合いを考えればいいんだね。



- コニー：そうだったわね。そうすると C 点回りのモーメントのつり合いの式は

$$\sum \tilde{M} = \frac{\ell}{2} \times \tilde{V}(A) - \tilde{M}_C - \frac{1}{EI} \int_0^{\ell/2} \{(\ell/2 - x) \times M(x)\} dx = 0$$

これから

$$\tilde{M}_C = \frac{\ell}{2} \tilde{V}_A - \frac{1}{EI} \int_0^{\ell/2} \{(\ell/2 - x) \times M(x)\} dx = \frac{5w\ell^4}{384EI}$$



モールの定理より

$$y_{max} = \tilde{M}_C = \frac{5w\ell^4}{384EI}$$

- K氏：OK，そうだね。それじゃ具体的に見積もってみよう。断面が  $20 \times 30\text{cm}^2$ ，断面 2 次モーメント  $I = 45 \times 10^3\text{cm}^4$ ，ヤング率  $E = 9.8 \times 10^5\text{N/cm}^2$  の鋼材からなる長さが 2m の単純ばりに  $w = 8\text{kN/m}$  の等分布荷重が作用しているときの最大たわみと最大たわみ角を求めてごらん。
- コニー：了解。  $w = 8\text{kN/m} = 8000\text{N/m} = 80\text{N/cm}$ ，  $\ell = 2\text{m} = 200\text{cm}$  とすると最大たわみは

$$y_{max} = \frac{5w\ell^4}{384EI} = \frac{5 \times 80 \times 200^4}{384 \times 9.8 \times 10^5 \times 45 \times 10^3} = 0.0378\text{ cm}$$

$$\theta_A = \frac{w\ell^3}{24EI} = \frac{80 \times 200^3}{24 \times 9.8 \times 10^5 \times 45 \times 10^3} = 0.0006\text{ rad}$$

となるわね。

- K氏：それじゃついでに任意の位置  $X$  ( $0 \leq X \leq \ell$ ) におけるひずみ角  $\theta_X$  とひずみ  $y_X$  を求めておこう。共役ばりの位置  $X$  のおけるせん断力を  $\tilde{Q}_X$ ，曲げモーメントを  $\tilde{M}_X$  とすると力のつり合いより

$$\sum Y = \tilde{Q}_X + \frac{1}{EI} \int_0^X M(x)dx - \tilde{V}_A = 0$$

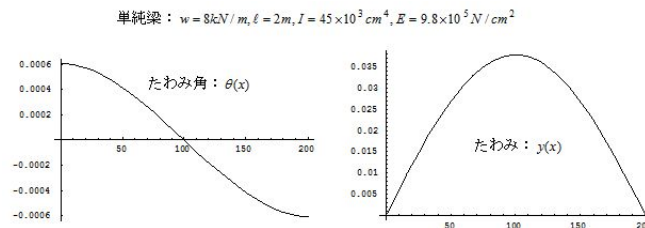
$$\sum \tilde{M} = X \times V_A - M_X - \int_0^X (X-x)M(x)dx = 0$$

モールの定理から

$$\theta_X = \tilde{Q}_X = \tilde{V}_A - \frac{1}{EI} \int_0^X \left( \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx = \frac{w\ell^3}{24EI} - \frac{w}{2EI} \left( \frac{\ell}{2}X^2 - \frac{X^3}{3} \right) \begin{cases} X=0 & \theta_A = \frac{\ell^3}{24EI} \\ X=\frac{\ell}{2} & \theta_C = 0 \\ X=\ell & \theta_B = -\frac{\ell^3}{24EI} \end{cases}$$

$$y_X = \tilde{M}_X = XV_A - \int_0^X (X-x)M(x)dx = \frac{w\ell^3}{24EI}X - \frac{w}{2EI} \left( \frac{\ell}{6}X^3 - \frac{X^4}{12} \right) \begin{cases} X=0 & y_A = 0 \\ X=\frac{\ell}{2} & y_C = \frac{5w\ell^4}{384EI} \\ X=\ell & y_B = 0 \end{cases}$$

先ほどの単純ばりのたわみ角とたわみをグラフに描けば次のようになるね。



以上で第 7 話を終了しよう。

- コニー：大変お疲れ様でした。

## 第8話.

## はりの曲げ応力と断面係数・せん断応力

- K氏：こんにちわ～，コニー。元気そうでなによりだ。この構造力学談話も当初予定より長くなってとうとう第8話にまできたね。こうなりゃいけるとことまでいってしまおうという気になる。ということで，第8話は第7話の続きとしてカステリアーノの定理をとりあげようと考えていたんだが少し気が変わった。ここで少し材料力学的な知識の補充もしておこうという気になったので，第8話ははりの曲げ応力と断面係数というテーマで話を進めることにしたよ。
- コニー：こんにちは，Kさん。これから寒くなってくると思うけど風邪だけは引かないように気を付けてね。ところで予定の変更は全然かまわないけど，カステリアーノの定理ってなんなの？
- K氏：うん，第6話，第7話では仮想仕事法や弾性曲線法，モールの定理で「はり」の変形を求めたね。カステリアーノの定理は「ラーメン」や「トラス」の変形までも求めることのできる一般的な方法なんだ。構造物は外力で変形されるとひずみのエネルギーが溜まるだろう。このひずみのエネルギーに注目して変形を調べていこうといったものなんだね。材料力学的な知識も必要となるので，第8話はそれにあてようというわけなんだ。
- コニー：そうなんだ。それではお願いします。

## (1) 曲げモーメントと応力

- K氏：第6話でも説明したように，一様な曲げモーメントだけを受けて曲がったはりの断面を見ると中立軸（面）の下側では引張応力，上側では圧縮応力が分布する状態となる。曲げモーメント  $M$  ははり全域で一定となり，せん断力  $Q$  は生じないので純曲げ状態といわれる（この節の最後の補足参照）。部材軸に直角な断面は変形後も平面を保ち部材軸に直角なままになっていると考えよう。これをこれをベルヌイ・オイラーの仮定といっているが，簡単にスルーすればいいだろう。中立軸から  $y$  の距離の中立軸に垂直な断面に生じる垂直応力  $\sigma$  は (6.4) で示され，再掲す

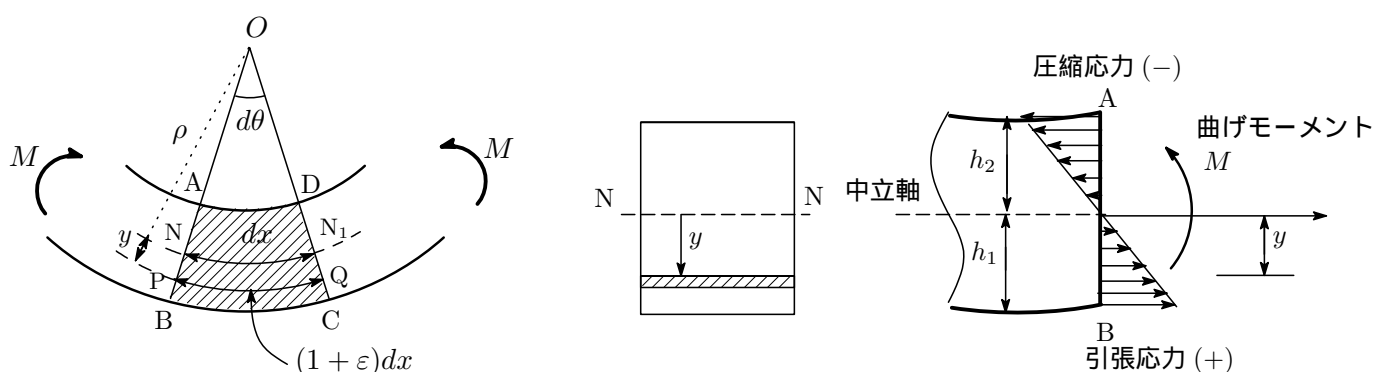


図 8.1: 曲げ応力と曲げモーメント

ると

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (E: \text{ヤング率}, 1/\rho: \text{中立軸の曲率}) \quad (8.1)$$

垂直応力  $\sigma$  を曲げ応力といった。垂直応力  $\sigma$  は中立軸からの距離  $y$  に比例し、 $y$  を下向きに正とすると中立軸より下側に正符号の引張応力、上側には負符号の圧縮応力が生じることが分かる。(8.1) から分かるように曲げモーメントの分布は直線上で中立面で  $\sigma = 0$  となる。はりには縦軸方向の外は作用しないから、曲げ応力を断面全体にわたって積分した値は 0 になければならないね。

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad (8.2)$$

(8.2) に (8.1) を入れると

$$\frac{E}{\rho} \int y dA = 0 \quad \therefore \int y dA = 0 \quad (8.3)$$

が得られる。 $\int_A y dA$  を断面 1 次モーメントといい、中立軸 NN に関する面積モーメントだ。このあとで説明するように、はりの曲げに対する剛性とは関係しないが断面の図心を求めるときに必要となるんだね。

- コニー：図心ってなに？
- K 氏：うん、図心というのは断面を厚さが一定の板と考えたときの重心位置のことをいっている。構造力学特有の表現だね。そして中立軸は図心を通る軸のことだ。
- コニー：そうなんだ。
- K 氏：さて、図 8.1 から分かるように断面の微小面積  $dA$  に作用する力  $\sigma dA$  は中立軸まわりに  $y \times \sigma dA$  のモーメントを引き起こすだろう。このモーメントの総和は抵抗モーメントとなり、これは断面が受ける曲げモーメントとつり合わなければならない。

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \quad (8.4)$$

ここで  $\int_A y^2 dA = I$  とおくと

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad \text{または} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (8.5)$$

と表される。曲りの大小を表す曲率  $\rho$  は  $EI$  に反比例するので、 $EI$  は曲げに対する変形抵抗の大きさを示す指標となり、これを曲げ剛性といったね。 $I$  は断面 2 次モーメントといい、断面の形状と寸法が与えられれば計算で求めることができる。

- コニー：断面 1 次モーメントとか断面 2 次モーメントという用語がでてきたけど、1 次、2 次というのはなにを意味しているのかしら。
- K 氏：モーメントは定点からその量までの距離をその量に掛けたものだったね。だから  $y \times dA$  は断面積のモーメントとなる。このばあい、距離  $y$  の次数が 1 次だから断面 1 次モーメントといい、 $y^2 \times dA$  は距離  $y$  の次数が 2 次だから断面 2 次モーメントと呼んで、名前で内容が分かるようにしているんだね。
- コニー：そうなんだ。了解したわ。
- K 氏：(8.1) と (8.5) から曲げ応力は

$$\sigma(y) = \frac{My}{I} \quad (8.6)$$

と表せ中立軸から最も離れた位置で  $\sigma$  は最大となる。 $I$  は何度もでてきたように断面の中立軸に関する断面の 2 次モーメント。図 8.1 に示すように曲げモーメントが  $M > 0$  の場合、下端  $y = h_1$  で最大引張り応力  $\sigma_1$  が生じ、上端  $y = -h_2$  で最大圧縮応力  $\sigma_2$  が生じる。

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{I} = \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_2 = -\frac{Mh_2}{I} = -\frac{M}{Z_2} \quad (8.7)$$

$Z_1, Z_2$  を中立軸に関する断面係数と呼んでいる。 $Z_1$  は引張側、 $Z_2$  は圧縮側の断面係数。この 2 式は形式的にまとめると

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z}, \quad Z = I/h : h \text{ は中立軸から端までの距離} \quad (8.8)$$

と表せ、曲げ応力の最大値  $\sigma_{max}$  は曲げモーメントを断面係数で割ることで求められるということだね。

- コニー：断面係数というのは、断面 2 次モーメントを含んでいることから分かるようにはりの曲がりにくさ（剛性）を決めている量ということね。
- K 氏：そうだね。断面係数のお話はまたあとでやるのでお楽しみに。

#### 断面 1 次、2 次モーメントの計算

- K 氏：それでは具体的に断面 1 次モーメントと断面 2 次モーメントを計算していこう。  
A. 断面 1 次モーメント： $x$  軸、 $y$  軸に関する断面 1 次モーメントを  $S_x, S_y$  とすると、 $S_x, S_y$  はそれぞれ  $x$  軸、 $y$  軸に関する面積モーメントだから次式で表せるだろう。

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA \quad (8.9)$$

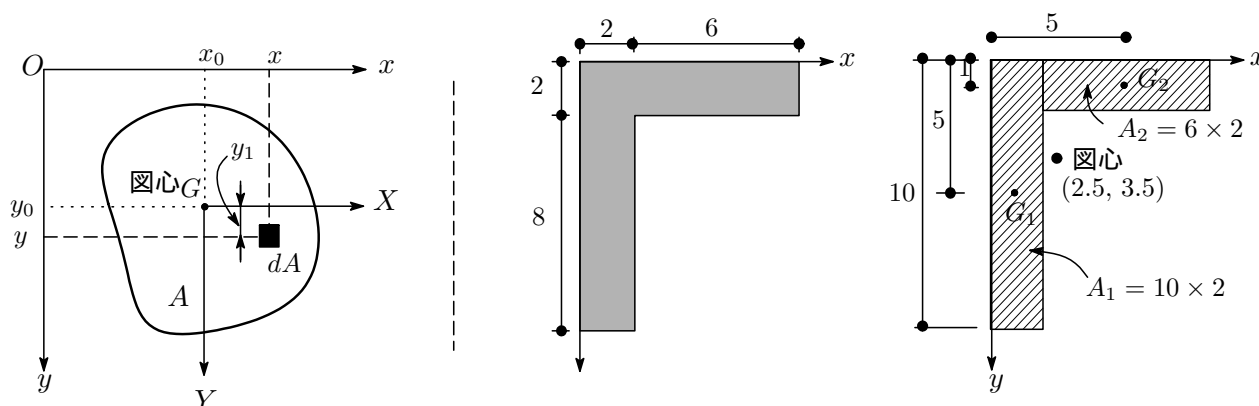


図 8.2: 断面 1 次モーメント

はりの断面の図心（重心）位置を  $(x_0, y_0)$  は

$$x_0 = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{1}{A} \int_A y dA, \quad y_0 = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{1}{A} \int_A x dA$$

と表せるので、図心は断面の1次モーメントを用いて次式で求められる。

$$x_0 = \frac{S_y}{A}, \quad y_0 = \frac{S_x}{A} \quad (8.10)$$

複雑な図形では、単純な図形に分けてそれぞれについて1次モーメントを求め加えればよい。

$$S_x = A_1 y_0^1 + A_2 y_0^2 + \dots = \int_A y dA, \quad S_y = A_1 x_0^1 + A_2 x_0^2 + \dots = \int_A x dA \quad (8.11)$$

例えば図 8.2 の右のはりの場合なら  $A = A_1 + A_2 = 32\text{cm}^2$  で、断面の1次モーメントは

$$S_x = A_1 \times y_0^1 + A_2 \times y_0^2 = 5 \times (10 \times 2) + 1 \times (6 \times 2) = 112 \text{ cm}^2$$

$$S_y = A_1 \times x_0^1 + A_2 \times x_0^2 = 1 \times (10 \times 2) + 5 \times (6 \times 2) = 80 \text{ cm}^2$$

となる。したがって図心は

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{112}{32} = 2.5 \text{ cm}, \quad y_0 = \frac{80}{32} = 3.5 \text{ cm}$$

テキストによっては単位を mm にしているけど  $\text{cm} \rightarrow \text{mm}$  への換算は  $\text{cm} = 10\text{mm}$ ,  $\text{cm}^4 = 10^4\text{mm}^4$  で換算すればいい。

- コニー：なるほどね。

B. 断面2次モーメント： $x$  軸,  $y$  軸に関する断面の2次モーメントは

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (8.12)$$

で表される。これは力学でお馴染みの慣性モーメントと同じ形をしているね。断面積が  $A$  の図形の図心  $G(x_0, y_0)$  を通る  $X$  軸に関する断面2次モーメントを  $I_X$  とすると

$$I_x = I_X + y_0^2 A \quad (8.13)$$

が成り立つ。これを平行軸の定理と呼んでいる。この定理のおかげで断面2次モーメントの計算は楽になるね。平行軸の定理の導出は力学で勉強したと思うけど、やってみるかい。

- コニー：半分忘れたけど、やってみようかしら。図心を原点  $(0, 0)$  とする  $X$  軸から微小面積  $dA$  までの距離を  $y_1$  とすると定義から

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_0 + y_1)^2 dA = \int_A y_1^2 dA + 2y_0 \int_A y_1 dA + y_0^2 \int_A dA$$

ところで断面の1次モーメント  $\int_A y_1 dA$  は図心を通るので0になる。ということで

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y_1^2 dA + y_0^2 \int_A dA = I_X + y_0^2 A$$

がでてくるわね。

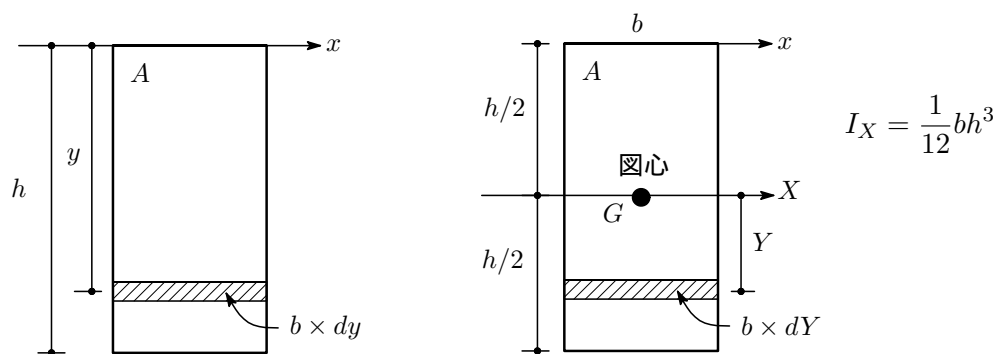


図 8.3: 断面 2 次モーメント

- K 氏：OK，そうだね。これから図心を通る軸に関する断面の 2 次モーメントは最小になることが分かる。図 8.3 の長方形断面の 2 次モーメント  $I_x, I_X$  を求めると

$$I_x = \int_0^y y^2 b dy = \frac{1}{3} b h^3, \quad I_X = 2 \int_0^{h/2} Y^2 b dY = \frac{1}{12} b h^3 \quad (8.14)$$

となる。 $y_0^2 A = (h/2)^2 b h = b h^3 / 4$  なので  $I_x = I_X + y_0^2 A$  となって (8.13) が成り立つね。

それでは，図 8.2 の右のはりの断面の 2 次モーメント  $I_x$  を求めてごらん。

- コニー：突然振ってくるのね！仕方ないわ。え～っと，2 つの四角形に分けて左の四角形の 2 次モーメントを  $I_x^1$ ，右の四角形のを  $I_x^2$  とするわね。そうすると

$$I_x = I_x^1 + I_x^2, \quad I_x^1 = I_X^1 + y_0^2 A, \quad I_x^2 = I_X^2 + y_0^2 A$$

となり， $I_x^1$  の方は

$$I_X^1 = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{2 \times 10^3}{12} = 166.7, \quad y_0^2 A = 5^2 \times 10 \times 2 = 500$$

から

$$I_x^1 = I_X^1 + y_0^2 A = 666.7 \text{ cm}^4$$

$I_x^2$  の方は

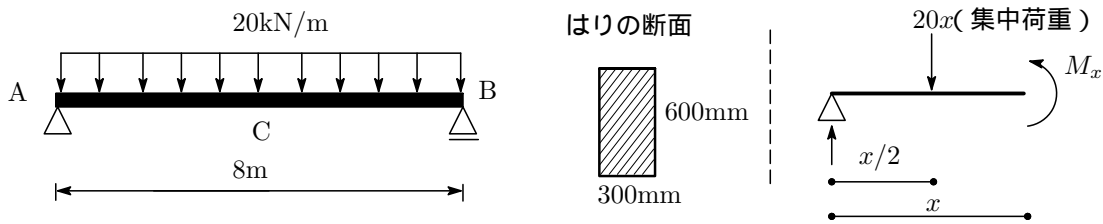
$$I_X^2 = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{6 \times 2^3}{12} = 3, \quad y_0^2 A = 1^2 \times 6 \times 2 = 12, \quad I_x^2 = 15$$

したがって

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 = 515 \text{ cm}^4$$

- K 氏：それじゃもう一つ。下の図のような分布荷重を受けている単純ばりの断面係数と曲げ応力の最大値を求めよという問題だ。やってみるか。
- コニー：そうね，え～っと，前のノートを見ながら計算するとして。。。支点 A, B の反力を  $V_A, V_B$  とすると力のつり合いから

$$V_A + V_B = 20 \times 8, \quad 4 \times V_A = 4 \times V_B \quad \therefore V_A = V_B = 80 \text{ kN}$$



支点 A から距離  $x$  の位置でのモーメントはその位置で仮想切断しモーメントのつり合いの式より

$$M_x = x \times V_A - \frac{x}{2} \times 20x = -10x^2 + 80x = -10(x-4)^2 + 160$$

と得られるので,  $M_x$  は  $x = 4$  の中点 C で最大値  $M_{x=4} = 160 \text{ kNm}$  をとる。断面係数  $Z$  は

$$Z = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3}{6} = \frac{300 \times 600}{6} = 18 \times 10^6 \text{ mm}^3 \quad (I = \frac{1}{12}bh^3)$$

したがって最大曲げ応力  $\sigma_{max}$  は

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x=4}}{Z} = \frac{160 \times 10^6}{18 \times 10^6} = 8.89 \text{ N/mm}^2$$

となるわね。

補足: 支点 A, B に曲げモーメント  $M_A, M_B$  だけが作用している単純ばりの  $M$  図を求める。 $M_A = M_B$  の場合, 純曲げ状態となる。

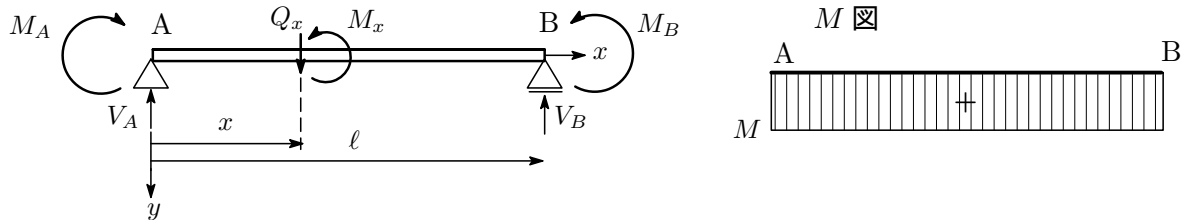


図 8.4: 純曲げ状態

力のつり合いより

$$\sum Y = -(V_A + V_B) = 0, \quad \sum M = M_A - M_B - l \times V_B = 0 \quad \therefore V_A = \frac{M_B - M_A}{l}, \quad V_B = \frac{M_A - M_B}{l}$$

位置  $x$  でのせん断力  $Q_x$ , 曲げモーメントを  $M_x$  とすると

$$\sum Y = Q_x - V_A = 0, \quad \sum M = M_A - M_x + x \times V_A = 0 \quad \therefore Q_x = \frac{M_B - M_A}{l}, \quad M_x = M_A + \left(\frac{M_B - M_A}{l}\right)x$$

$M_A = M_B$  の場合

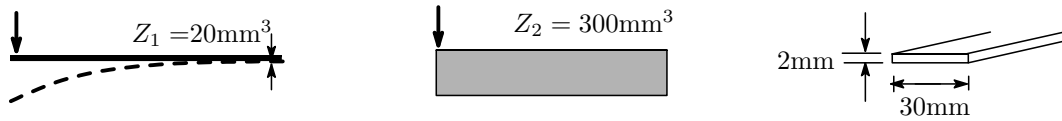
$$Q_x = 0, \quad M_x = M \quad (0 \leq x \leq l)$$

となり, せん断力は生じず, 曲げモーメント  $M$  は単純ばり全域で一定の「純曲げ状態」となる。

断面係数

- K 氏: 上の問題で見たように断面係数が大きいと部材内で発生する曲げ応力は小さくなり, ある意味丈夫な部材ということになる。例えば一つのはりでも平べったい側を上向きにした場合と縦

向きした場合とは、はりの曲がりやすさが異なることは経験上よく知っていることだね。手近にある長さ 300mm，厚み 2mm，幅 30mm のプラスチックの物差しをとりあげよう。



プラスチック物差しの平べったい面が水平になるように一端を固定し，もう一方の端を少し押しと物差しは簡単に曲がる。一方，垂直になるようにセットしたときは簡単には曲がらない。同じ物差しでもこうも違う。断面係数を求めると，前の場合は  $Z_1 = bh^2/6 = 30 \times 2^2/6 = 20\text{mm}^3$ ，後の場合は  $Z_2 = 2 \times 30^2/6 = 300\text{mm}^3$  となる。後の場合の断面係数は前のその 15 倍も大きい。 $M = \sigma Z$  だから  $M$  を同じとすると前の場合は後の 15 倍もの曲げ応力が発生していることになるね。部材内部に生じる垂直応力  $\sigma$  を同じくしたとき， $Z$  が大きいほど  $M$  も大きな値となり，いいかえるとその部材は大きな荷重に耐えることになる。

- コニー：つまり，同じ部材を使っても断面係数が大きくなるようにセットすれば部材の耐荷重性能がアップするということね。断面係数は重要なファクターなんだ。
- K 氏：図 8.5 に各種断面形状の  $I$  と  $Z$  を載せておくので， $I$  と  $Z$  の式の導出に挑戦しておくのもいいね。

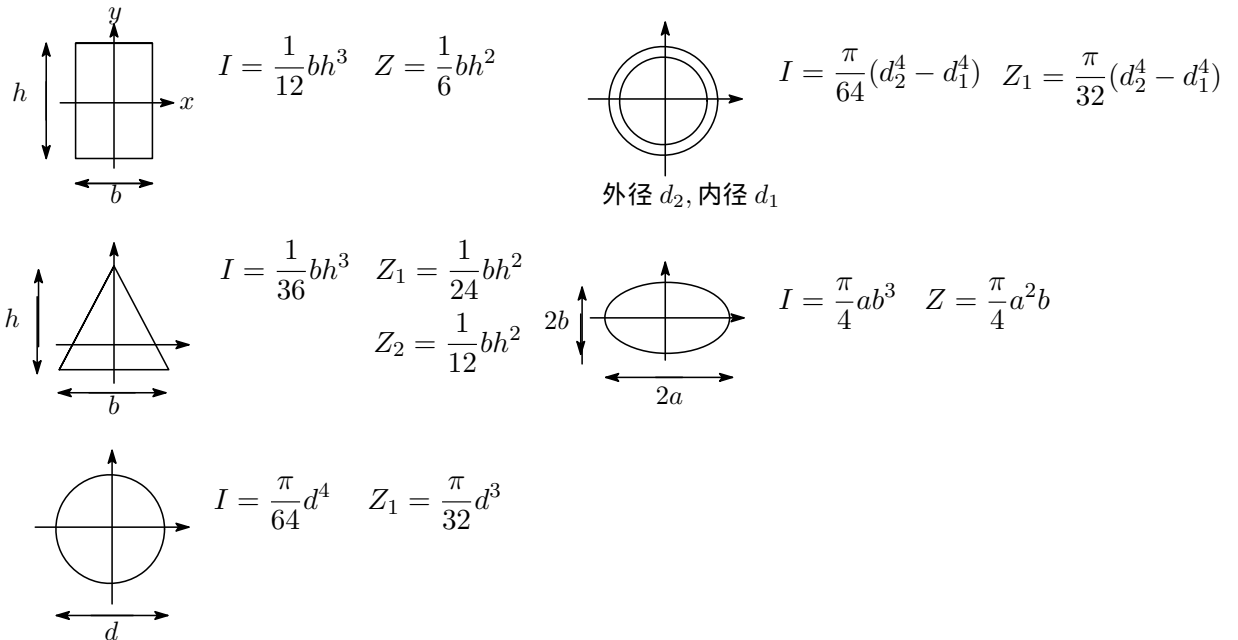


図 8.5: 断面 2 次モーメントと断面係数

- コニー：いまのお話はスルーしようと思ったけど，折角だから三角形面積の  $I$  と  $Z$  の導出に挑戦してみるわ。底辺の長さが  $b$ ，高さが  $h$  の三角形を考えるわね。三角形の重心  $G$  を通る水平軸を  $X$  軸，底辺の軸を  $x$  軸とすると， $X$  軸に関する断面の 2 次モーメント  $I_X$  は  $x$  軸に関する断面の 2 次モーメント  $I_x$  を求めて平行軸の定理を使えばいい。 $I_x$  は

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{bh^3}{12}$$



と求まるので，平行軸の定理 (8.13) より

$$I_X = I_x - y_0^2 A = \int_A y^2 dA = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

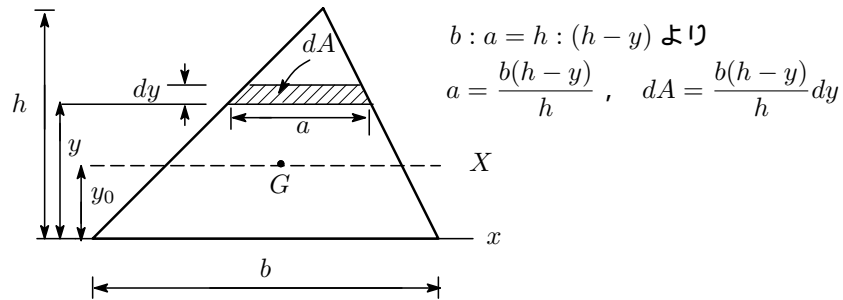


図 8.6: 三角形の断面 2 次モーメントと断面係数

次に断面係数だけど，頂点に対する断面係数を  $Z_1$ ，底辺に対するのを  $Z_2$  とすると，(8.8) より

$$Z_1 = \frac{I_X}{2h/3} = \frac{bh^2}{24} \quad Z_2 = \frac{I_X}{h/3} = \frac{bh^2}{12}$$

- K 氏：うん，その調子で他のもやってみたらいいね。

## (2) せん断応力と曲げモーメント

### 共役せん断応力

- K 氏：繰り返しになるけど，単位面積当たりの内力を応力といい，断面に垂直な内力  $P$  を断面積  $A$  で割った値を垂直応力  $\sigma$  といった。

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

一方，作用面に沿って生じる応力をせん断応力という。

- コニー：「垂直応力度」という表現も見かけるけど垂直応力とは異なるものなの？
- K 氏：中身は同じだよ。「応力の度合い」ということを強調しているだけなんだね。さて，図 8.7 に示すようなせん断力が作用しているはりがあり，はりの微小直六面体の各面に働くせん断応力  $\tau$  および  $\tau'$  を考えよう。この微小直六面体が回転しないのはモーメントのつり合いが保たれてい

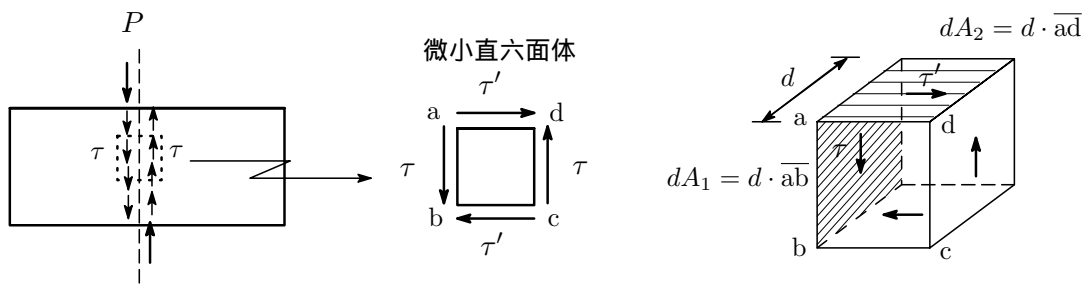


図 8.7: 共役せん断応力

るからで、モーメントのつり合いの式は

$$\overline{ab} \times (\tau' \cdot dA_2) - \overline{ad} \times (\tau \cdot dA_1) = 0, \quad \text{ただし } dA_1 = d \cdot \overline{ab}, \quad dA_2 = d \cdot \overline{ad}$$

となるね。これから

$$\tau = \tau' \quad (8.15)$$

であることがわかる。このように、ある面にせん断応力が生じていれば、必ずこれに直角な面にも大きさが等しく、向きが逆のせん断応力  $\tau'$  が生じる。これをせん断応力の共役性といい、 $\tau'$  を共役せん断応力 (conjugate shearing stress) といっている。

### 曲げによるせん断応力

- K氏：第1話の図 1.21, (1.5) で示したように曲げモーメント  $M$  の変化率がせん断力  $Q$  だね。

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} \quad (8.16)$$

$M$  が変化するところには  $Q$  が、そして  $Q$  によるせん断応力  $\tau$  が発生する。断面に曲げモーメント  $M_x$  とせん断力  $Q_x$  が作用しているとき、断面の中立軸から距離  $y$  に生じるせん断応力  $\tau$  は

$$\tau = \frac{Q_x \cdot S}{b \cdot I} \quad (8.17)$$

で与えられる。 $b$  ははりの幅、 $I$  は中立軸に関する断面 2 次モーメント、 $S$  は中立軸から距離  $y$  における断面 1 次モーメント。

- コニー：(8.17) はどのようにして導出されるのかしら？
- K氏：うん、図 8.8 のように距離  $dx$  離れた 2 断面 AB, CD を考え、AB, CD 面に働くせん断力と曲げモーメントをそれぞれ  $Q_x, Q_x + dQ_x$  および  $M_x, M_x + dM_x$  としよう。

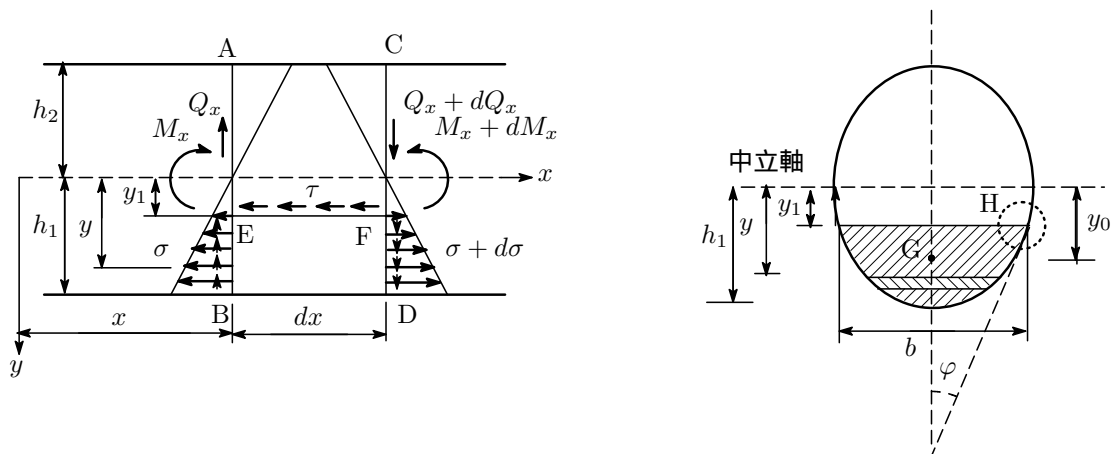


図 8.8: はりのせん断応力

次に中立軸から  $y_1$  の距離で中立面に平行な面 EF をとり、微小部分 EBDF について  $x$  方向の力のつり合いを考える。EB 面にはせん断力  $Q_x$  によるせん断応力  $\tau$  が作用しているので、EF 面に

は大きさが等しく向きが逆の共役せん断応力 $\tau$ が働くね。EB面には曲げモーメント $M_x$ による垂直応力 $\sigma$ ，FD面には $M_x + dM_x$ による $\sigma + d\sigma$ が作用しているので， $x$ 方向の力のつり合いの式は垂直応力と共役せん断力のつり合いになるから

$$\sum X = \int_{y_1}^{h_1} \{(\sigma + d\sigma) - \sigma\} dA - \tau b dx = 0$$

また，(8.6)より $\sigma = \frac{M_x}{I}y$ ， $d\sigma = \frac{dM_x}{I}y$ なので，これを上式に入れて $\tau$ を求めると

$$\tau = \frac{1}{b \cdot I} \frac{dM_x}{dx} \int_{y_1}^{h_1} y dA = \frac{Q_x}{b \cdot I} \int_{y_1}^{h_1} y dA \quad (8.18)$$

となる。 $\int_{y_1}^{h_1} y dA$ は中立軸から $y = y_1$ と $y = h_1$ の間にある部分の中立軸に関する断面1次モーメントなので $S$ と表すと(8.17)が得られる。

- コニー：う～ん， $y$ 軸方向のせん断応力を求めるのに，それと垂直な $x$ 方向の力のつり合いを利用しているところは面白いわね。ところで，断面の1次モーメント $S$ は，(8.10)より図8.8の斜線部の断面積 $A$ と中立軸から $A$ の図心 $G$ までの距離 $y_0$ の積だったわね。
- K氏：そうだね。ところではりの表面に注目しよう。境界面というのはいつも問題(?)を含んでいるものだ。一般的に考えて，はりの断面の外周が長方形ではなく曲線になっているとしよう。その曲線上の点Hに作用するせん断応力を考えると，その向きは必ず曲線の接線方向を向いていてその垂直成分が(8.17)の $\tau$ で与えられると考えなければならない。
- コニー：ちょっと天下りのね。もう少し納得がいくような説明がほしいわ。
- K氏：(少し汗をにじませながら ^^;) うん，はりの表面を含む小さな直方体を考え，その直方体に作用する応力を描くと図8.9のようになるだろう。このうち，表面付近で点線で示した表面

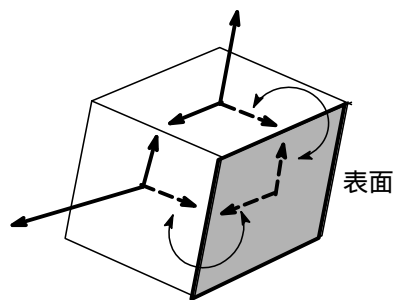


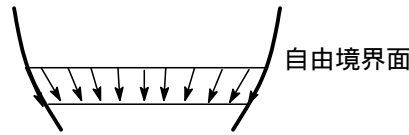
図 8.9: はりの表面付近におけるせん断応力

に垂直なせん断応力の成分が仮にゼロでないとすると，表面にも点線で示すような共役せん断応力が作用しなければならない。ところで，はりの表面にはせん断応力は作用していない - つまりTOP面だからせん断応力は働かない - と考えられるから，表面の点線で示した応力は0のはずだ。したがって，表面と直交する断面上のせん断応力は，表面のすぐ近くでは表面と平行(接線方向)でなければならないことになる。 $\tau_s$ の垂直成分が(8.17)の $\tau$ となるので

$$\tau = \tau_s \cos \varphi, \quad \tau_s = \frac{\tau}{\cos \varphi} = \frac{QS}{bI \cos \varphi} \quad (8.19)$$

。。。といった理解だけど，おかしな点に気が付いたらいつでもいいから指摘してほしい。

- コニー：そうなんだ。まっ、私なりに考えておくわね。そうすると図 8.8 の中立軸から離れたところのせん断応力の  $x$  軸に沿った分布は絵のようになっているのね。



- K 氏：そうだね。それじゃ次に  $b \times h$  の長方形断面にせん断力  $Q$  が作用しているときのせん断応力  $\tau$  を求めてみよう。(8.18) より

$$\tau = \frac{Q}{b \cdot I} \int_{y_1}^{h/2} y dA = \frac{QS}{bI}$$

$$S = \int_{y_1}^{h/2} y dA = \int_{y_1}^{h/2} y b dy = \frac{b}{8} (h^2 - 4y_1^2)$$

また、断面 2 次モーメントは (8.14) より

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$\varphi = 0$  で  $\tau = \tau_s$  であるので、せん断応力は

$$\tau = \tau_s = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh^3} (h^2 - 4y_1^2) \quad (8.20)$$

と求められる。これからせん断応力は中立軸からの距離  $y$  に関する 2 次曲線となるんだね。

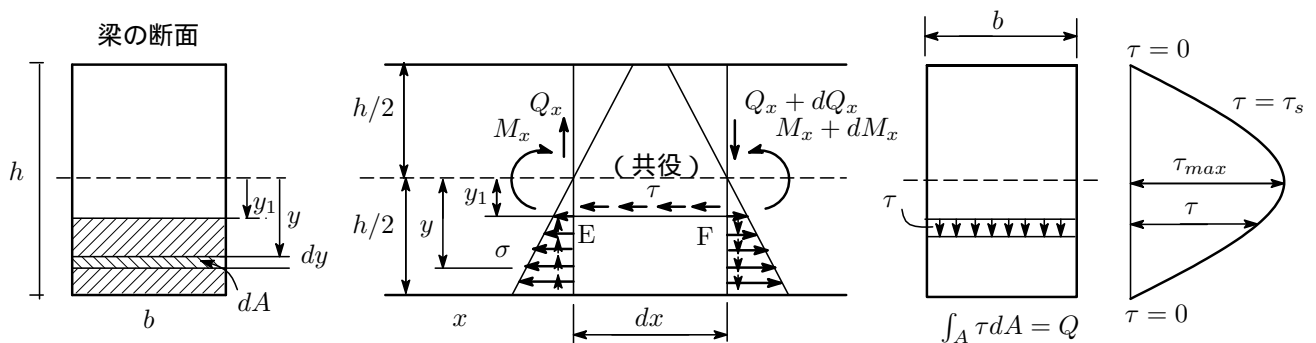


図 8.10: 長方形断面のせん断応力

せん断力  $Q$  を断面積  $bh$  で割った平均せん断応力を  $\bar{\tau} = \frac{Q}{bh}$  とすると (8.20) は

$$\tau = \tau_s = \frac{3}{2} \bar{\tau} \left( 1 - \frac{4y_1^2}{h^2} \right) \quad (8.21)$$

と表せる。せん断応力は中立軸  $y_1 = 0$  で最大値  $\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = 1.5 \bar{\tau}$  をとり、上下面 ( $y_1 = \pm h/2$ ) では  $\tau = 0$  となるね。

- コニー：なるほど。。。普通、断面積を  $A$  とした場合のせん断応力は  $Q/A$  と計算するけど、これはあくまでせん断応力の平均値だったんだ。断面に分布している  $\tau$  をすべて足し合わせるとせん

断力  $Q$  になるはずね。ちょっと確かめてみるわ。  $\int_A \tau dA$  を計算してやると  $dA = bdy$  だから。。。

$$\int_A \tau dA = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh^3} \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) bdy = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh^3} \cdot \frac{2bh^3}{3} = Q \quad (8.22)$$

たしかにせん断断力  $Q$  となるわね。

- K 氏：それじゃ半径  $r$  の円形断面におけるせん断応力の計算をやってみるかい。

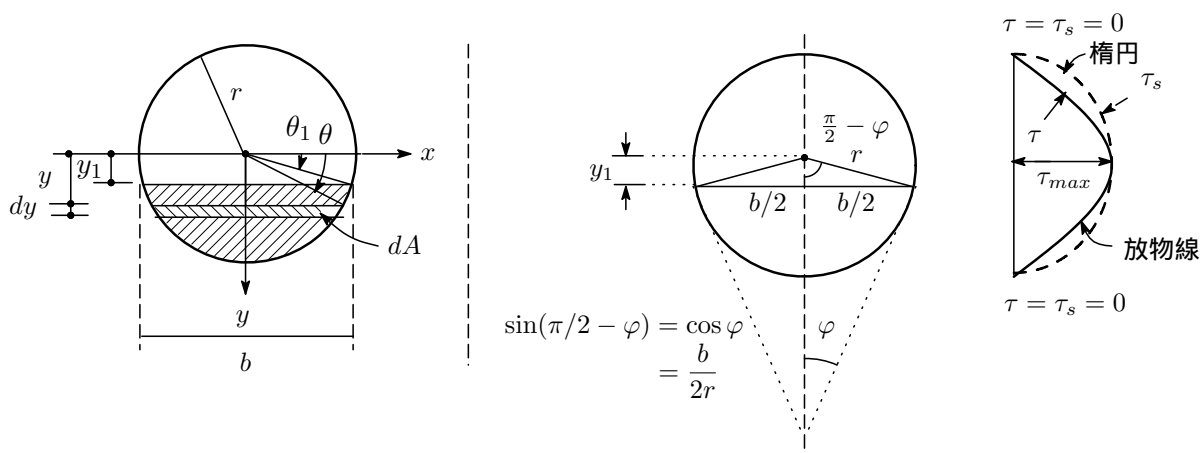


図 8.11: 円形断面のせん断応力

- コニー：了解。図 8.11 のようにとるとして、まず断面 2 次モーメントを求めておくわ。  $y = r \sin \theta$ ,  $dy = r \cos \theta d\theta$ ,  $dA = 2r \cos \theta dy = 2r^2 \cos^2 \theta d\theta$  となるので、中立軸  $x$  に関する断面 2 次モーメントは。。。 (手元の積分公式集を繰りながら)

$$I_x = \int_A y^2 dA = 2 \times \left( 2r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \right) = 4r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

また、 $b = 2r \cos \theta_1$  なので (8.18) より

$$\tau = \frac{Q}{bI} \int_y^r y dA = \frac{Q}{2r \cos \theta_1 \cdot \frac{\pi r^4}{4}} \cdot 2r^3 \int_{\theta_1}^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{4Q}{\pi r^2 \cos \theta_1} \int_{\theta_1}^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$\cos \theta = t$  とおくと  $-\sin \theta d\theta = dt$ ,  $\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\int t^2 dt = -\frac{1}{3} t^3 = -\frac{1}{3} \cos^3 \theta$  となるので

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi r^2} \cos^2 \theta_1 = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) \quad (8.23)$$

となるわ。平均せん断応力を  $\bar{\tau} = Q/\pi r^2$  とすると

$$\tau = \frac{4}{3} \bar{\tau} \left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) \quad (8.24)$$

となって、せん断応力  $\tau$  は中立軸からの距離  $y$  に関する 2 次曲線となる。最大せん断応力は  $y_1 = 0$  の中立軸上に生じて

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \bar{\tau} \quad (8.25)$$

と得られるわね。

- K氏：そうだね。ところで円形はりの外周上のせん断応力分布はどうか。
- コニー：え～っと，ちょっと待ってね。。それは (8.19) より

$$\tau_s = \frac{\tau}{\cos \phi} = \frac{24}{b} \bar{\tau} \left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) = \frac{4}{3} \bar{\tau} \left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right)^{1/2} \quad (8.26)$$

となるわね。

- K氏：そうだね。(8.26) に少し手を加えて両辺を2乗して整理してやると

$$\frac{\tau_s^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = 1, \quad \text{ただし } 1/A = 3\bar{\tau}/4, \quad 1/B = 1/r,$$

という楕円の式が得られるだろう。 $\tau$ の分布は2次曲線の放物線となるが，断面周辺の $\tau_s$ の分布は同じ2次曲線でも楕円となるんだね。 $\tau$ と $\tau_s$ の最大値はともに中立軸上 $y_1 = 0$ で生じ

$$\tau_{max} = \tau_{s \cdot max} = \frac{4}{3} \bar{\tau} \quad (8.27)$$

となる。

それじゃ最後にH型断面ばりにせん断力 $Q = 10^4 \text{N}$ が作用するときの断面のせん断応力を求める。まず断面2次モーメント $I$ を求めておく。 $I$ は大きな四角形ABCDの2次モーメントから塗部の

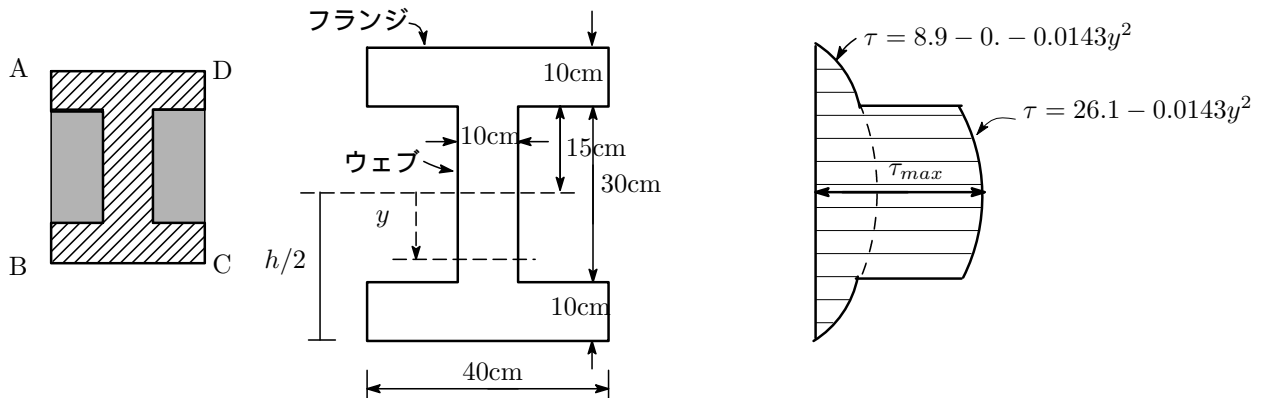


図 8.12:

小さな四角形の2次モーメントを差し引いたものになるので

$$I = \frac{40 \times 50^3}{12} - 2 \times \frac{15 \times 30^3}{12} = 3.492 \times 10^5$$

次に (8.18) より

$$\tau = \frac{Q}{bI} \int_y^{h/2} y dA$$

断面の1次モーメントは $y$ がウェブ内にある場合とフランジ内にある場合とに分けて計算しなければならない。

1)  $y$ がウェブ内にある場合

$$\int_y^{h/2} y dA = \int_y^{15} 10y dy + \int_{15}^{25} 40y dy = 9125 - 5y^2$$

$$\therefore \tau = \frac{Q}{bI} \int_y^{h/2} y dA = \frac{10^4}{10 \times 3.492 \times 10^5} \times (9125 - 5y^2) = 26.1 - 0.0143y^2$$

2)  $y$  がフランジ内にある場合

$$\int_y^{h/2} y dA = \int_y^{25} 40y dy = 12500 - 20y^2$$

$$\therefore \tau = \frac{Q}{bI} \int_y^{h/2} y dA = \frac{10^4}{40 \times 3.492 \times 10^5} \times (12500 - 20y^2) = 8.9 - 0.0143y^2$$

となる。 $\tau_{max}$  は  $y = 0$  のところで  $\tau_{max} = 26.1 \text{N/cm}^2$  となる。 は放物線状に分布するが、フランジとウェブの継ぎ目で不連続になる。

\*\*\*\*\*

以上、第8話は話題がいろいろ盛りだくさんとなってちょっと疲れただろう。こちらも少し疲れしてきたので、このあたりで切り上げよう。第9話はお約束通りカステリアーノの定理を取りあげる予定だ。それじゃお開きとしよう。

- コニー：お疲れ様でした。これから寒くなるのでお風邪を召されないように気を付けてくださいね。第9話を楽しみにしているわ。それじゃまた、さようなら。

2017.10.28

- K氏：やあ，コニー，構造力学談話もとうとう第9話に入ったね。長丁場のお付き合いそろそろ飽きてきたころじゃないかな。
- コニー：こんにちは，Kさん。第9話は確かカステリアーノの定理のお話だったわね。いままでの談話ノートをときどき読み返したりしているんだけど，飽きるということは全然ないわ。そんなことより本日のメインテーマであるカステリアーノの定理とは一体どういうものなの？
- K氏：うん，第6話，第7話では仮想仕事法や弾性曲線法，モーメントの定理で「はり」の変形を求めたね。カステリアーノの定理は「ラーメン」や「トラス」の変形までも求めることのできる一般的な方法なんだ。構造物は外力で変形されるとひずみのエネルギーが溜まるね。このひずみのエネルギーに注目して変形を調べていこうといったものなんだ。力学的な知識が要求されるけど適時補充しながら進めていくので気楽に聴いていけばいいと思う。ちなみにカステリアーノは人名でフルネームはカルロ・アルベルト・カステリアーノ (Carlo Alberto Castigliano, 1847-1884) といい，イタリアの数学者、物理学者で1873年にこの定理を確立したとのことだ。
- コニー：そうなんだ。それではお願いします。
- K氏：OK。それではぼちぼちと進めよう。

## 構造物の弾性変形

### (1) モーメントのなす仕事

- K氏：第6話でモーメントのなす仕事量  $W$  はモーメント  $M$  と回転角  $\theta$  の積  $W = M\theta$  として定義されることを説明した。モーメントは回転軸から1点  $P$  までの距離と点  $P$  に作用する力  $F$  との積なので，次元的には仕事の次元と同じだ。 $\theta$  は無次元量なので  $M\theta$  をモーメントのなす仕事量と定義してもなんら不都合はない。しかし，なにか直感的には割り切れないものを感じないかい？
- コニー：どういうこと， $M$  になんらかの無次元量を掛けたものもモーメントのなす仕事量になるんじゃないかということ。
- K氏：うん，そういう懸念も生じるじゃないかと。。しかし，この心配は口で説明するより絵を見た方が早いだろう。 $W = M\theta$  の定義の妥当性も納得できると思うけど。

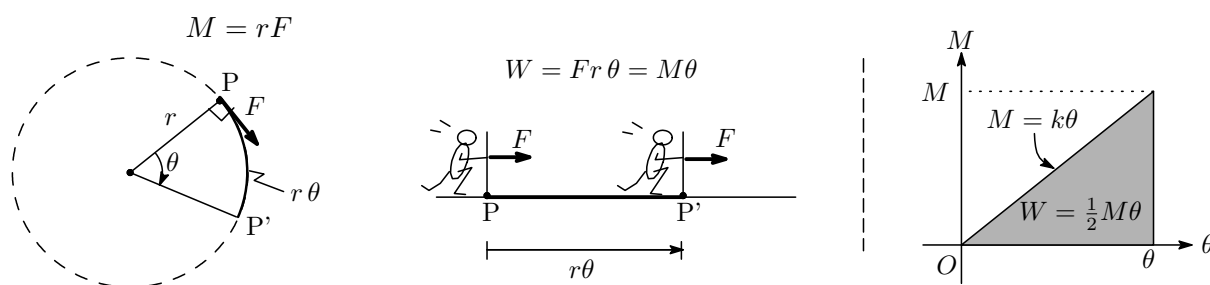


図 9.1: モーメントのなす仕事



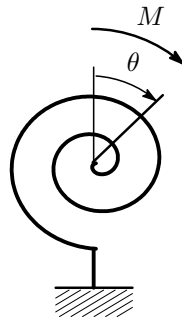
- コニー：そうね。分かりやすい絵ね。
- K氏：もし  $M$  とそれによって引き起こされる回転角  $\theta$  との間に  $M = k\theta$  という比例関係があったとすると、このときの仕事量は図 9.1 の塗りつぶした三角形の面積に等しいので

$$W = \frac{1}{2}M\theta \quad (9.1)$$

で与えられる。例えばねじりバネに力のモーメントを作用させた場合、力のモーメント  $M$  でねじりバネを  $d\theta$  回転させる仕事は

$$dW = Md\theta = k\theta d\theta$$

で表されるね。これは (6.8) の「曲げモーメントによる仕事量」の式を微分形式で表したもので、これを  $\theta$  を 0 から  $\theta$  まで積分すれば、ねじりバネに蓄えられるひずみのエネルギーが得られる。



$$W = k \int_0^\theta \theta d\theta = \frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}M\theta$$

## (2) ひずみエネルギー

### A. (圧縮・引張) 軸方向力によるひずみエネルギー

- K氏：一様な断面積  $A$ 、長さが  $\ell$  の真直棒にかかる荷重が  $P = 0$  から  $P$  まで増加したとき、フックの法則に従う弾性範囲で外力がなした仕事量を  $U_N$  としよう。 $U_N$  は図 9.2 の斜線部の三角形

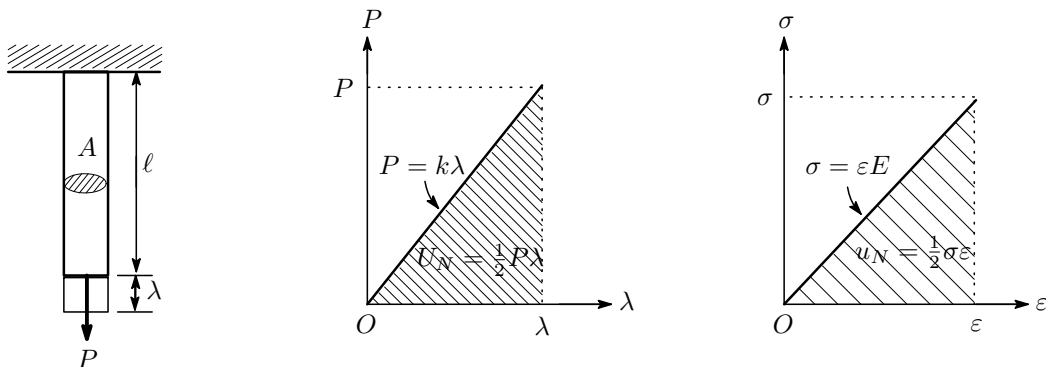


図 9.2: 荷重 - 伸び図

の面積に等しく

$$U_N = \int_0^\lambda P d\lambda = \frac{1}{2}P\lambda \quad (9.2)$$

で与えられる。棒の内部にはこの仕事量  $U_N$  だけひずみのエネルギーが蓄積される。

- コニー：(9.2) の積分を実行しなくても  $U_N$  は斜線部の三角形の面積となるので  $U_N = \frac{1}{2}P\lambda$  となるのは分かるけど、 $P$  を伸び  $\lambda$  の関数として積分を実行すればどうなるの。
- K 氏：うん、第 6 話で話したように縦ひずみを  $\varepsilon$ 、垂直応力を  $\sigma$  とすると

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\ell}, \quad \sigma = \varepsilon E = \frac{P}{A} \quad (E: \text{ヤング率}) \quad (9.3)$$

という関係があった。これから  $P$  は  $\lambda$  の関数として

$$P(\lambda) = \frac{EA}{\ell} \cdot \lambda \equiv k\lambda \quad (k = EA/\ell) \quad (9.4)$$

と得られるので、これを (9.2) に入れて積分を実行すると

$$U_N = \int_0^\lambda P d\lambda = k \int_0^\lambda \lambda d\lambda = \frac{1}{2}k\lambda^2 = \frac{1}{2}P\lambda \quad (9.5)$$

となる。(9.3) より  $\lambda = \frac{P\ell}{AE}$  であるので、これを (9.2) に入れると

$$U_N = \frac{P^2\ell}{2AE} = \frac{1}{2}k\lambda^2 \quad (9.6)$$

と表せる。ここで、ひずみエネルギー  $U_N$  を変位  $\lambda$  で微分するとその変位に対応する  $P$  となることに注意しておこう。これはカステリアーノの第 1 定理の帰結だが、詳しい話はまた後ほど。

$$\frac{\partial U_N}{\partial \lambda} = P \quad (9.7)$$

さて、 $d\lambda = \ell d\varepsilon$  であるので  $U$  は次のようにも表せる。

$$U_N = \int_0^\varepsilon EA\ell \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2}EA\ell \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{A\ell}{E} \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon V \quad (V = A\ell: \text{真直棒の体積}) \quad (9.8)$$

また、単位体積当たりのひずみのエネルギーを  $u_N$  とすると

$$u_N = \frac{U}{V} = \frac{1}{2E} \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (9.9)$$

単位体積当たりのひずみのエネルギー  $u$  を変位  $\varepsilon$  で微分すると

$$\frac{\partial u_N}{\partial \varepsilon} = \sigma \quad (9.10)$$

となって、(9.7) と同様の関係式がでてくる。

ところで断面積  $A$  が一様でなく  $A(x)$  で表される場合、単位体積当たりのひずみエネルギーは

$$u_N = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2E} \left( \frac{P}{A(x)} \right)^2 \quad (9.11)$$

で、棒全体のひずみエネルギーは  $u_N$  を棒全体にわたって積分したものになるので

$$U_N = \int_0^\ell u_N \cdot A(x) dx = \int_0^\ell \frac{P^2}{2EA(x)} dx \quad (9.12)$$

と表される。

さて、第4話で話をしたけど、トラス構造では各部材に軸方向力だけが働くという特長があったね。この力で各部材にはひずみエネルギーが溜まるわけだ。そこで図9.3に示す荷重 $P$ が作用している断面積 $A$ 、長さ $L$ の部材からなる正三角形トラスの全ひずみエネルギーを求めてみよう。コニーやってみるか。

- コニー：余り気が進まないけど ... 復習を兼ねてやってみるわ。まず反力を求めるのね。支点Bはローラー支点だから鉛直方向の反力 $V_B$ しか生じない。力のつり合いから

$$\sum X = H_A + P = 0, \quad \sum Y = V_A + V_B = 0, \quad \sum M = L \times V_A + L \times P \cos 30^\circ = 0$$

$$\therefore H_A = -P, \quad V_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}P, \quad V_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

次に各部材の軸方向力を求めなければならない。。

- K氏：うん、第4話で説明した切断法を使えばいいね。切断法というのは
  - 1) 軸方向力を求めようとする部材のある箇所切断する。
  - 2) 切断した部材の軸方向力を設定する。
  - 3) 力のつり合いの式から軸方向力を求める。

というものだった。

- コニー：そうだったわね。まず(1)のように切断し節点Aでの軸方向力を $N_{AB}$ 、 $N_{AC}$ として力のつり合いの式を立てると

$$\begin{cases} \sum X = H_A + N_{AB} + N_{AC} \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y = V_A + N_{AC} \sin 60^\circ = 0 \end{cases} \quad \therefore N_{AB} = \frac{P}{2}, \quad N_{AC} = P \quad (\text{圧縮力})$$

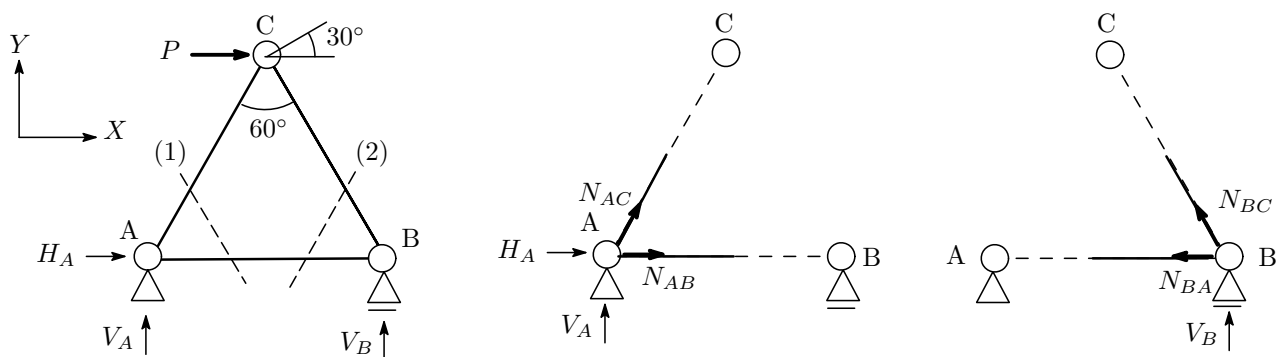


図 9.3: トラス構造

次に(2)のように切断して軸方向力を $N_{BA}$ 、 $N_{BC}$ とすると力のつり合いから

$$\begin{cases} \sum X = -N_{BA} - N_{BC} \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y = V_B + N_{BC} \sin 60^\circ = 0 \end{cases} \quad \therefore N_{BA} = \frac{P}{2} \quad (\text{圧縮力}), \quad N_{BC} = -P \quad (\text{引張力})$$

と求められる。トラス構造の全ひずみエネルギーは各部材のひずみエネルギーを足し合わせたの  
 もになり、それぞれ  $U_{AB}$ ,  $U_{AC}$ ,  $U_{BC}$  とすると (9.6) より

$$U_N = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = \frac{L}{2AE} (N_{AB}^2 + N_{AC}^2 + N_{BC}^2) = \frac{9P^2L}{8AE}$$

となるわね。

- K 氏：そうだね。これを一般化して  $n$  本の部材からなるトラスの  $i$  番目の部材力を  $S_i$ ，断面積を  $A_i$ ，部材の長さを  $L_i$ ，ヤング率を  $E_i$  とするとトラスの中に蓄えられるひずみエネルギー  $U$  は

$$U_N = \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2 L_i}{2A_i E_i} \quad (9.13)$$

と表せる。ここで

$$\rho_i = \frac{L_i}{A_i E_i} \quad (9.14)$$

という記号を導入すると (9.13) は

$$U_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_i^2 \rho_i \quad (9.15)$$

と書くこともできる。

- コニー：部材力ってのはじめてでてきた言葉ね。軸方向力のことではないの？
- K 氏：うん、軸方向力は断面力の一つだね。トラスの場合、断面力は軸方向力だけなので断面力と呼ばずに「部材力」といっているんだ。中身はご指摘の通りだけど。

## B. せん断力によるひずみエネルギー

- K 氏：断面（面積  $A$ ）にせん断力  $Q$  が作用し、せん断ひずみ  $\gamma$  が生じているときのせん断ひずみエネルギー  $U_Q$  を求めよう。

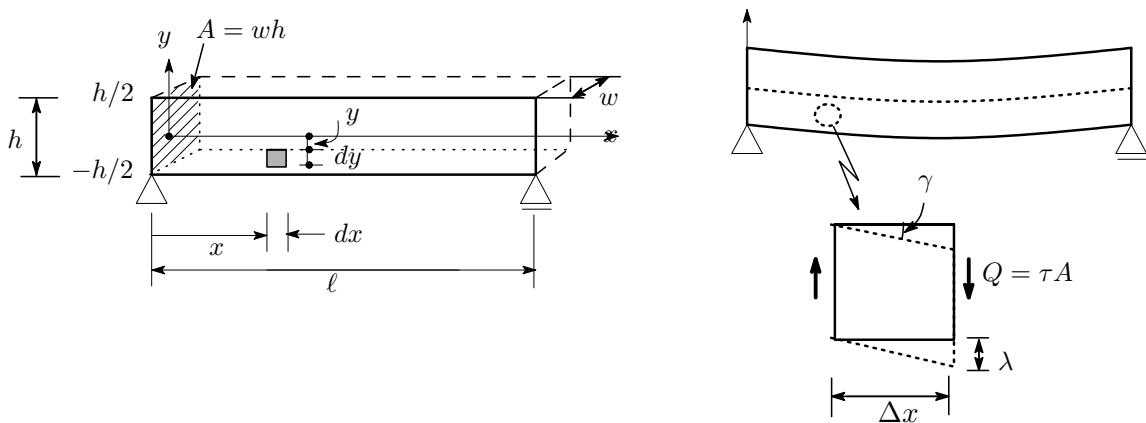


図 9.4: せん断力による歪エネルギー

せん断応力  $\tau$  とせん断ひずみ  $\gamma$  の間には ( $\gamma$  が小さい範囲で)

$$\tau = G\gamma, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (9.16)$$

というフックの法則の関係が成立し，比例定数  $G$  をせん断弾性係数という。 $\gamma$  の単位は rad， $G$  の単位は  $\text{N}/\text{mm}^2$ 。(9.16) より

$$\tau = \frac{Q}{A} = G \frac{\lambda}{\Delta x} \longrightarrow \lambda = \frac{\Delta x}{GA} Q, \quad \therefore d\lambda = \frac{\Delta x}{GA} dQ$$

となるので，せん断力によるひずみエネルギー  $U_Q$  は

$$U_Q = \int_0^\lambda Q d\lambda = \frac{\Delta x}{GA} \int_0^Q Q dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \Delta x}{GA} \quad (9.17)$$

単位体積当たりのひずみエネルギーを  $u_Q$  とすると

$$u_Q = \frac{U_Q}{A \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{GA^2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma \quad (9.18)$$

となる。この式は (9.9) と同じ形をしているね。

### C. 曲げによるひずみエネルギー

- K 氏：はりの曲げによって蓄えられるひずみエネルギー  $U_M$  を求めよう。図 6.2 も参照してほしい。いま，長さが  $\ell$  のはりの微小部分  $dx$  について考える。微小部分  $dx$  に作用する曲げモーメントを  $M(x)$  とする。部材断面の回転角を  $d\theta$  とすると (6.2)，(6.5) より

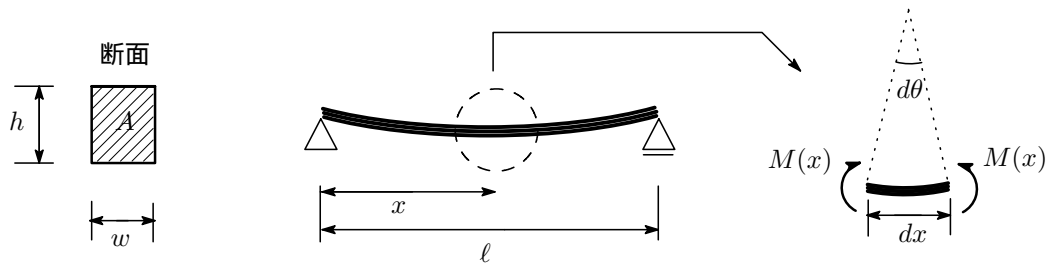


図 9.5: 曲げによる歪エネルギー

$$d\theta = \frac{M(x)}{EI} dx \quad (EI: \text{曲げ剛性})$$

このとき，はりに蓄えられるひずみエネルギー  $U_M$  は (9.1) より

$$dU_M = \frac{1}{2} M(x) d\theta = \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EI} dx$$

となるね。はり全体に蓄えられるエネルギーは，全長にわたって積分すればいいので

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M(x)^2}{EI} dx \quad (9.19)$$

となる。少し理論的な話が続いたのでうんざりしたかもしれない。具体的な問題をやってみよう。

- コニー：肩が凝りそうな問題かしら？
- K 氏：そうでもないよ。公式の使い方の練習だな。第 2 話で単純ばりの任意の 1 点に集中荷重が作用しているケースを取り扱ったね。このはりのひずみのエネルギーを求めようというものだ。

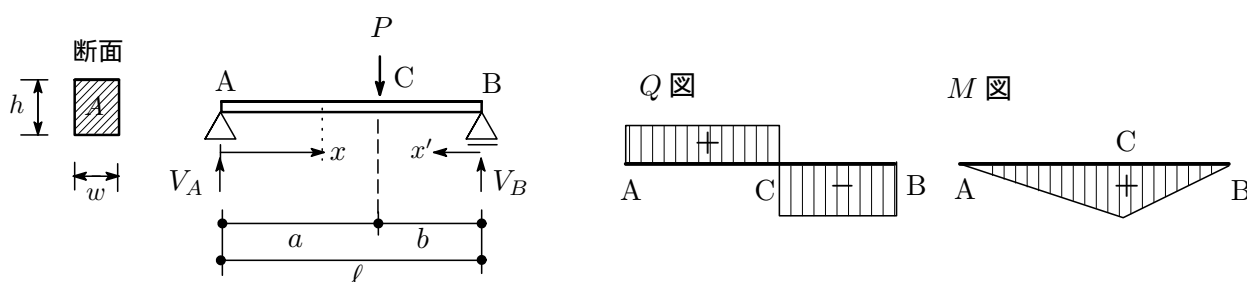


図 9.6: 単純ばりの歪エネルギー

支点 A からの距離  $x$  における部位でのせん断力  $Q(x)$ ，曲げモーメント  $M(x)$  は次のように与えられた。

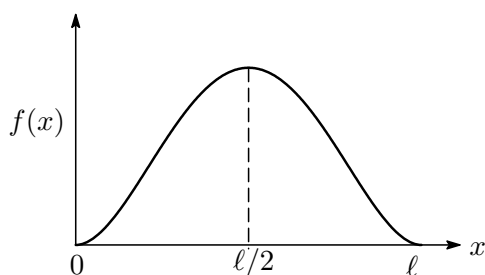
$$\begin{array}{ll} \text{せん断力 } Q & \text{曲げモーメント } M \\ \text{AC 間 } Q(x) = \frac{b}{\ell}P & M(x) = \frac{b}{\ell}Px \quad (0 \leq x \leq a) \\ \text{BC 間 } Q(x) = -\frac{a}{\ell}P & M(x) = \frac{a}{\ell}P(\ell - x) \quad (a \leq x \leq \ell) \end{array}$$

まず，(9.19) を使って曲げモーメント  $M(x)$  によるひずみエネルギー  $U_M$  を求めよう。

a) 曲げモーメントによるひずみエネルギー：  $M(x)$  は C 点を境に変わるので積分は  $0 \leq x \leq a$  と  $a \leq x \leq \ell$  の 2 つの範囲に分けて実行すればいい。面倒な積分だけど機械的に計算するだけで

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{EI} \left( \frac{b}{\ell}Px \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^\ell \frac{1}{EI} \left( \frac{a}{\ell}P(\ell - x) \right)^2 dx = \frac{a^2 b^2 P^2}{6EI\ell} \quad (9.20)$$

と求められる。  $U_M$  の大体の傾向を知るために  $f(x) = x^2(\ell - x)^2/\ell$  という関数形を調べると  $x = \ell/2$  の中央で最大値をとることが分かる。したがって曲げモーメントによる歪エネルギーが



最大値をとるのは荷重  $P$  がはりの中央に作用したときで，(9.20) に  $a = b = \ell/2$  を代入すると

$$U_M^{max} = \frac{P^2 \ell^3}{96EI} \quad (9.21)$$

と得られる。

- コニー：確かににはりの真ん中に載ったとき，はりが一番曲がるものね。はりに溜まる歪エネルギーは最大になるわけね。
- K 氏：次にせん断力  $Q(x)$  によるひずみエネルギー  $U_Q$  を求めよう。

b) せん断力によるひずみエネルギー：第 8 話「曲げによるせん断応力」の項も参照。微小体積

$dA \cdot dx$  のひずみエネルギーは (9.18) より

$$dU_Q = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma dA dx$$

したがって全体のひずみエネルギーは

$$U_Q = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_A \frac{\tau^2}{G} dA dx \quad (9.22)$$

となるね。ところで、せん断応力  $\tau$  は (8.20) より

$$\tau = \frac{1}{Ah^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot \frac{Q(x)}{A}$$

で与えられた。これを (9.22) に入れると

$$U_Q = \frac{1}{2GA^2} \int_0^\ell Q(x) dx \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dA$$

$dA = w dy$  なので変数  $y$  についての積分を先に計算すると

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dA = w \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dy = \frac{6}{5} wh = \frac{6}{5} A$$

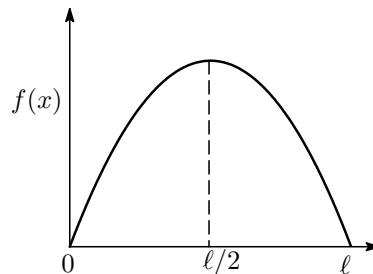
となるので、 $U_Q$  は

$$U_Q = \frac{3}{5GA} \int_0^\ell Q(x) dx \quad (9.23)$$

で表されることになる。せん断力  $Q(x)$  は AC 間で  $Q(x) = bP/\ell$  , BC 間で  $Q(x) = -aP/\ell$  なので

$$U_Q = \frac{3}{5GA} \left\{ \int_0^a \left( \frac{bP}{\ell} \right)^2 dx + \int_0^b \left( -\frac{aP}{\ell} \right)^2 dx' \right\} = \frac{3abP^2}{5GA\ell} \quad (9.24)$$

と求められる。 $U_Q$  の大体の傾向を知るために  $f(x) = x(\ell - x)/\ell$  という関数形を調べると  $x = \ell/2$  の中央で最大値をとることが分かる。



(9.24) に  $a = b = \ell/2$  を代入すると

$$U_Q^{max} = \frac{3\ell P^2}{20AG} \quad (9.25)$$

- コニー：え～っと、たしか第6話で、“曲げモーメントのなす仕事はせん断力のなす仕事よりはるかに大きいので、仮想仕事法において曲げモーメントによる仕事だけを考えればよい”といったお話があったわね。いま、 $U_M$  と  $U_Q$  が求められたので大きさの比較をするとどの程度になるの？

- K氏：いい質問だ。(9.20)と(9.24)を比較すればいいのだが，前者にはヤング率と断面の2次モーメント  $I$  が含まれ，後者はせん断係数  $G$  が含まれているのですぐには比較できないので，ヤング率  $E$  とせん断弾性係数  $G$  の間に成立する次の関係式を使う。 $\nu$  をポアソン比として

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\nu = -\varepsilon'/\varepsilon, \quad \varepsilon' : \text{横ひずみ度} \quad \varepsilon : \text{縦ひずみ度}) \quad (9.26)$$

$\nu$  は弾性限界内では材料固有の定数となり  $0 \sim 0.5$  の範囲をとる。これから  $G$  は  $E$  の  $1/3 \sim 1/2$  の大きさとなることが分かる。いま，材料のポアソン比が  $\nu = 0.3$  とすると  $G = (5/13)E$ 。また，このはりの断面2次モーメントは  $I = wh^3/12 = Ah^2/12$  だね。これらの関係を利用すると  $U_Q$  は

$$U_Q = \frac{13}{100} \cdot \frac{abh^2 P^2}{EI\ell} \quad (9.27)$$

と表せ， $U_Q$  と  $U_M$  の比をとると

$$\frac{U_Q}{U_M} = \frac{39h^2}{50ab}$$

となる。とくに  $a = b = \ell/2$  のときは

$$\frac{U_Q}{U_M} = 3.12 \left( \frac{h}{\ell} \right)^2$$

はりの高さ  $h$  とはりの全長  $\ell$  との比を  $h/\ell = 1/10$  とすれば  $U_Q/U_M \doteq 0.03$  となる。通常のはりでは  $h/\ell < 1/10$  であるから，はりのひずみエネルギーを計算するときにはせん断力の影響は無視できるというわけだ。

- コニー：なるほどね。
- K氏：それでは最後にカステリアーノの定理に進もう。

### カステリアーノの定理

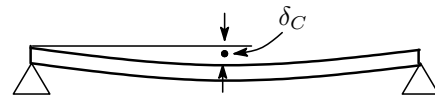
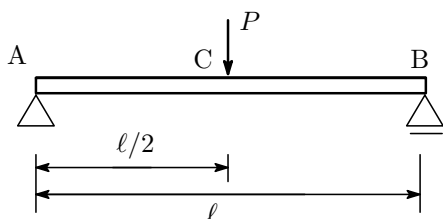
- K氏：カステリアーノの定理には第1定理と第2定理の2つある。簡単に紹介しておこう。

1) カステリアーノの第1定理：

「ひずみエネルギーを外力が作用している点の変位で微分したものは外力に等しい」

公式的に書くと

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (9.28)$$





長さが  $\ell$  の単純ばりの中央に荷重  $P$  が作用しているとき、ひずみエネルギーとたわみは (9.21), (7.19) で与えられている

$$U = \frac{P^2 \ell^3}{96EI}, \quad \delta_C = \frac{P\ell^3}{48EI} \longrightarrow U = \frac{24EI}{\ell^3} \delta_C^2$$

$U$  を  $\delta_C$  で微分すると

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_C} = \frac{48EI}{\ell^3} \delta_C = P$$

となって、荷重  $P$  が得られる。

2) カステリアーノの第2定理:

「ひずみエネルギーをその点に作用している外力で微分したものは、その点での変位に等しい」

第1定理と逆の関係になっているね。公式的に書くと

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}, \quad \theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \quad (9.29)$$

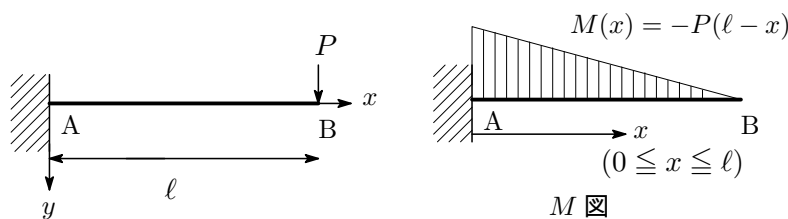
上の単純ばりのケースに適用すると

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P\ell^3}{48EI} = \delta_C$$

となるね。

それでは例題に当たってこよう。

1) コニー、眠気覚ましに下図の片持ちのばりの B 点でのたわみ  $y_B$  をカステリアーノの第2定理を使って求めてごらん。片持ちばりの自由端に荷重  $P$  が作用しているケースだ。図は図 7.3 を再掲した。



- コニー：ちょっととうとうしかけたけど、目が覚めるわね。まず、ひずみエネルギーを求めなくては。ひずみエネルギーは曲げモーメントによるものだけを考えればいいのね。 $x$  の距離での曲げモーメントは  $M(x) = -P(\ell - x)$  なのでひずみエネルギーは (9.19) より

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{P^2(\ell - x)^2}{EI} dx = \frac{\ell^3 P^2}{6EI}$$

B 点のたわみ  $\delta_B$  はカステリアーノの第2定理から

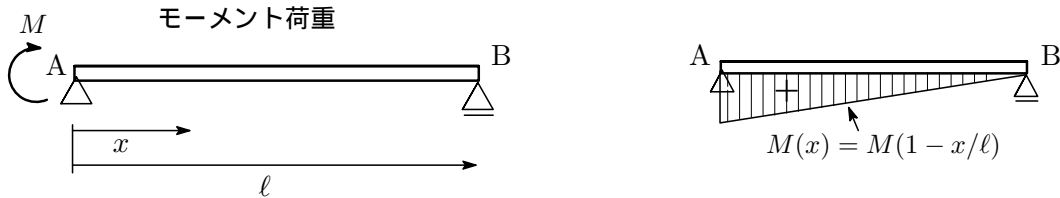
$$\delta_B = \frac{\partial U_M}{\partial P} = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (9.30)$$

となって (7.15) と一致する。

- K氏：OK。

2) 次に単純ばりの支点 A にモーメント荷重  $M_0$  が作用している場合, A 点におけるたわみ角  $\theta_A$  をカステリアーノの第 2 定理を使って求めよう。支点 A から距離  $x$  の位置の曲げモーメントは (6.17) より

$$M(x) = M \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$



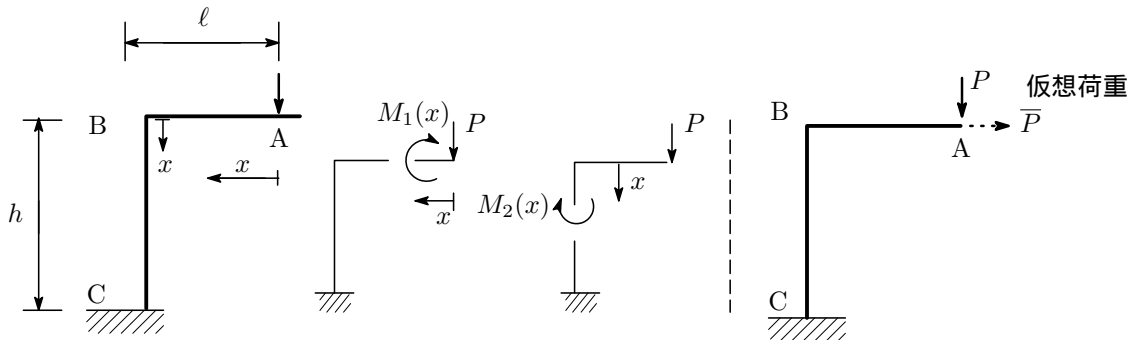
カステリアーノの第 2 定理よりたわみ角  $\theta_A$  は

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{\partial U_M}{\partial M} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{M(x)^2}{EI} \right) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial M} \left\{ M^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^\ell M \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{M\ell}{3EI} \end{aligned}$$

と求められる。

3) 片持ちばり型ラーメンにおいて, 曲げによるひずみエネルギー  $U_M$  と荷重点 C の鉛直変位  $\delta_{AV}$  と水平変位  $\delta_{AH}$  を求めよう (軸方向力によるたわみエネルギーは無視)。

AB 間, BC 間でそれぞれ仮想切断し, 部材 AB, BC 間それぞれの力のつり合いの式を立て, 曲げモーメントを求める。その結果,



$$\text{AB 間 } M_1 = -Px \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

$$\text{BC 間 } M_2 = -P\ell \quad (0 \leq x \leq h)$$

曲げによる片持ちラーメン全体のひずみエネルギーを  $U$  とすると

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_1^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^h \frac{M_2^2}{EI} dx = \frac{(3h + \ell)P^2 \ell^2}{6EI} \end{aligned}$$

$\delta_{AV}$  はカステリアーノの第 2 定理より

$$\delta_{AV} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{(3h + \ell)P\ell^2}{3EI}$$

次に水平変位  $\delta_{AH}$  を求める。この場合の手順は、荷重  $P$  の代わりに仮想荷重  $\bar{P}$  を水平方向に作用させて曲げモーメントを求め、ひずみエネルギーを計算する。そしてカステリアーノの第2定理より水平方向のたわみを求めてから  $\bar{P} \rightarrow 0$  として  $\delta_{AH}$  を算出する。

$$\begin{aligned} \text{AB間} \quad M_1 &= -Px \quad (0 \leq x \leq \ell) \\ \text{BC間} \quad M_2 &= -P\ell - \bar{P}x \quad (0 \leq x \leq h) \end{aligned}$$

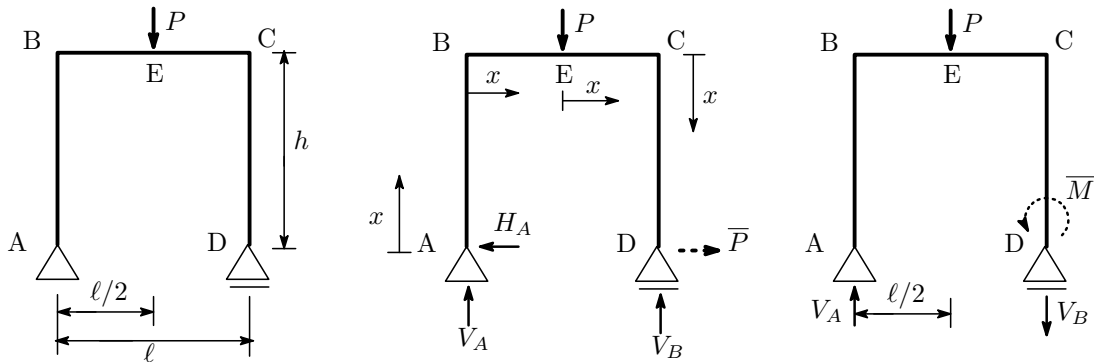
これから

$$U = \frac{(\ell^3 + 3h\ell^2)P^2 + 3h^2\ell P\bar{P} + h^3\bar{P}^2}{6EI} \quad (9.31)$$

$\delta_{AH}$  はカステリアーノの第2定理より

$$\delta_{AH} = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} \Big|_{\bar{P} \rightarrow 0} = \frac{(3P\ell h^2 + 2h^3 X)}{6EI} \Big|_{\bar{P} \rightarrow 0} = \frac{P\ell h^2}{2EI}$$

4) 図に示すようにラーメン構造の部材 BC の中点に鉛直荷重  $P$  が作用しているとき、D 点における水平変位  $\delta_{DH}$  とたわみ角  $\theta_D$  を求めよう。この場合、D 点に仮想荷重  $\bar{P}$ 、仮想モーメント荷重  $\bar{M}$  を作用させ、最後に  $\bar{P} \rightarrow 0$ 、 $\bar{M} \rightarrow 0$  とすればよいわけだね。まず、D 点に  $\bar{P}$  を作用させて水平変位  $\delta_{DH}$  を求めよう。各支点 A、B での反力を求めてから各部材に生じる曲げモーメントを求める。支点の反力を  $V_A$ 、 $V_D$ 、 $H_A$  とすると



$$\begin{aligned} \sum X &= -H_A + \bar{P} = 0 \quad \therefore H_A = \bar{P} \\ \sum Y &= P - (V_A + V_D) = 0 \quad \therefore V_A + V_D = P \\ \sum M_A &= -\ell V_D + \frac{\ell}{2}P = 0 \quad \therefore V_D = V_A = \frac{P}{2} \end{aligned}$$

したがって、各部材に生じる曲げモーメントは

$$\begin{aligned} \text{AB間} \quad M_1(x) &= xH_A = \bar{P}x \\ \text{BE間} \quad M_2(x) &= xV_A + hH_A = \frac{P}{2}x + h\bar{P} \\ \text{EC間} \quad M_3(x) &= -xP + \left(\frac{\ell}{2} + x\right)V_A + hH_A = -Px + \left(\frac{\ell}{2} + x\right)\frac{P}{2} + h\bar{P} \\ \text{CD間} \quad M_4(x) &= (h-x)\bar{P} \end{aligned}$$

となる。ひずみエネルギーの総量は

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_i(x)^2}{2EI} dx \\ &= \int_0^h \frac{M_1(x)^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell/2} \frac{M_2(x)^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell/2} \frac{M_3(x)^2}{2EI} dx + \int_0^h \frac{M_4(x)^2}{2EI} dx \end{aligned}$$

カステリアーノの第2定理より  $\delta_{DH} = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}}$  としていままでやったように直接求めてもよいが、積分計算が面倒だ。そこで通常は合成関数の微分法を活用して

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{P}} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial U}{\partial M_i} \frac{\partial M_i}{\partial \bar{P}} = \frac{\partial U}{\partial M_1} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U}{\partial M_2} \frac{\partial M_2}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U}{\partial M_3} \frac{\partial M_3}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U}{\partial M_4} \frac{\partial M_4}{\partial \bar{P}}$$

と展開しておく。そうすると各項は次の積分計算に置き換わる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial M_1} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{P}} &= \int_0^h \frac{M_1}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^h \frac{\bar{P}}{EI} x^2 dx = \frac{h^3 \bar{P}}{3EI} \\ \frac{\partial U}{\partial M_2} \frac{\partial M_2}{\partial \bar{P}} &= \int_0^{\ell/2} \frac{M_2}{EI} \frac{\partial M_2}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left( \frac{P}{2} x + h\bar{P} \right) h dx = \frac{h\ell(\ell + 8h\bar{P})}{16EI} \\ \frac{\partial U}{\partial M_3} \frac{\partial M_3}{\partial \bar{P}} &= \int_0^{\ell/2} \frac{M_3}{EI} \frac{\partial M_3}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left\{ -Px + \left( \frac{\ell}{2} + x \right) \frac{P}{2} + \bar{P}h \right\} h dx = \frac{h\ell(P\ell + 8h\bar{P})}{16EI} \\ \frac{\partial U}{\partial M_4} \frac{\partial M_4}{\partial \bar{P}} &= \int_0^h \frac{M_4}{EI} \frac{\partial M_4}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^h \frac{1}{EI} \bar{P}(h-x)(h-x) dx = \frac{h^3 \bar{P}}{3EI} \end{aligned}$$

これから

$$\delta_{DH} = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} \Big|_{\bar{P}=0} = \frac{h\ell^2 P}{8EI}$$

次にたわみ角  $\theta_D$  を求める。支点 D に仮想モーメント  $\bar{M}$  を作用させ、反力を求める。

$$\begin{aligned} \sum Y &= P - V_A + V_D = 0 \quad \therefore V_A - V_D = P \\ \sum M_A &= \frac{\ell}{2} P + \bar{M} - \ell V_D = 0 \quad \therefore V_D = \frac{\bar{M}}{\ell} - \frac{P}{2}, \quad V_A = \frac{\bar{M}}{\ell} + \frac{P}{2} \end{aligned}$$

各部材に生じる曲げモーメントは

$$\begin{aligned} \text{AB間} \quad M_1(x) &= 0 \\ \text{BE間} \quad M_2(x) &= xV_A = \frac{\bar{M}}{\ell} x + \frac{P}{2} x \\ \text{EC間} \quad M_3(x) &= -xP + \left( \frac{\ell}{2} + x \right) V_A = -\frac{P}{2} x + \frac{\bar{M}}{2} + \frac{P\ell}{4} + \frac{\bar{M}}{\ell} x \\ \text{CD間} \quad M_4 &= \bar{M} \end{aligned}$$

したがって、カステリアーノの第2定理より

$$\begin{aligned} \theta_D &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left( \frac{\bar{M}}{\ell} x + \frac{P}{2} x \right) \left( \frac{x}{\ell} \right) dx \\ &\quad + \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{2} x + \frac{\bar{M}}{2} + \frac{P\ell}{4} + \frac{\bar{M}}{\ell} x \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{\ell} \right) dx + \int_0^h \frac{1}{EI} \bar{M} dx \\ &= \frac{(2\bar{M} + P\ell)\ell}{48EI} + \frac{(7\bar{M} + P\ell)\ell}{24EI} + \frac{h\bar{M}}{EI} \end{aligned}$$

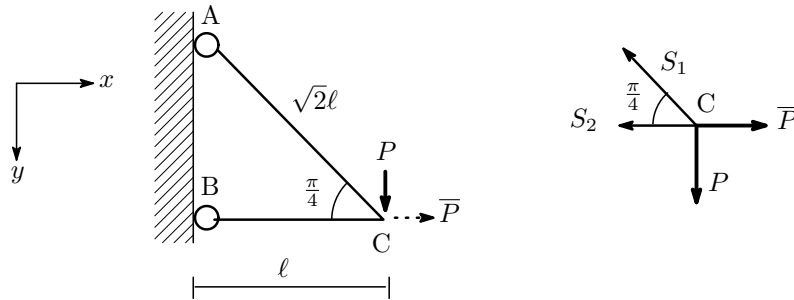
ここで  $\bar{M} \rightarrow 0$  とすると

$$\theta_D = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

5) 図のように点 A, B がピン接合で壁に固定された 2 本の部材からなるトラスがあり, 点 C に荷重  $P$  が作用してる。点 C の鉛直方向の変位  $\delta_{CV}$  と水平方向の変位  $\delta_{CH}$  を求めよう。まず, 点 C に仮想荷重  $\bar{P}$  を作用させ, 各部材の部材力  $S_1, S_2$  を求める。点 C での力のつり合いより

$$\begin{aligned}\sum X &= \bar{P} - S_2 - S_1 \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y &= P - S_1 \sin 45^\circ = 0 \quad \therefore S_1 = \sqrt{2}P, S_2 = \bar{P} - P\end{aligned}$$

トラス全体のひずみエネルギーは (9.13) より



$$U_N = \frac{\sqrt{2}\ell S_1^2}{2AE} + \frac{\ell S_2^2}{2AE} = \frac{\ell}{2AE} \left\{ 2\sqrt{2}P^2 + (\bar{P} - P)^2 \right\}$$

したがってカステリアーノの第 2 定理より

$$\begin{aligned}\delta_{CV} &= \frac{\partial U_N}{\partial P} \Big|_{\bar{P}=0} = \frac{(1 + 2\sqrt{2})P\ell}{AE} \\ \delta_{CH} &= \frac{\partial U_N}{\partial \bar{P}} \Big|_{\bar{P}=0} = -\frac{P\ell}{AE}\end{aligned}$$

これから点 C は下向きに  $\delta_{CV}$ , 左向きに  $\delta_{CH}$  変位することが分かる。

### カステリアーノの第 2 定理の導出

- K 氏：最後にカステリアーノの第 2 定理の導出をしておこう。まず, マクスウェルの相反定理の話からはいることにする。話は少し抽象的になるけど, 気楽に聴き流せばいいだろう。

1) マクスウェルの相反定理：弾性体の 2 点  $A_1, A_2$  を考える。いま, 点  $A_1$  に荷重  $P_1$  が作用して点  $A_1$  は  $A'_1$  に変位したとし,  $P_1$  方向の変位成分を  $a_{11}P_1$  とする。この状態において点  $A_2$  に荷重  $P_2$  を作用させ, その結果, 点  $A_1$  が荷重  $P_1$  の方向へ  $a_{12}P_2$  だけ変位したとしよう。

- 1) 点  $A_1$  において荷重  $P_1$  により  $P_1$  の方向へ  $a_{11}P_1$  だけ移動

2) 点  $A_1$  において荷重  $P_2$  により  $P_1$  の方向へ  $a_{12}P_2$  だけ移動

なお, 比例係数  $a_{ij}$  の最初の添え字  $i$  は変位点の位置, あとの添え字  $j$  は荷重点の位置を表すものとする。さて, 荷重  $P_1, P_2$  による点  $A_1$  の変位を  $\delta_1$  とすると,  $\delta_1$  は  $a_{11}P_1$  と  $a_{12}P_2$  との重ね合わせになる。

$$\delta_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 \quad (9.32)$$

点  $A_2$  においてもまったく同じことがいえるので, 点  $A_2$  における  $P_2$  方向の変位を  $\delta_2$  とすると

$$\delta_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 \quad (9.33)$$

となる。変位が  $\delta_1, \delta_2$  から  $d\delta_1, d\delta_2$  だけ増加するときのひずみエネルギーの増加  $dU$  は

$$dU = P_1d\delta_1 + P_2d\delta_2 \quad (9.34)$$

となる。

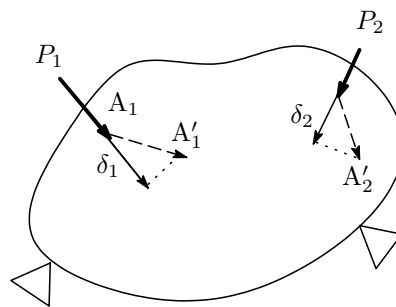


図 9.7: 荷重と変位

(9.32), (9.33) より

$$d\delta_1 = a_{11}dP_1 + a_{12}dP_2, \quad d\delta_2 = a_{21}dP_1 + a_{22}dP_2$$

これを (9.34) に入れて整理すると

$$dU = (a_{11}P_1 + a_{21}P_2)dP_1 + (a_{12}P_1 + a_{22}P_2)dP_2 \quad (9.35)$$

となるね。ところでひずみエネルギーは  $P_1, P_2$  の連続関数  $U = U(P_1, P_2)$  なので,  $U$  の全微分は

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2}dP_2$$

と表される。この式と (9.35) との比較より

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = a_{11}P_1 + a_{21}P_2, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 \quad (9.36)$$

を得る。(9.36) の第 1 式を  $P_2$  で, 第 2 式を  $P_1$  で偏微分すると

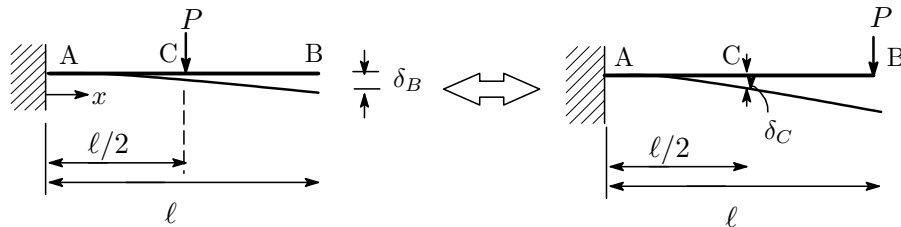
$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_1 \partial P_2} = a_{21}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial P_2 \partial P_1} = a_{12} \quad (9.37)$$

$U$  は連続関数なので微分の順序に無関係であることから

$$a_{21} = a_{12} \quad (9.38)$$

の関係が得られる。これをマクスウェルの相反定理という。一般に  $n$  個の荷重が作用した場合にも同様の関係 ( $a_{21} = a_{12}$ ,  $a_{31} = a_{13}$ , ...) が成立する。

- コニー：荷重としてモーメント荷重が作用すれば変位は回転角になるのかしら。
- K氏：その通りだ。力やモーメント荷重をあわせて一般化力，作用方向の移動量（距離や回転角）を一般化変位といっているね。
- コニー：そうなんだ。ところで式の展開はともかくとして，マクスウェルの相反定理の意味するところをかみ砕いて説明していただける？
- K氏：了解。 $a_{12}$  は  $A_2$  点に単位荷重  $P_2 = 1$  が作用したために点  $A_1$  に生じる  $P_1$  方向の変位だね。 $a_{21}$  は点  $A_1$  に単位荷重  $P_1 = 1$  が作用したために点  $A_2$  に生じる  $P_2$  方向の変位だ。これが相等しいということの意味する。つまり点  $A_2$  に単位荷重  $P_2 = 1$  が作用したために点  $A_1$  に生じる  $P_1$  方向の変位は，点  $A_1$  に単位荷重  $P_1 = 1$  が作用したために点  $A_2$  に生じる  $P_2$  方向の変位に等しいということなんだ。次の例題を考えよう。長さ  $\ell$  の片持ちばり AB の中点 C に荷重  $P$  が作用する場合，点 B におけるたわみ  $\delta_B$  を求めるという問題だ。自由端 B に荷重  $P$  が作用する場合，



中点 C におけるたわみ  $\delta_C$  は (7.9) より

$$\delta_C = \frac{P}{6EI} (3\ell - x)x^2 \Big|_{x=\ell/2} = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

マクスウェルの相反定理より，このたわみ  $\delta_C$  は点 C に荷重  $P$  が作用するために点 B のたわみ  $\delta_B$  に等しいことになる。

2) カステリアーノの第 2 定理：(9.36) に (9.38) を入れて整理すると

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = a_{11}P_1 + a_{21}P_2 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 = \delta_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 = \delta_2$$

の関係式が得られる。これを一般化力と一般化変位に拡張して表すと

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i, \quad \frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i \quad (9.39)$$

となる。これはカステリアーノの第 2 定理だね。ここらあたりで第 9 話を終ろう。盛りだくさんの内容で大変だったと思うけどゆっくり咀嚼していけばいいと思う。おかしい議論を見つけたら是非優しく指摘してほしい。第 10 話以降は気力と興味が湧いてきたらまた再開するかもしれない。

- コニー：大変お疲れさまでした。いままでのノートを読み返してみるわ。もしおかしいところを見つけたら連絡するわね。今年の冬は寒くなりそうだからお体を大切にしてください。それではまた～，さようなら。

## 参考文献

- 1) 浅野清昭：図説・優しい構造力学，学芸出版，2008年.
- 2) 阪口理，須賀好富，窪田敏行：テキスト建築構造力学1，学芸出版，1994年.
- 3) 太田和彦・藤井大地：はじめて学ぶ建築構造力学，森北出版，2008年.
- 4) 望月重，濱本卓司：改訂版・建築構造のための力学演習，鹿島出版会，2003年.
- 5) 平修二：現代材料力学，オーム社，昭和52年.
- 6) 有光隆：図解でわかるはじめての材料力学，技術評論社，2012年.