

構造力学談話 Ver.2

KENZOU

2018.5.17

構造力学談話 Ver.2 をお送りする。暖かくなりはじめた3月の下旬あたりから、次第に冬眠から目覚め、ぼんやりと机に向かう頻度がふえはじめた。すると、少し気がかりにしていた構造力学談話のレポートを見直そうかという気が湧いてきた。小生の理解不足による不明瞭なところが散見されたり、冗長すぎて話がくどいなど、小骨がのどに刺さっているようで落ち着かない。そこで話ができるだけスッキリ・明解(?)に進むように全話を見直し、不静定構造物の話題を第10話として追加して仕上がったが Ver2 という次第。もっとも話の展開がスッキリしたといっても、それはあくまで筆者の思い込みで、おかしな議論や不明瞭な点がなくなったとは言い切れない(面倒くさくなって多少手を抜いたところもある)。そのような箇所を見つけられたら、ご自分で乗り越えていくか、お手数でも一報いただけるとありがたい。場合によっては Ver3 が登場するかもしれない。。。 それでは第1話から始めよう。

第1話.

平面構造物のつり合い(1)

平面構造物の種類と概要

平面構造物は構造形式によってラーメン構造、トラス構造、アーチ構造やシェル構造といったようにいろいろある。ラーメン構造のラーメンは「枠」とか「額縁」を意味するドイツ語の Rahmen からきていて、英語で rigid frame というように柱と梁を剛接合した骨組のこと。トラス構造はピン接合した部材を三角形に組み合わせた骨組を単位に構成されているもので、英語で truss と書くが、これは“くる”とか“縛る”という意味だ。ピンはドアなどについている蝶番(ちょうつがい)をイメージす

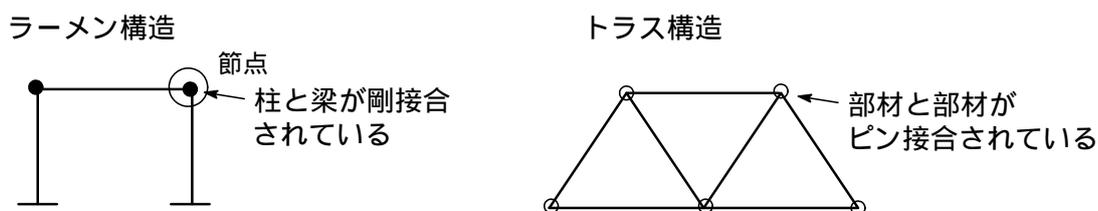


図 1.1: ラーメン構造とトラス構造

ればいだろう。アーチ構造は半円形に弧を描いた構造で、煉瓦作りの旧建築の出入り口などによく見かけるし、パリの凱旋門などは代表的なもの。シェル構造というのは薄い局面を貝殻のように外殻に用いた構造のことだ。いずれにしても、構造物が安定に存在するためには、力のつり合いがとれていることが大前提となる。

力のつり合い

(1) 構造物の節点・支点と反力

節点

構造物の骨組を構成する部材と部材を継手を節点といい、節点には剛節点とピン節点の2種類がある。節点は反力を考えるときに大切なポイントとなるので少し詳しく説明する。

- ・ 剛節点：節点部分の回転が拘束されて、その角度が変化しないものをいう。節点部分が固定されて移動も回転もできないので、部材相互間で水平方向、垂直方向の力の移動に加えて、モーメントを伝えられる。
- ・ ピン節点：ヒンジとか滑節点ともいうが、節点部分が自由に回転できるものをいう。^{ちょうがい}蝶番を思い浮かべられたい。ピン節点はモーメントは伝達できないが、水平方向、垂直方向の力の移動は伝えられる。

支点

地盤あるいは他の支持構造物と構造物の接点を支点という。支点は構造物に作用した力を地盤に伝える役割を果たす。構造物が支点を通して地盤に力を作用させれば、構造物は当然地盤からの反作用力を受ける。この反作用力を支点反力とか単に反力と呼んでいる。一般に反力は構造物の変位が固定されている点に生じる力で、水平反力、鉛直反力、モーメントがある。支点はこのすべての力に抵抗するのではなく、支点の種類によってある特定の力にのみ抵抗する構造になっている。

- ・ 固定支点：「水平」「鉛直」「回転(モーメント)」すべての力に抵抗。したがって、反力は水平、鉛直、回転に対して生じる。拘束度は $r = 3$ 。
- ・ ピン支点：「水平」と「鉛直」方向の力に抵抗。したがって、反力は水平方向と鉛直方向に生じる。回転は可能な支点なので拘束度は $r = 2$ 。
- ・ ローラー支点：「鉛直」方向の力にだけ抵抗。反力は鉛直方向だけに生じる。回転や水平方向に移動が可能なので拘束度は $r = 1$ 。

拘束度は反力の数 h と一致し、構造物の自由度の数より拘束度が少なければ不安定となるし、逆に多

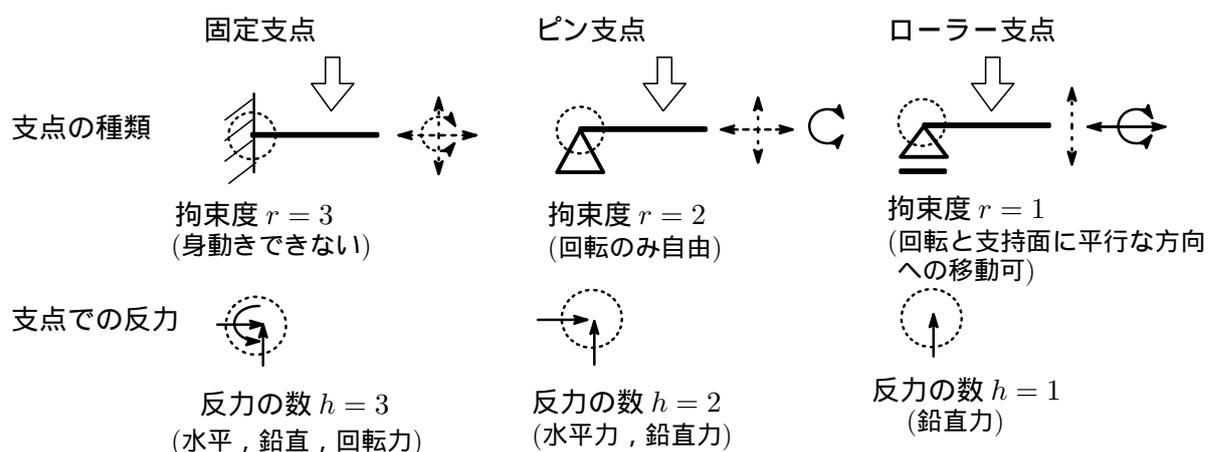


図 1.2: 支点的種類と反力

ければ安定となる。

(2) 構造物の分類

構造物は安定構造物と不安定構造物に分類される。不安定構造物は外力によって容易に形を崩したり移動したりする構造物のことで、一方、安定構造物は移動も回転もしない構造物で、これはさらに静定構造物と不静定構造物に分類される。

静定構造物

力のつり合いの式(「水平」、「鉛直方向」の力と「力のモーメント」のつり合いの三元連立一次方程式)だけで反力が求められる構造物。力とモーメントの正負の符号は次のようにしておく。

$$\text{力のつり合いの式} \quad \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0$$

力の正負

モーメントの正負

時計回り 反時計回り

図 1.3: 力のつり合い

不静定構造物

力のつり合いの3つの条件式だけでは反力が求められない構造物。このため構造物の変形状態まで考えた式が必要となる。不定性構造物の話題は第10話で取りあげている。

断面力

部材に荷重などの外力が加わるとそれに反発して部材内部に内力が発生する。この内力を応力という。内力の総和は当然ゼロでなければならない。そうでないと部材は破断してしまう。したがって、応力は大きさが等しく、向きが反対な一对の力という性質をもつ。応力は部材の任意の断面に働く力なので構造力学分野では特に断面力といている(断面力の詳細は第6話、第8話を参照されたし)。

断面力には、図1.4に示すように「軸方向力(N)」、「せん断力(Q)」、「曲げモーメント(M)」の3種類あり、その正負の符号の付け方も決められている。

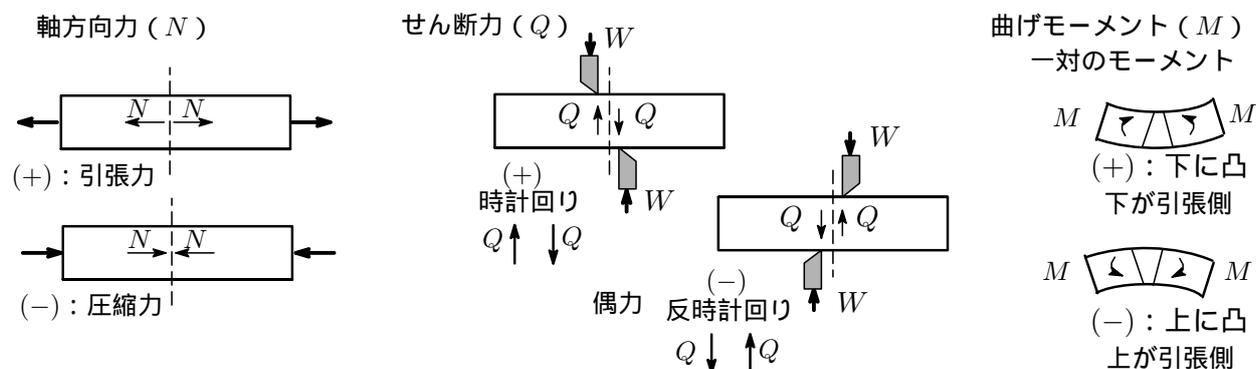


図 1.4: 断面力の種類

ただし、曲げモーメントに関しては正式な正負の符号の付け方はないが、下側に引張(下に凸)が生

じる場合を“ + ”, 上側に引張が(上に凸)が生じる場合を“ - ”としている¹。

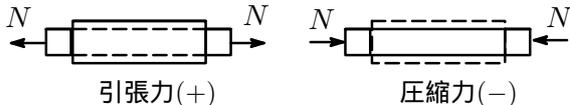
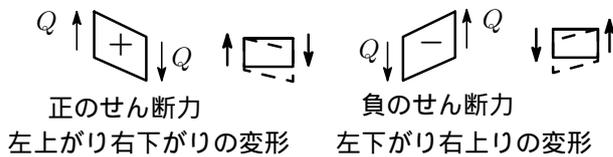
種類	特長	部材に作用する力
軸方向力(N)	外力が部材の軸方向に作用するときの応力。 引張力を正, 圧縮力を負とする。	 引張力(+) 圧縮力(-)
せん断力(Q)	外力が部材の材軸に垂直な方向に作用するときの応力。 せん断力は偶力によって生じる。 時計回りは正, 反時計回りは負。	 正のせん断力 左上がり右下がりの変形 負のせん断力 左下がり右上りの変形
曲げモーメント(M)	外力が部材の材軸に垂直な方向に作用するときの応力。 正・負符号の正式な付け方はないが図に示すようにしておく。	 正の曲げモーメント 下に凸(+) 負の曲げモーメント 上に凸(-)

図 1.5: 断面力の種類と特長

(3) 構造物の反力と断面力

これから構造物の反力と断面力の求め方の話に入っていくが, 断面力を求めるには仮想切断という手法を使うので, まずその説明から入ることにする。

仮想切断と断面力

荷重 W が作用している静的安定状態にある単純ばり²を考えよう。突然はりの一部分が壊れて突然飛びだしたりしないことは経験的に知っているが, これは, はりのどの部分も静的な安定状態にあるからで, 外力 W に抗して支点 A, B に反力 V_A, V_B が生じ, かつ部材内部の任意の位置にも力の均衡を

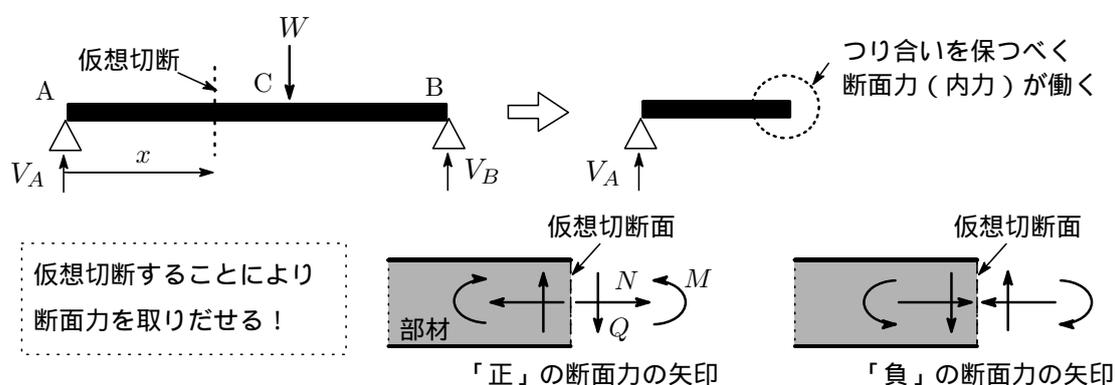


図 1.6: 仮想切断

保つべく内力が生じている。内力は外部からは分からないが, はりの任意の個所で仮想的に切断してやると, その断面に働いている内力(断面力)を取りだすことができる。断面力は図 1.6 に見るように作用反作用の関係で対になって発生するので, 正負の符号は必ず 1 対のペアの力で考える。軸方向

¹京菓子の「八橋」は上に凸だから負。正は「逆さ八つ橋」と覚えるのも一つの方法。

²ピン支点とローラー支点で支えられている梁。

力 N は、部材が引張られる場合を「正」、圧縮される場合を「負」、せん断力 Q は、ペアーの力が時計回りに働く場合を「正」、反時計回りに働く場合を「負」と定める。なお、曲げモーメント M に関しては正式な正負の符号の付け方はなく、ここでは図 1.6 に示す方向を正の方向としておく。

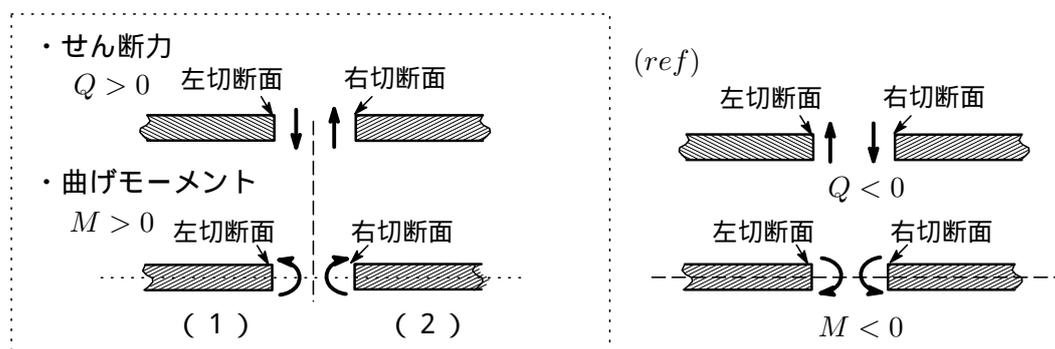


図 1.7: 仮想切断面と断面力の矢印の設定 (N は省略)

お待たせしました。いよいよ反力と断面力の計算に入っていこう。

1. 片持ちばり

1 - 1 . 集中荷重のケース

自由端 A 点に鉛直下方に 2 kN の荷重が掛かっている片持ちばりの反力と断面力を求めよう (図 1.8)。

(1) 反力

固定端 B 点には反力 V_B とモーメント M_B が生じる。水平方向の外力はないので水平反力 H_B は生じない。これらの反力を”正の向き”になるように矢印を書き込む³ (図 1.8 右図参照)。力のつり合い

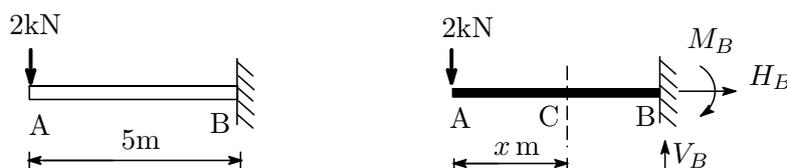


図 1.8: 片持ち梁と集中荷重

の式を立てると

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -2 + V_B = 0 \quad \therefore H_B = 0, V_B = 2 \text{ kN}$$

次に B 点回りのモーメントのつり合いの式より

$$\sum M = -2 \times 5 + M_B = 0 \quad \therefore M_B = 10 \text{ kNm} \quad (1.1)$$

いま、B 点まわりのモーメントのつり合いを考えたが、はりには回転しないので B 点以外でのモーメントのつり合いを考えても一向にかまわない。力がつり合っているときはどの点に関してもモーメント

³はりに働くすべての力(外力, 反力, 断面力)を矢印で描いた図を FBD (自由体図: Free Body Diagram) という。なお, 図 1.8 には断面力が描かれていない。自由体(じゆうたい, 英: free body)とは、外力を受ける物体に対してその一部分を仮想的に切り離して考えたものである。外力を受ける物体には内力が発生し、自由体はその内力を受けて運動や変形をする。物体にかかる外力が釣り合い状態にあるとき、自由体にかかる内力も釣り合いの状態にある(Wiki)。

の総和はゼロになる。ただ、うまく点を選ばないと計算が少し面倒になる。たとえば A 点から x m 離れた位置 C 点回りでのモーメントのつり合いを考えると

$$\sum M = -2 \times x - (5 - x) \times V_B + M_B = 0$$

といった次第。 $V_B = 2$ を入れると $M_B = 10$ と求まる。

(2) 断面力

片持ちばり任意の位置 C で仮想切断し、左側の梁の切断面の断面力を求める。片持ちばりに作用するすべての力を描いた自由体図が図 1.9。

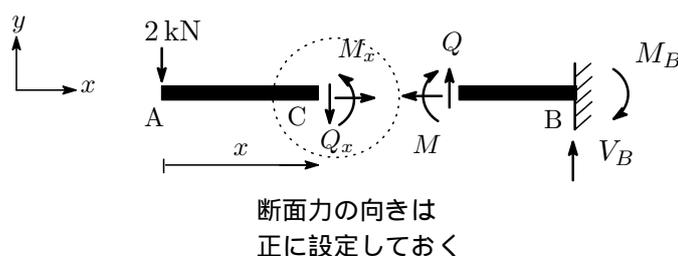


図 1.9: 片持ちばり 1 点荷重の自由体図

自由端 A から x の距離の位置でのせん断力を Q_x とする⁴と、鉛直方向の力のつり合いの式より

$$\sum Y = -2 - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = -2$$

Q_x は位置に関係なく一定値 $Q = -2$ kN をとる。次に、曲げモーメントを M_x とすると、モーメントのつり合いの式より

$$\sum M = -2 \times x - M_x = 0 \quad \therefore M_x = -2x \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A 点 } (x = 0) \quad M = 0 \text{ kNm} \\ \text{B 点 } (x = 5) \quad M = -10 \text{ kNm} \end{array} \right.$$

曲げモーメントは位置によって直線的に変化する。

断面力を図示したものをせん断力図とか曲げモーメント図というが、ここでは Q 図、 M 図として図 1.10 に示す。図中、プラスマイナス符号の設定の仕方はいろいろの流儀があるようだが、ここでは Q

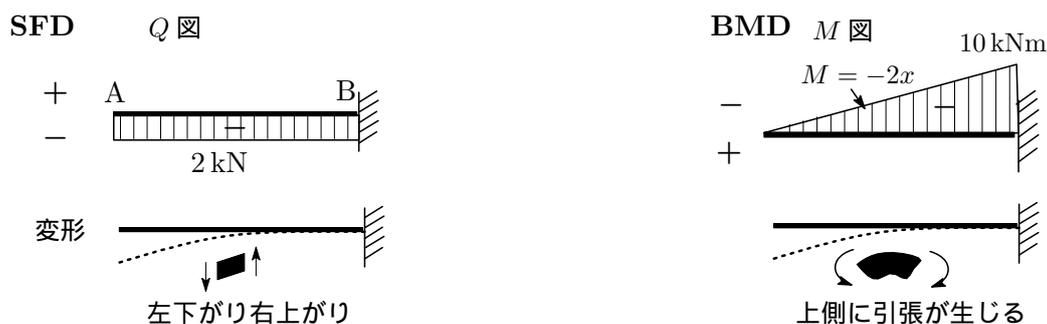


図 1.10: 片持ち梁の断面力

図は上方を (+), 下方を (-) に, M 図は上方を (-), 下方を (+) としておく。

⁴固定端 B から考えると M_B を考慮する必要があり計算が面倒になる。

補足：片持ちばりの自由端側から考えたが，固定端 B 側から考えてみよう。B 点の反力を V_B, M_B として力のつり合いより

$$\sum Y = V_B + Q'_x = 0 \quad \therefore Q'_x = -2$$

C 点回りのモーメントのつり合いの式より

$$\sum M = -(5-x) \times V_B + M_B + M'_x = 0, \quad \therefore M'_x = -2x$$

となって，同じ結果が得られるがモーメントのつり合いで M_B が登場し計算が少し面倒になる。

1 - 2 . 分布荷重のケース

a) 等分布荷重

片持ちばり全体に均一に 20kN/m の荷重がかかった分布荷重を考える。等分布荷重ははりの中点 M に働く集中荷重⁵に置き換えて考えることができる。

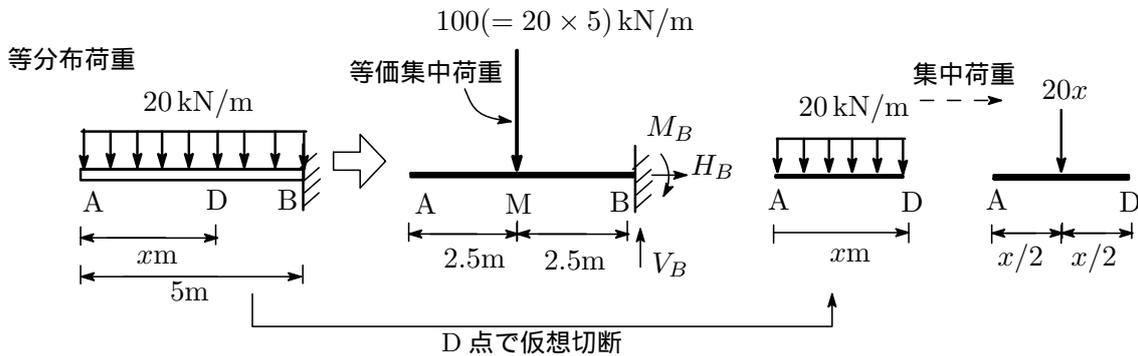


図 1.11: 片持ち梁と等分布荷重

(1) 反力

固定端 B での反力を V_B, H_B, M_B とすると，力のつり合いの式は

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -100 + V_B = 0, \quad \sum M = -100 \times 2.5 + M_B = 0$$

これから $H_B = 0, V_B = 100\text{ kN}, M_B = 250\text{ kNm}$ と求められる。

(2) 断面力

断面力は自由端 A 側から考える。A 点から任意の距離 x の点 D で仮想切断し，断面力を求める。このとき，長さ x のはり AD が受ける荷重は $20x$ で AD の中点に集中荷重として作用する。力のつり合いの式より

$$\sum X = 0 + H_D = 0, \quad \sum Y = -20x - Q_x = 0, \quad \sum M = -20x \times (x/2) - M_x = 0$$

$$\therefore Q_x = -20x \begin{cases} A \text{ 点 } (x=0) & Q=0 \\ B \text{ 点 } (x=5) & Q=-100 \end{cases}, \quad M_x = -10x^2 \begin{cases} A \text{ 点 } (x=0) & M=0 \\ B \text{ 点 } (x=5) & M=-250 \end{cases}$$

と求められる。

⁵1 点に質量が集中している点を重心という。

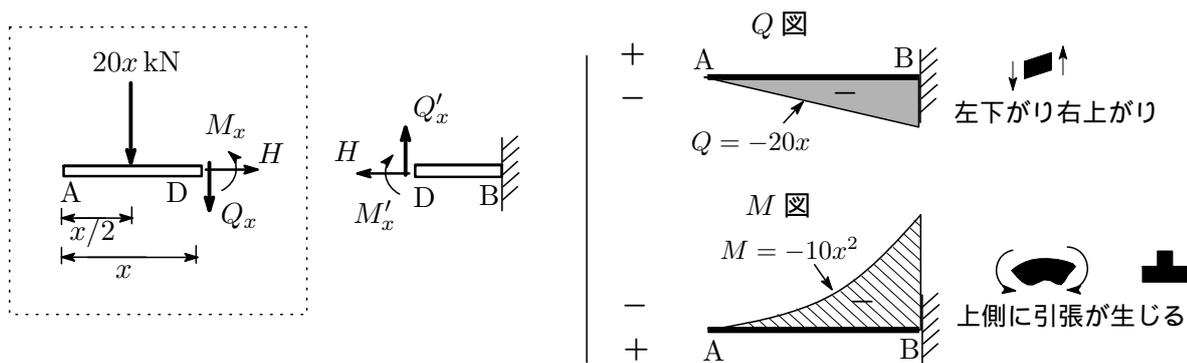


図 1.12: 片持ち梁・等分布荷重と断面力

補足：曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x の間に成り立つ有用な関係式を紹介しよう。

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (1.2)$$

(1.2) を積分すれば

$$M_x = \int Q_x dx \quad (1.3)$$

せん断力 Q_x を求めることができれば、あとはその積分で曲げモーメント M_x が分かるので大変役に立つ。この証明は第 1 話の最後でやろう。

ex.1：長さが 5m の片持ち梁があり、自由端 A から 2m の幅で分布荷重 2kN/m が作用している。反力と断面力を求めよ。

ans. 固定端 B のモーメントを M_B とする。分布荷重は A 点から 1m 離れた位置に集中荷重 $2 \times 2 = 4$ kN

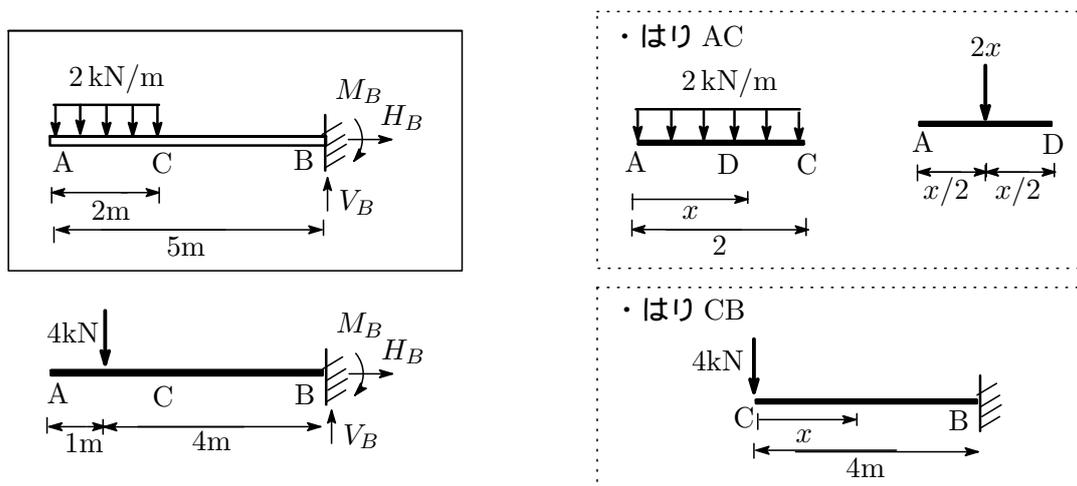


図 1.13: 片持ち梁・等分布部分荷重

として作用していると考えればいいので、力のつり合いの式は

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -2 \times 2 + V_B = 0, \quad \sum M = -4 \times 4 + M_B = 0$$

これから $H_B = 0$, $V_B = 4$ kN, $M_B = 16$ kNm と求められる。

次に C 点で仮想切断して断面力を求める。はり AC 部には先ほどの等分布荷重の計算結果がそのま

ま使え，AC間の任意の位置 x ($0 \leq x \leq 2$) でのせん断力は $Q_x = -2x$ ，曲げモーメントは $M_x = -x^2$ となる。はり CB ($2 \leq x \leq 5$) に発生する断面力は，C 点に 4kN の外力が作用していると考えると，最初にやった計算結果が使えて $Q_x = -4$ kN, $M_x = -4x$ kNm。

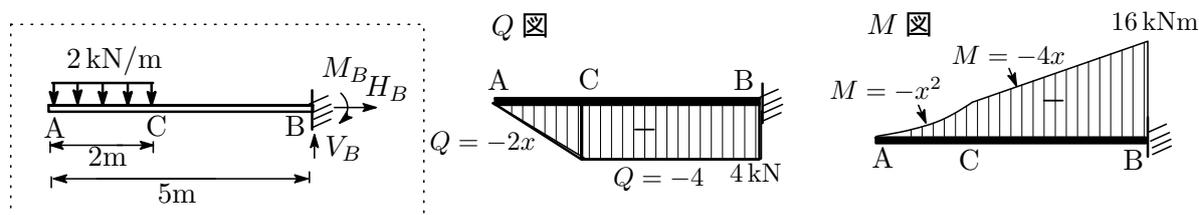


図 1.14: 片持ち梁・部分等分布荷重

b) 等変分布荷重

等変分布荷重というのは，はりの上に均質な直角三角形の重りを載せたものをイメージすればいい。全長 6m の片持ちはり AB に $W = 6 \times 12 \times (1/2) = 36$ kN の全荷重が載っている。

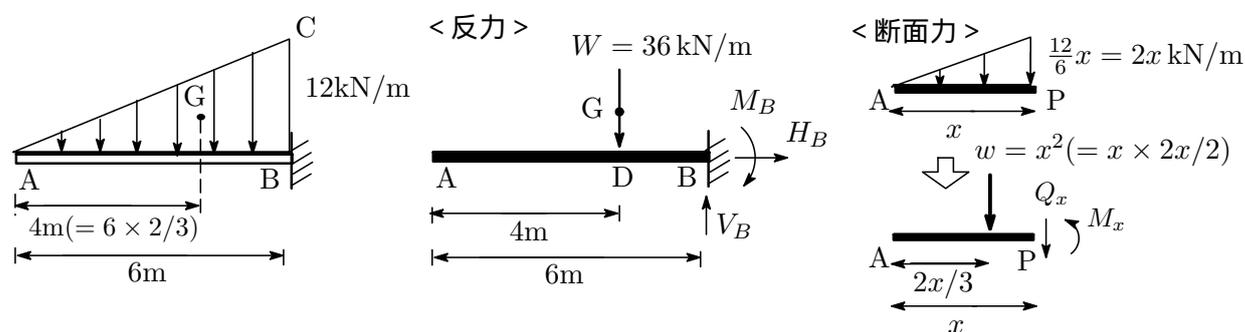


図 1.15: 片持ち梁・等変分布部分荷重

(1) 反力

全荷重は直角三角形 ABC の重心 G に集中しているのだから，重心からはり AB に垂線をおろした交点 D に集中荷重 W が作用していることになる。したがって反力は力のつり合いの式

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -36 + V_B = 0, \quad \sum M = -36 \times 2 + M_B = 0$$

より $H_B = 0$, $V_B = 36$ kN, $M_B = 72$ kNm と求められる。

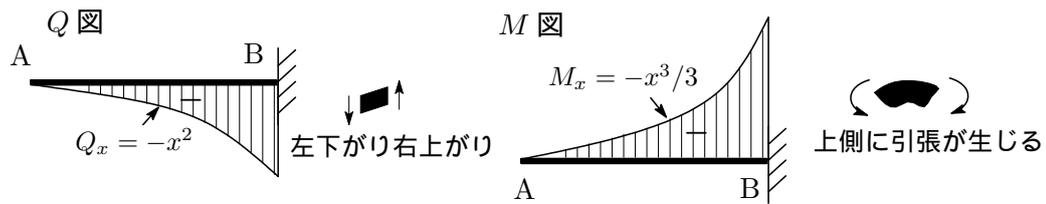
(2) 断面力

自由端 A 点から距離 x の位置 P での断面力を Q_x , M_x とする。AP に載っている荷重を w とすると $w = x \times 2x/2 = x^2$ で A 点から距離 $2x/3$ の位置に集中荷重として作用する。

力のつり合いの式から

$$\sum Y = -w - Q_x = -x^2 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = -x^2 \begin{cases} A \text{ 点 } (x=0) & Q = 0 \\ B \text{ 点 } (x=6) & Q = -36 \end{cases}$$

$$\sum M = -(x - 2x/3) \times w - M_x = 0, \quad \therefore M_x = -x^3/3 \begin{cases} A \text{ 点 } (x=0) & M = 0 \\ B \text{ 点 } (x=6) & M = -72 \end{cases}$$

図 1.16: 片持ち梁・等変分布部分荷重の Q 図・ M 図

1 - 3 . 2点荷重のケース

はりの2点 A, C に 2kN と 3kN の荷重がかかっている場合の反力と断面力を求める。

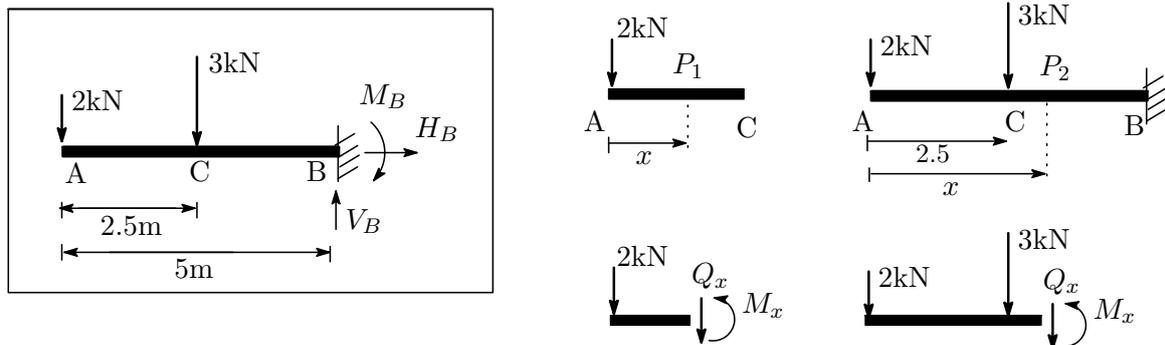


図 1.17: 片持ち梁・2点荷重

(1) 反力

反力を V_B, H_B, M_B とすると, 力のつり合いの式

$$\sum X = 0 + H_B = 0, \quad \sum Y = -2 - 3 + V_B = 0, \quad \sum M = (-2 \times 5) + (-3 \times 2.5) + M_B = 0$$

から $H_B = 0, V_B = 5 \text{ kN}, M_B = 17.5 \text{ kNm}$ となる。

(2) 断面力

はりを C 点で仮想切断し AC と CB に分けて考える。せん断力は力のつり合いの式から

$$\sum Y = -2 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = -2 \quad (0 \leq x \leq 2.5)$$

曲げモーメントは点 P_1 に関するモーメントのつり合いから

$$\sum M = -2 \times x - M_x = 0, \quad \therefore M_x = -2x \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A 点 } (x = 0) \quad M = 0 \\ \text{C 点 } (x = 2.5) \quad M = -5 \end{array} \right.$$

A 点 ($x = 0$) では $M = 0$, C 点 ($x = 2.5$) では $M = -5$ となる。

次に CB 間の断面力だが, C 点には 3kN の荷重が作用するとすると力のつり合いから

$$\sum Y = -2 - 3 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = -5 \quad (2.5 \leq x \leq 5)$$

曲げモーメントは点 P_2 に関する力のモーメントのつり合いから

$$\sum M = -x \times 2 - (x - 2.5) \times 3 - M_x = 0, \quad \therefore M_x = -5x + 7.5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{C 点 } (x = 2.5) \quad M = -5 \\ \text{B 点 } (x = 5) \quad M = -17.5 \end{array} \right.$$

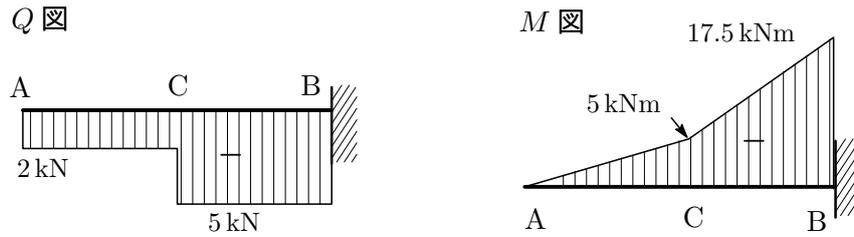


図 1.18: 片持ち梁・2点荷重の Q 図・M 図

補足：固定端 B 点を起点として断面力を求めるとモーメントの計算が少し面倒に。。。

(1) $0 \leq x \leq 2.5$

(2) $2.5 \leq x \leq 5$

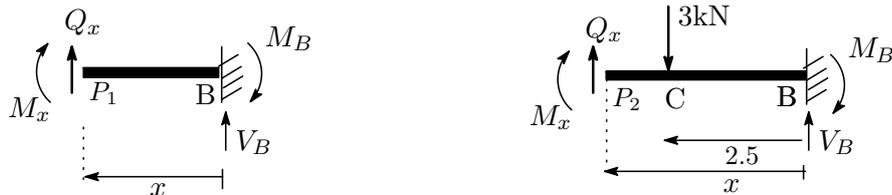


図 1.19: 固定端を起点とした場合

(1) BC 間の任意の位置 $P_1 (0 \leq x \leq 2.5)$ で仮想切断し、せん断力と曲げモーメントを Q_x, M_x とする。力のつり合いから

$$\sum Y = Q_x + V_B = 0 \quad \therefore Q_x = -5$$

$$\sum M = M_x + M_B - x \times V_B = 0 \quad \therefore M_x = 5x - 17.5$$

(2) CA の任意の位置 P_2 で仮想切断し、せん断力と曲げモーメントを Q_x, M_x とする。力のつり合いから

$$\sum Y = -Q_x - 3 + V_B = 0 \quad \therefore Q_x = -2 \quad (2.5 \leq x \leq 5)$$

$$\sum M = M_x + M_B + (x - 2.5) \times 3 - x \times V_B = 0 \quad \therefore M_x = 2x - 10$$

曲げモーメントは C 点 ($x = 2.5$) では $M = -5 \text{ kNm}$, A 点 ($x = 5$) では $M = 0 \text{ kNm}$ となり, A 点側から計算したのと同じ結果を与える。x の起点が異なるから違う表式となっているが, $x = 5 - x$ と置換すれば同じ表式となる。

最後にお約束の (1.2) を証明しておく。任意の分布荷重 $w = f(x)$ が作用しているはりの左端から x の距離にある長さ dx の部分を取りだすと, 図 1.20 のように左右の切断面にそれぞれ Q_x, M_x と $Q_x + dQ_x, M_x + dM_x$ の断面力が作用する。力のつり合いから

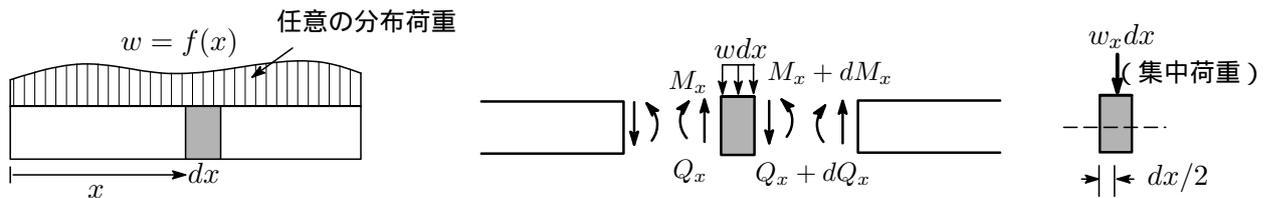


図 1.20: せん断力と曲げモーメントの関係

$$\sum Y = Q_x - (Q_x + dQ_x) - w_x dx = 0, \quad \therefore \frac{dQ_x}{dx} = -w_x \tag{1.4}$$

せん断力を微分したものは荷重の符号を変えたものと等しい。また、力のモーメントのつり合いから、2次の無限小を無視して

$$\sum M = M_x - (M_x + dM_x) + Q_x dx - (w_x dx) \frac{1}{2} dx = 0, \quad \therefore \frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (1.5)$$

という重要な結果が得られる。(1.4)と(1.5)より

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dx^2} = -w_x (< 0) \quad (1.6)$$

一般に、関数 $y = f(x)$ において $f'(a) = 0$ であるとき、 $f''(x) > 0$ なら $f(x)$ は $x = a$ で極小(最少)、反対に $f''(x) < 0$ なら $f(x)$ は $x = a$ で極大(最大)となった。このことから

せん断力 Q が 0 になる点は曲げモーメント M が最大になる点

せん断力が最大の点は曲げモーメントの傾きが最も大きくなる点 //

付録 === 片持ち梁の荷重と断面力, Q図, M図 ===

注: 今後, 説明の都合上, せん断力や曲げモーメントを Q_x, M_x とか $Q(x), M(x)$ と表記しているがこれは同じもの。念のため。

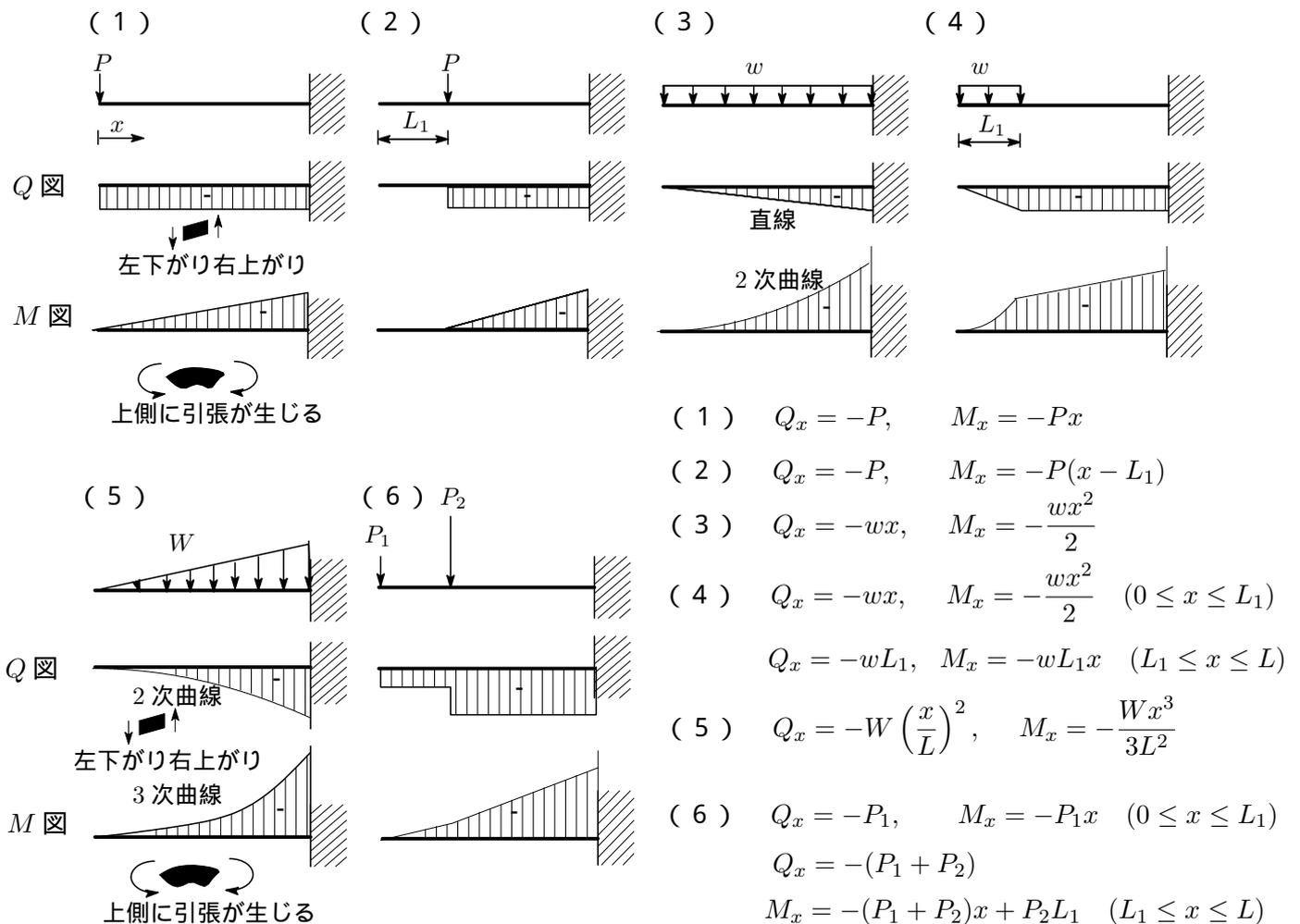


図 1.21: 片持ち梁の荷重と断面力

第2話.

平面構造物のつり合い(2)

2. 単純ばり

2 - 1 . 集中荷重のケース

第2話では単純ばりを取りあげる。単純ばりはピン支点(△)とローラ支点(△)からなるはりで、いまC点にWの荷重が作用しているとする。

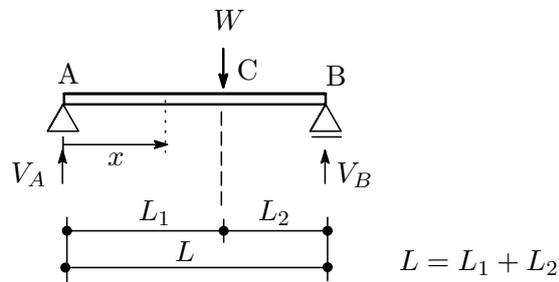


図 2.1: 単純梁

(1) 反力

力のつり合いの式から

$$\sum Y = -W + V_A + V_B = 0 \quad \therefore V_A + V_B = W$$

A点回りのモーメントのつり合いを考えると

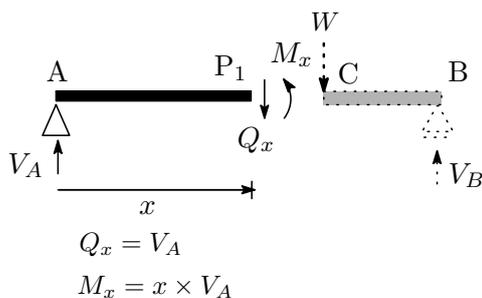
$$\sum M = L_1 \times W - L \times V_B = 0 \quad \therefore V_B = \frac{L_1}{L} W$$

これから $V_A = \frac{L_2}{L} W$, $V_B = \frac{L_1}{L} W$ と求められる。

(2) 断面力

AC間の任意の位置P1で仮想切断する。AC間のせん断力 Q_x は力のつり合いの式から

$$(1) 0 \leq x \leq L_1$$



$$(2) L_1 \leq x \leq L$$

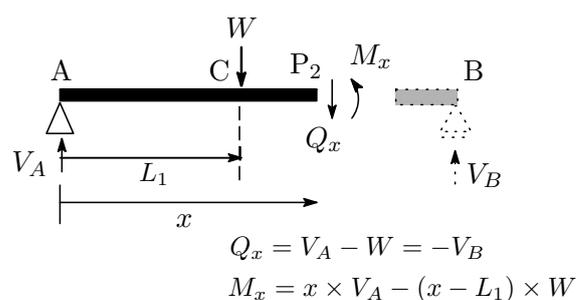


図 2.2: 単純ばりの断面力を求める

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = V_A = \frac{L_2}{L} W \quad (2.1)$$

曲げモーメント M_x は点 P_1 まわりのモーメントのつり合いから

$$\sum M = x \times V_A - M_x = 0 \quad \therefore M_x = xV_A = \frac{L_2}{L}Wx \quad (0 \leq x \leq L_1) \quad (2.2)$$

となり, A 点から C 点に向かうにつれて直線的の増加して $x=L_1$ で最大値をとる。

$$M_{max} = M_{L_1} = \frac{L_1L_2}{L}W = L_1V_A = L_2V_B \quad (2.3)$$

CB 間のせん断力は CB の任意の位置 P_2 で仮想切断し, 力のつり合いの式から

$$\sum Y = V_A - W - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = V_A - W = -V_B = -\frac{L_1}{L}W \quad (2.4)$$

曲げモーメントは P_2 まわりのモーメントのつり合いから

$$\sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W - M_x = 0 \quad \therefore M_x = \frac{L_1W}{L}(L - x) \quad (L_1 \leq x \leq L) \quad (2.5)$$

M_x は最大値をとる C 点から支点 B へ直線的の減少し支点 B で 0 になる。

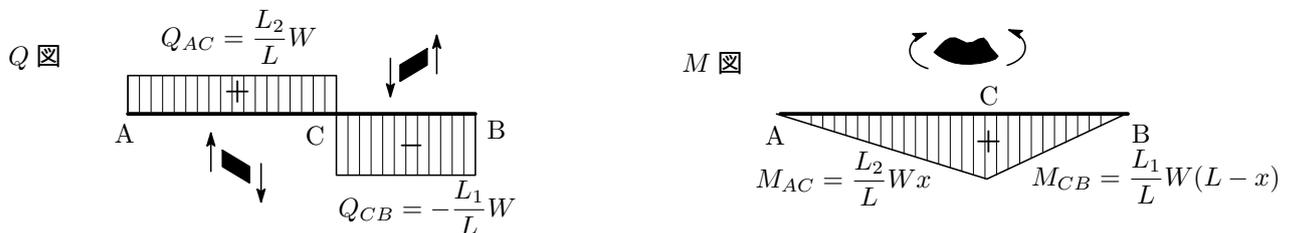


図 2.3: 単純梁の Q 図・ M 図

以上の結果をまとめると

・反力	:	$V_A = \frac{L_2}{L}W$	$V_B = \frac{L_1}{L}W$
・せん断力	:	$Q_{AC} = \frac{L_2}{L}W = V_A$	$Q_{CB} = -\frac{L_1}{L}W = -V_B$
・曲げモーメント	:	$M_{AC} = \frac{L_2}{L}Wx$	$M_{CB} = \frac{L_1}{L}W(L - x)$
(最大値)	:	$M_{max} = \frac{L_1L_2}{L}W = L_1V_A = L_2V_B$	

2 - 2 . 2 点荷重のケース

単純ばりの 2 点 C, D にそれぞれ W_1, W_2 の荷重が作用しているケース。

(1) 反力

力のつり合いの式から

$$\sum Y = -W_1 - W_2 + V_A + V_B = 0 \quad \therefore V_A + V_B = W_1 + W_2$$

A 点回りのモーメントのつり合いから反力 V_B が求められ

$$\sum M = L_1 \times W + (L_1 + L_2) \times W_2 - L \times V_B = 0 \quad \therefore V_B = \frac{L_1W_1 + (L_1 + L_2)W_2}{L} \quad (2.6)$$

したがって反力 V_A は

$$V_A = W_1 + W_2 - \frac{L_1 W_1 + (L_1 + L_2) W_2}{L} \quad (2.7)$$

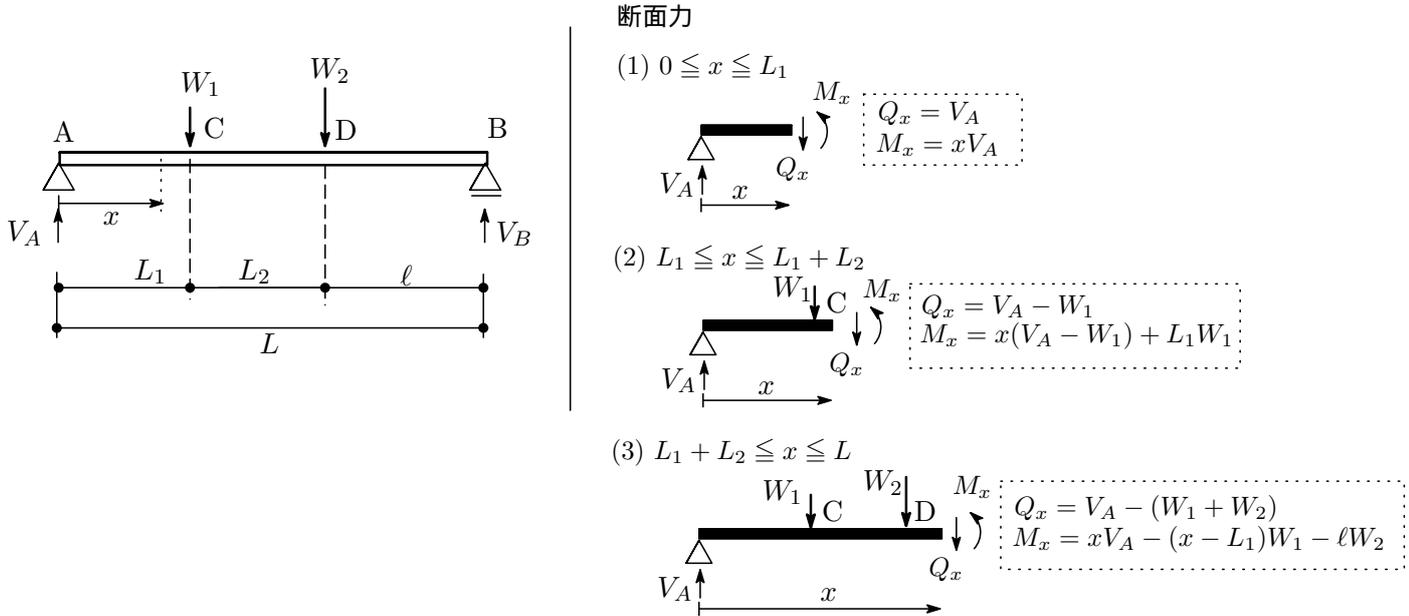


図 2.4: 単純梁・2点荷重

(2) 断面力

支点 A を起点として3つの区間に分けて考える。

・区間 AC ($0 \leq x \leq L_1$): はりに作用している力は V_A と Q_x の2つ。これらがつり合っているの
せん断力は

$$\sum Y = V_A - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = V_A \quad (2.8)$$

曲げモーメントは

$$\sum M = x \times V_A - M_x = 0, \quad \therefore M_x = xV_A \quad \begin{cases} M_A = 0 \\ M_C = L_1 V_A \end{cases} \quad (2.9)$$

・区間 CD ($L_1 \leq x \leq L_1 + L_2$): はりに作用している力は V_A , 荷重 W_1 とせん断力 Q_x の3つ。これ
らがつり合っているのせん断力は

$$\sum Y = V_A - W_1 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = V_A - W_1 \quad (2.10)$$

曲げモーメントは

$$\sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W_1 - M_x = 0,$$

$$\therefore M_x = (V_A - W_1)x + L_1 W_1 \quad \begin{cases} M_C = L_1 V_A \\ M_D = L_1 V_A + L_2 (V_A - W_1) \end{cases} \quad (2.11)$$

・区間 DB ($L_1 + L_2 \leq x \leq L$): はりに作用している力は V_A , 荷重 W_1, W_2 とせん断力 Q_x の4つ。これらがつり合っているのでせん断力は

$$\sum Y = V_A - W_1 - W_2 - Q_x = 0, \quad \therefore Q_x = V_A - (W_1 + W_2) \quad (2.12)$$

曲げモーメントは

$$\begin{aligned} \sum M = x \times V_A - (x - L_1) \times W_1 - (x - L_1 - L_2) \times W_2 - M_x = 0 \\ \therefore M_x = x(V_A - W_1 - W_2) + L_1(W_1 + W_2) + L_2W_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} M_D = L_1V_A + L_2(V_A - W_1) \\ M_B = L(V_A - W_1 - W_2) + L_1(W_1 + W_2) + L_2W_2 \end{cases} \quad (2.14)$$

図 2.5 の単純ばりの場合, $V_A = 15 \text{ kN}$, $V_B = 10 \text{ kN}$, $M_C = 15 \text{ kNm}$, $M_D = 20 \text{ kNm}$ となる。

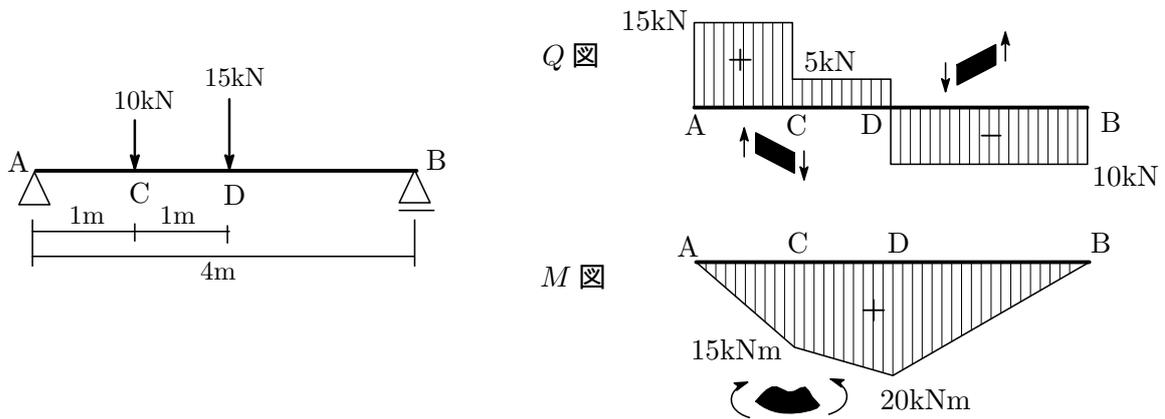


図 2.5: 単純梁・2点荷重の Q 図・ M 図

補足: M_x は Q_x が分かれば $dM_x/dx = Q_x$ を活用して積分計算で容易に求められるので紹介しておく。

・区間 AC ($0 \leq x \leq L_1$)

$$M_x = \int Q_x dx + C = \int V_A dx + C = V_A x + C_1$$

積分定数 C_1 は支点 A ($x = 0$) での曲げモーメント 0 であるので $C_1 = 0$ となり $M_x = xV_A$ が得られる。

・区間 CD ($L_1 \leq x \leq L_1 + L_2$)

$$M_x = \int Q_x dx + C = \int (V_A - W_1) dx + C = (V_A - W_1)x + C_2$$

積分定数 C_2 は C 点 ($x = L_1$) での曲げモーメント L_1V_A であるので $C_2 = L_1W_1$ となり

$$M_x = x(V_A - W_1) + L_1W_1$$

・区間 DB ($L_1 + L_2 \leq x \leq L$)

$$M_x = \int Q_x dx + C = \int \{V_A - (W_1 + W_2)\} dx + C = xV_A - (W_1 + W_2)x + C_3$$

積分定数 C_3 は D 点 ($x = L_1 + L_2$) での曲げモーメント $(L_1 + L_2)V_A - L_2W_1$ であるので $C_3 = L_1(W_1 + W_2) + L_2W_2$ となり

$$M_x = x(V_A - W_1 - W_2) + L_1(W_1 + W_2) + L_2W_2$$

2 - 3 . 3点荷重のケース

2点荷重の計算の要領が解れば3点荷重の反力や断面力の計算は容易と思う。せん断力は仮想切断した領域までの力のつり合いの式より求められる。曲げモーメントは各自計算されたい。

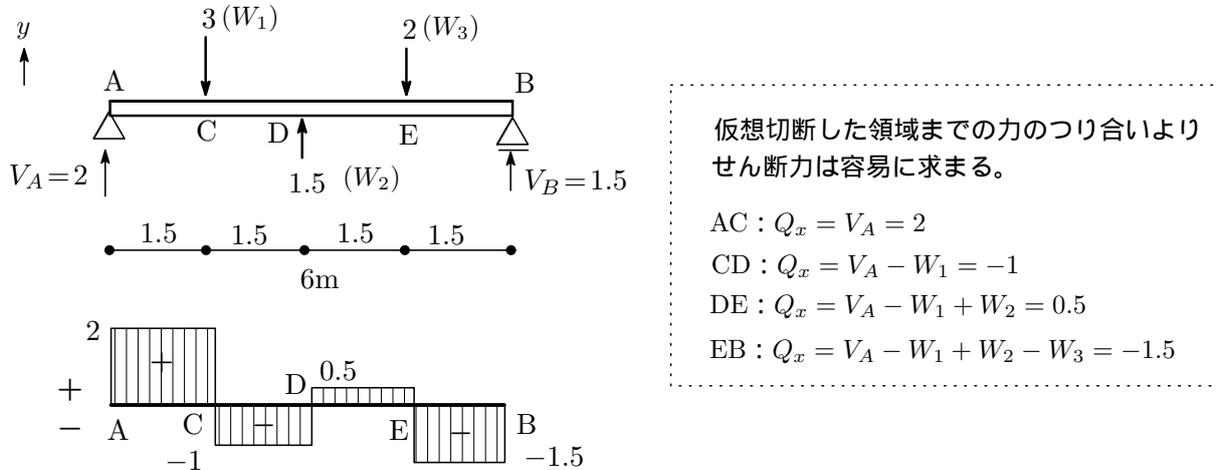


図 2.6: 単純梁・3点荷重

2 - 4 . 均一分布荷重のケース

(1) 反力

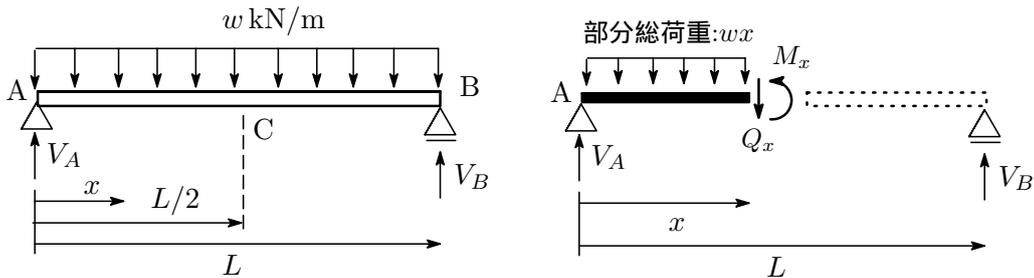


図 2.7: 単純梁・等分布荷重

反力 V_A, V_B は力のつり合いから

$$\sum Y = V_A + V_B - wL = 0, \quad \sum M = \frac{L}{2}V_A - \frac{L}{2}V_B = 0 \quad \therefore V_A = V_B = \frac{L}{2}w \quad (2.15)$$

(2) 断面力

A 端から距離 x の位置で仮想切断して断面力を求める。せん断力は

$$\sum Y = V_A - wx - Q_x = 0, \quad \sum M = xV_A - (x/2) \times wx - M_x = 0$$

$$\therefore Q_x = V_A - wx = \frac{L}{2}w - wx \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A 点} \quad Q_A = V_A \\ \text{C 点} \quad Q_C = 0 \\ \text{B 点} \quad Q_B = V_A - wL \end{array} \right. \quad (2.16)$$

曲げモーメントは

$$M_x = xV_A - \frac{w}{2}x^2 = \frac{L}{2}wx - \frac{w}{2}x^2 \quad \begin{cases} \text{A点} & M_A = 0 \\ \text{C点} & M_C = wL^2/8 \text{ (max)} \\ \text{B点} & M_B = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

M_x は 2 次曲線で表され中点 C で最大値 $M_C^{max} = wL^2/8$ をとる。 $w = 10, L = 10$ とした場合の Q 図, M 図は次の通り。

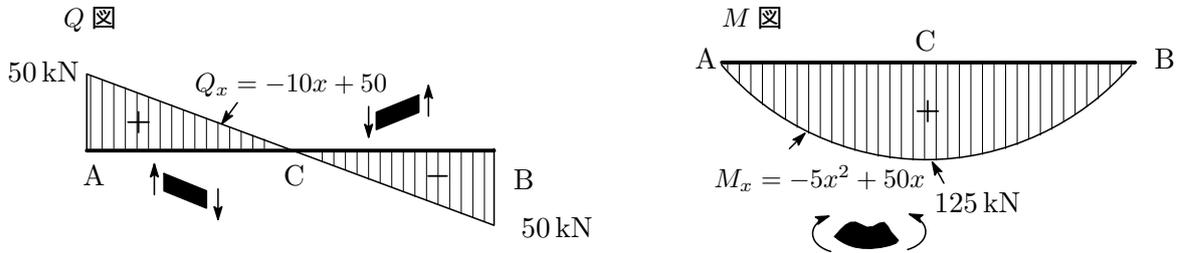


図 2.8: 単純梁・等分布荷重の Q 図・ M 図

・蛇足：曲げモーメント M_x をせん断力 Q_x の積分で求めよ。

2 - 5 . 部分均一分布荷重のケース

単純ばりに部分的に均一分布荷重 w kN/m が作用している場合を見よう。

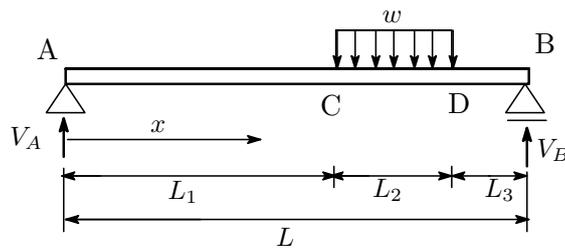


図 2.9: 単純ばり均一分布荷重

(1) 反力

$$\sum Y = V_A + V_B - wL_2 = 0, \quad \sum M = \left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right)L_2w - LV_B = 0$$

より

$$V_A = \frac{wL_2}{2L}(L_2 + 2L_3), \quad V_B = \frac{wL_2}{2L}(2L_1 + L_2) \quad (2.18)$$

(2) 断面力

$$\text{せん断力} \quad \begin{cases} \text{区間 AC } (0 \leq x \leq L_1) & Q_x = V_A = \frac{wL_2}{2L}(L_2 + 2L_3) \\ \text{区間 CD } (L_1 \leq x \leq L_1 + L_2) & Q_x = V_A - w(x - L_1) \\ \text{区間 DB } (L_1 + L_2 \leq x \leq L) & Q_x = V_A - wL_2 = -\frac{wL_2}{2L}(2L_1 + L_2) \end{cases} \quad (2.19)$$

曲げモーメントの計算は $dM_x/dx = Q_x$ を使う。

区間 AC では

$$M_x = \int Q_x dx + C_1 = \int V_A dx + C_1 = xV_A + C_1$$

$x = 0 : M_A = 0$ より $C_1 = 0$ となるので

$$M_x = xV_A \quad (2.20)$$

区間 CD では

$$M_x = \int Q_x dx + C_2 = \int \{V_A - w(x - L_1)\} dx + C_2 = xV_A - \frac{1}{2}w(x - L_1)^2 + C_2$$

$x = L_1 : M_C = L_1V_A$ より $C_2 = 0$ となるので

$$M_x = xV_A - \frac{1}{2}w(x - L_1)^2 \quad (2.21)$$

$dM_x/dx = 0$ より $x = L_1 + (V_A/w)$ 。この位置で曲げモーメントは最大値となる。

$$M_{max} = V_A \left\{ L_1 + \frac{L_2}{4L}(L_2 + 2L_3) \right\} \quad (2.22)$$

区間 DB では

$$M_x = \int Q_x dx + C_3 = \int (V_A - wL_2) dx + C_3 = (V_A - wL_2)x + C_3$$

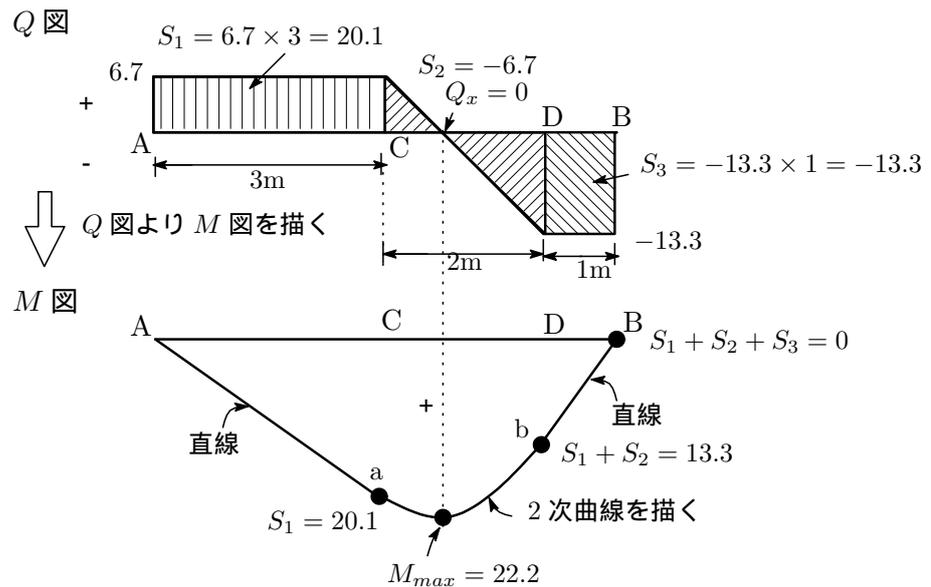
$x = L_1 + L_2 : M_D = (L_1 + L_2)V_A - \frac{1}{2}wL_2^2$ より $C_3 = wL_2(L_1 + L_2) - \frac{1}{2}wL_2^2$ となるので、途中の計算は煩雑だが結果として

$$M_x = V_B(L - x)$$

を得る。具体的に $w = 10, L_1 = 3, L_2 = 2, L_3 = 1$ とおいた場合、各区間の断面力は

$$\begin{cases} \text{AC: } Q_x = 6.7 & M_x = 6.7x \\ \text{CD: } Q_x = 6.7 - 10(x - 3) & M_x = -5x^2 + 36.7x - 45 \\ \text{DB: } Q_x = -13.3 & M_x = -13.3(x - 6) \end{cases} \quad (2.23)$$

となる。(2.23) より Q 図と M 図を描くことができるが、ここでは Q 図を描いてその図をベースに M 図を描くことにする。図 2.10 を参照されたい。詳しい説明は不要だろう。

図 2.10: 部分均一分布荷重の Q, M 図

2 - 6 . 放物線分布荷重

最後に放物線分布荷重のケースを見ておこう。計算は簡潔にしているので確認しながら進められたい。

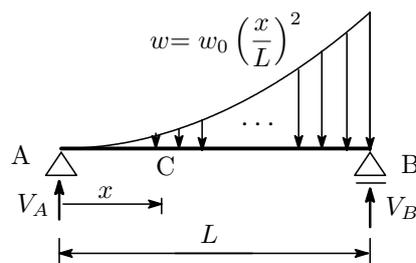


図 2.11: 放物線分布荷重

(1) 反力

放物線分布の総荷重を W とすると

$$W = \int_0^L w dx = \frac{1}{3} w_0 L \quad (2.24)$$

したがって

$$V_A + V_B = W = \frac{1}{3} w_0 L \quad (2.25)$$

A 点のモーメントのつり合いより

$$M_A = \int_0^x x w dx - L V_B = 0, \quad \therefore V_B = \frac{w_0 L}{4}, \quad V_A = \frac{w_0 L}{12} \quad (2.26)$$

(2) 断面力

C点でのせん断力は

$$Q_x = V_A - \int_0^x w dx = V_A - \frac{w_0 x^3}{3L^2} = \frac{w_0 L^2}{12} \left(1 - 4 \frac{x^3}{L^3} \right) \quad (2.27)$$

したがって曲げモーメントは

$$M_x = \int Q_x dx + C = \frac{w_0 L}{12} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^4}{L^4} \right) \quad (\because M_0 = 0) \quad (2.28)$$

第2話はここらあたりで終了し、第3話はラーメン構造を取りあげよう。

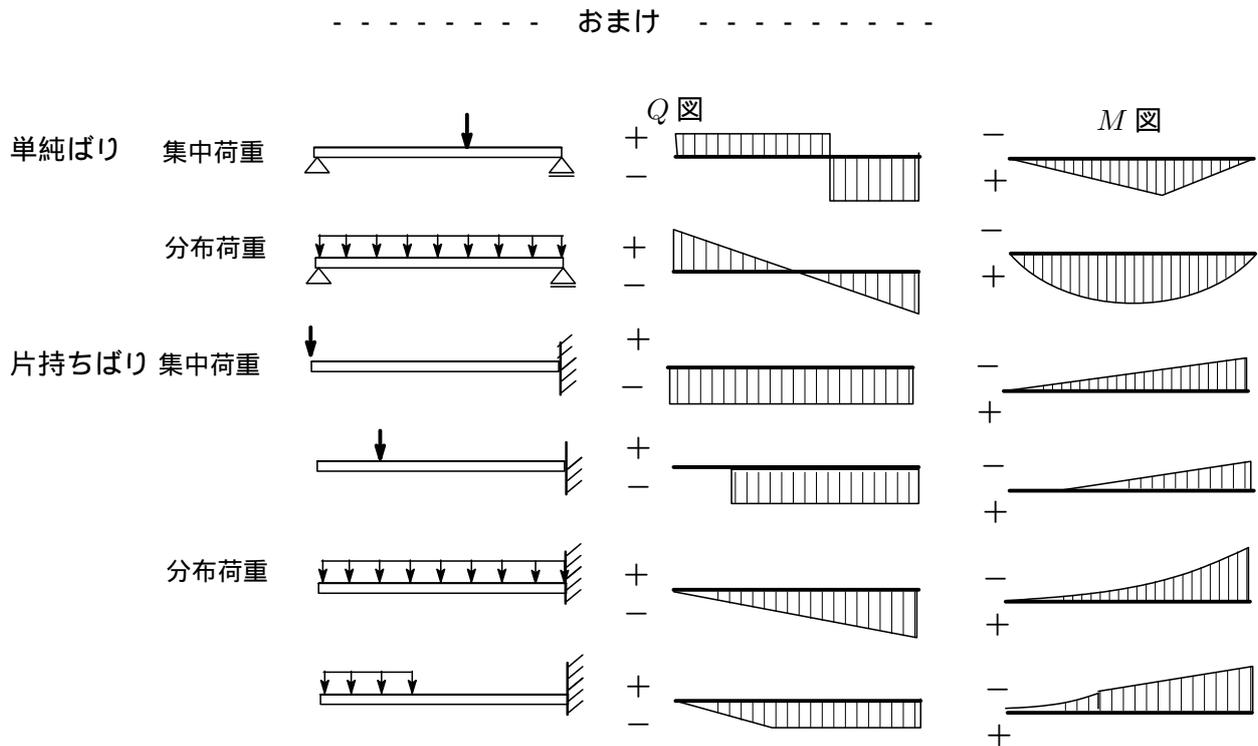


図 2.12: 代表的な梁と Q 図・M 図の形

第3話.

平面構造物のつり合い(3)

3. ラーメン

ラーメン構造の種類

静定ラーメンには大きく分けて片持ちばり系, 単純ばり系, 3 ヒンジ系⁶の3種類がある。片持ちば

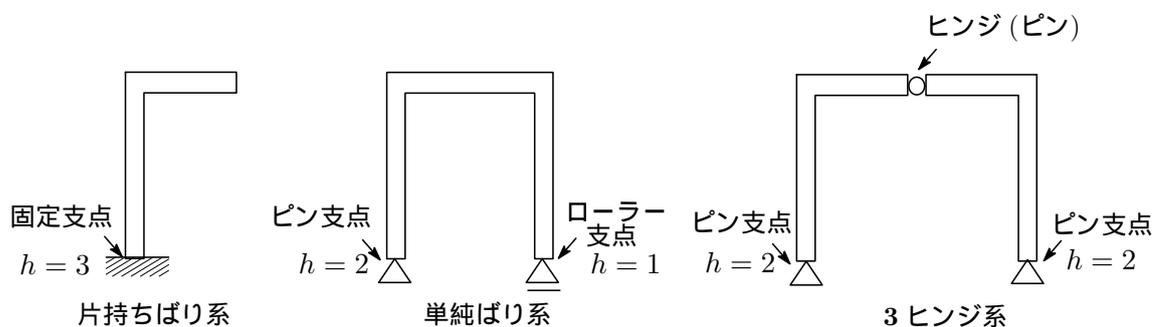


図 3.1: 静定ラーメンの種類

り系は支点が固定支点, 単純ばり系はピン支点とローラー支点, 3 ヒンジ系は2か所ともピン支点で部材中のどこかにヒンジ(ピン)があり, ラーメンの部材と部材の結合部(節点)は互いに回転できず, 剛に接合されている。3 ヒンジ系はピン支点が2つあるので反力の数は4個になり3つの力のつり合いの式だけでは解けないように思われるが, 部材がヒンジ(ピン節点)でつながっていて回転が自由になるので, その点での曲げモーメントは0になるという条件を付加することで解くことができる。

静定ラーメンは単純ばりの1次元構造物と違って2次元の構造物となるので, 断面力を計算するにあたってせん断力や曲げモーメントの正負の向きを決めておかなければならないが, 図 3.2 のように1次元単純ばりを折り曲げたものをラーメンとみなして正負の向きを決めておく。視点はラーメンの内側にある。

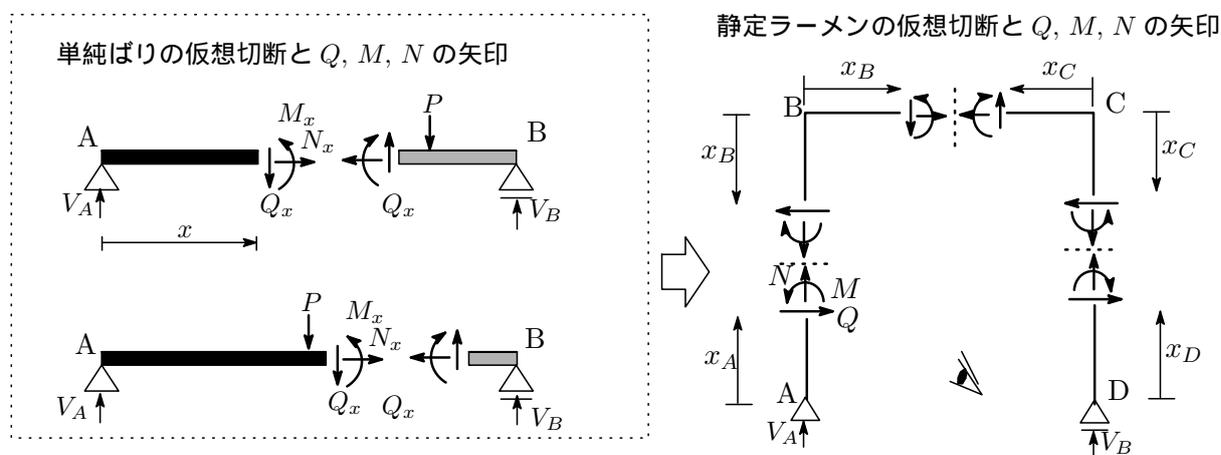


図 3.2: ラーメンの断面力図

⁶2 個のピン支点と 1 個のヒンジの合計 3 個のピンをもつ骨組み。

3 - 1 . 単純ばり系ラーメン

3 - 1 - 1 . 単純ばり系ラーメン：鉛直荷重のケース

E 点に鉛直荷重 P が作用する単純ばり系ラーメンの反力と断面力を求める。

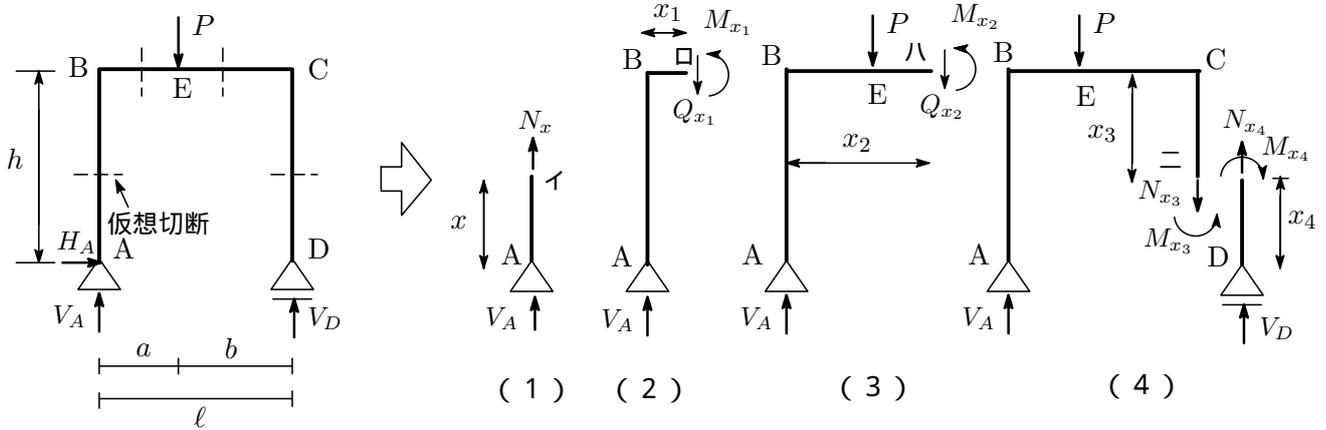


図 3.3: 鉛直力が作用するラーメンと仮想切断

(1) 反力

ピン支点 A には水平反力 H_A と鉛直反力 V_A が，ローラー支点 B には鉛直反力 V_B が生じる。水平外力は働いていないので

$$\sum X = H_A = 0 \quad \therefore H_A = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum M_A = a \times P - \ell \times V_D = 0 \quad \therefore V_D = \frac{Pa}{\ell} \quad (3.2)$$

$$\sum Y = V_A + V_D - P = 0 \quad \therefore V_A = \frac{Pb}{\ell} \quad (3.3)$$

(2) 断面力

図に示すように AB, BC, CD 区間での仮想切断を考える。

- ・ 区間 AB の間の任意の位置 x ($0 \leq x \leq h$) で仮想切断

$$\sum Y = V_A + N_x = 0 \quad \therefore N_x = -\frac{Pb}{\ell} \quad (3.4)$$

$$Q_x = 0, \quad M_x = 0 \quad (3.5)$$

- ・ 区間 BE の任意の位置 x_1 ($0 \leq x_1 \leq a$) で仮想切断

$$\sum Y = V_A - Q_{x_1} = 0 \quad \therefore Q_{x_1} = \frac{Pb}{\ell} \quad (3.6)$$

$$\sum M = x_1 \times V_A - M_{x_1} = 0 \quad \therefore M_{x_1} = \frac{Pb}{\ell} x_1 \quad (3.7)$$

$$N_{x_1} = 0 \quad (3.8)$$

・ 区間 EC の任意の位置 x_2 ($a \leq x_2 \leq \ell$) で仮想切断

$$\sum Y = V_A - P - Q_{x_2} = 0 \quad \therefore Q_{x_2} = -\frac{Pa}{\ell} \tag{3.9}$$

$$\sum M = x_2 \times V_A - (x_2 - a) \times P - M_{x_2} = 0 \quad \therefore M_{x_2} = P \left\{ \frac{b}{\ell} x_2 - (x_2 - a) \right\} \tag{3.10}$$

$$N_{x_2} = 0 \tag{3.11}$$

・ 区間 CD の任意の位置 x_4 ($0 \leq x_4 \leq h$) で仮想切断 (支点 D を起点とすると計算が楽)。

$$\sum Y = V_D + N_{x_4} = 0 \quad \therefore N_{x_4} = -\frac{Pa}{\ell} \tag{3.12}$$

$$\sum M = M_{x_4} = 0, \quad Q_{x_4} = 0 \tag{3.13}$$

得られた結果をまとめると次のようになる。

	せん断力	曲げモーメント	軸方向力	
区間 AB	$Q_x = 0$	$M_x = 0$	$N_x = -Pb/\ell$	
区間 BE	$Q_{x_1} = Pb/\ell$	$M_{x_1} = (Pb/\ell)x_1$	$N_{x_1} = 0$	(3.14)
区間 EC	$Q_{x_2} = -Pa/\ell$	$M_{x_2} = \{(b/\ell)x_2 - (x_2 - a)\}P$	$N_{x_2} = 0$	
区間 CD	$Q_{x_3} = 0$	$M_{x_3} = 0$	$N_{x_3} = -Pa/\ell$	

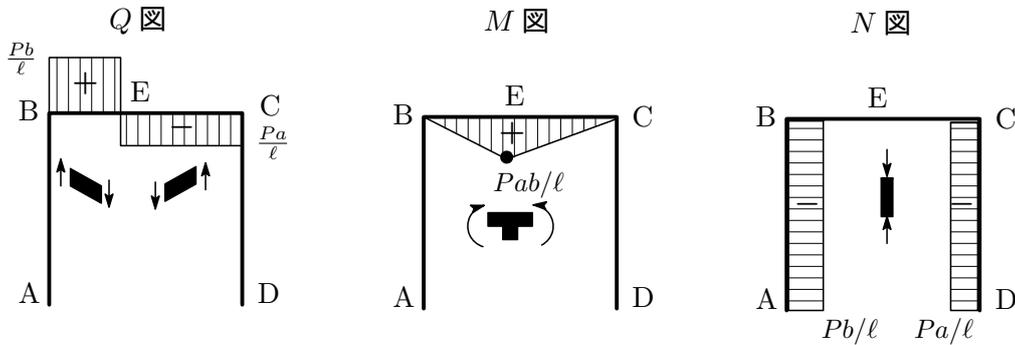


図 3.4: 鉛直荷重ラーメンの Q, M, N 図

3 - 1 - 2 . 単純ばり系ラーメン : 水平荷重のケース

ラーメンの B 点に水平力 P が作用する場合の反力と断面力を求める。

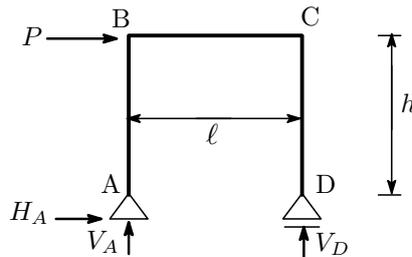


図 3.5: 水平力が作用するラーメン

(1) 反力

ローラー支点 D には鉛直方向の反力 V_D しか生じない。ピン支点 A の水平反力を H_A とすると、力

のつり合いの式より

$$\sum X = P + H_A = 0 \quad \therefore H_A = -P \quad (3.15)$$

$$\sum Y = V_A + V_D = 0 \quad \therefore V_A = -V_D \quad (3.16)$$

$$\sum M = h \times P - \ell \times V_D = 0 \quad \therefore V_A = -Ph/\ell, V_D = Ph/\ell \quad (3.17)$$

(2) 断面力

図 3.6 に示すように仮想切断する。

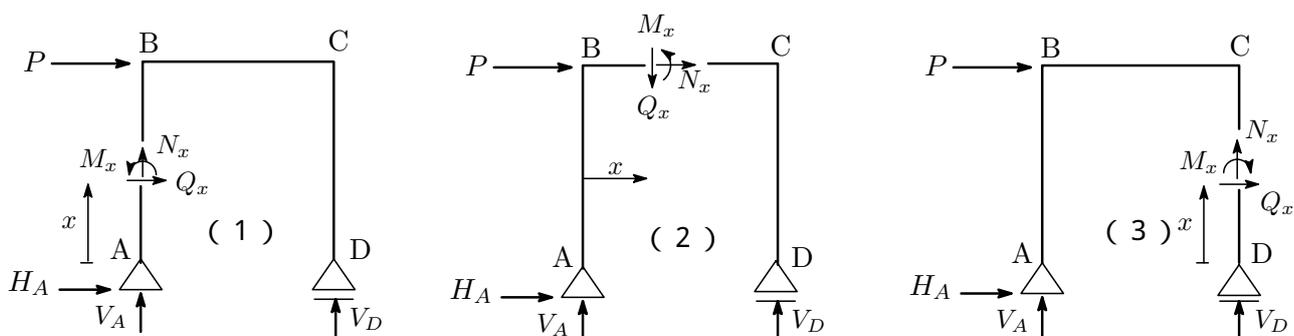


図 3.6: 水平力が作用するラーメンと仮想切断

・ 区間 AB ($0 \leq x \leq h$)

$$\sum X = H_A + Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = -H_A = P \quad (3.18)$$

$$\sum Y = V_A + N_x = 0 \quad \therefore N_x = -V_A = P \quad (3.19)$$

$$\sum M = -x \times H_A - M_x = 0 \quad \therefore M_x = -H_A x = Px \quad (3.20)$$

・ 区間 BC ($0 \leq x \leq \ell$)

$$\sum X = H_A + P + N_x = 0, \quad \sum Y = V_A - Q_x = 0, \quad \sum M = -h \times H_A + x \times V_A - M_x$$

$$\therefore Q_x = -P, \quad M_x = P(h - x), \quad N_x = 0 \quad (3.21)$$

・ 区間 DC ($0 \leq x \leq h$)

$$\sum X = Q_x = 0, \quad \sum Y = V_D + N_x = 0, \quad \therefore N_x = -P, \quad \sum M = M_x = 0 \quad (3.22)$$

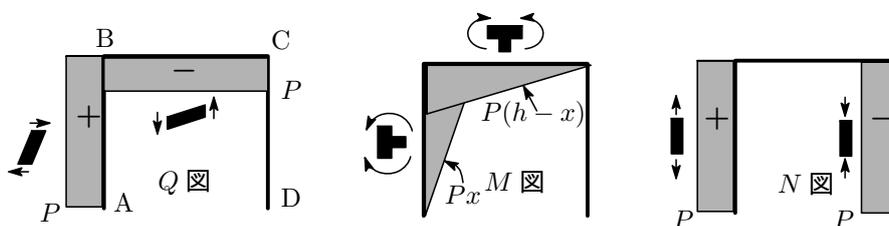


図 3.7: 水平荷重ラーメンの Q , M , N 図

3 - 2 . 片持ちばり系ラーメン

3 - 2 - 1 : 片持ちばりラーメン : 鉛直荷重のケース

自由端 A に鉛直荷重 P が作用している片持ちばりラーメンの断面力を求める。AB, BC, CD の各区間ごとに仮想切断し, 自由端側で計算する (こうすることで反力を求める必要がないというメリットがある)。なお, 水平荷重はないので水平軸方向力は 0 となる。

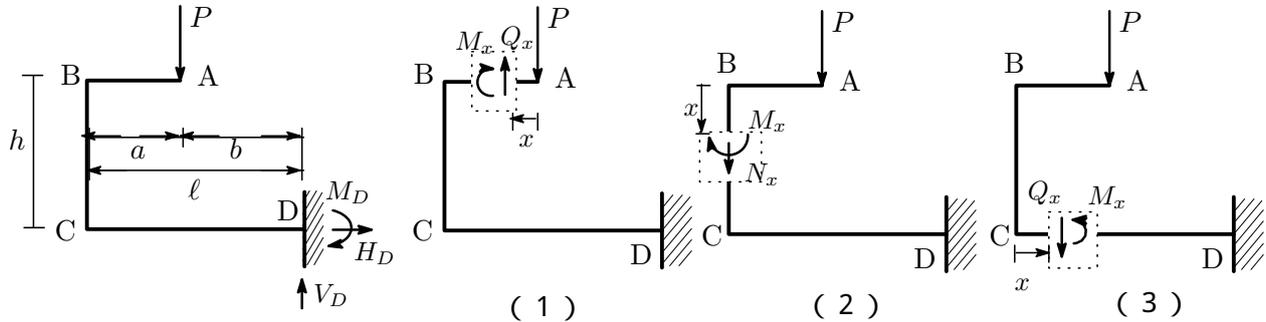


図 3.8: 片持ち梁系ラーメン

(1) 反力

支点 D の反力を V_D, H_D, M_D とすると

$$\begin{aligned} \sum X = 0 + H_D = 0, \quad \sum Y = V_D - P = 0, \quad \sum M = M_D - bP = 0 \\ \therefore H_D = 0, \quad V_D = P, \quad M_D = bP \end{aligned} \quad (3.23)$$

(2) 断面力

・ 区間 AB ($0 \leq x \leq a$)

$$N_x = 0 \quad (3.24)$$

$$\sum Y = -P + Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = P \quad (3.25)$$

$$\sum M = x \times P + M_x = 0 \quad \therefore M_x = -Px \quad \begin{cases} 0 & (x=0) \\ -Pa & (x=a) \end{cases} \quad (3.26)$$

・ 区間 BC ($0 \leq x \leq h$)

$$Q_x = 0 \quad (3.27)$$

$$\sum Y = -P - N_x = 0 \quad \therefore N_x = -P \quad (3.28)$$

$$\sum M = a \times P + M_x = 0 \quad \therefore M_x = -Pa \quad (3.29)$$

・ 区間 CD ($0 \leq x \leq \ell$)

$$\sum Y = -P - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = -P \quad (3.30)$$

$$\sum M = (a-x) \times P - M_x = 0 \quad \therefore M_x = P(a-x) \quad \begin{cases} Pa & (x=0) \\ -Pb & (x=\ell) \end{cases} \quad (3.31)$$

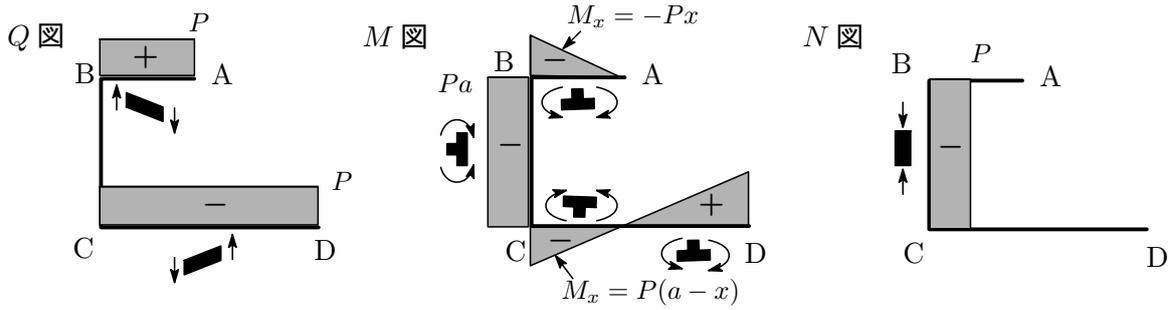


図 3.9: 水平荷重片持ち梁ラーメンの Q, M, N 図

3 - 2 - 2 . 片持ちばり系ラーメン：水平荷重のケース

図 3.10 の片持ちばりラーメンの断面力を求める（反力は各自計算されたし⁷）

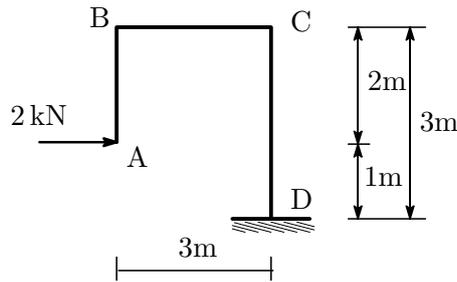


図 3.10: 片持ち梁ラーメン

(1) 断面力

A 点, B 点, C 点を起点として断面力を求める位置を x とする。

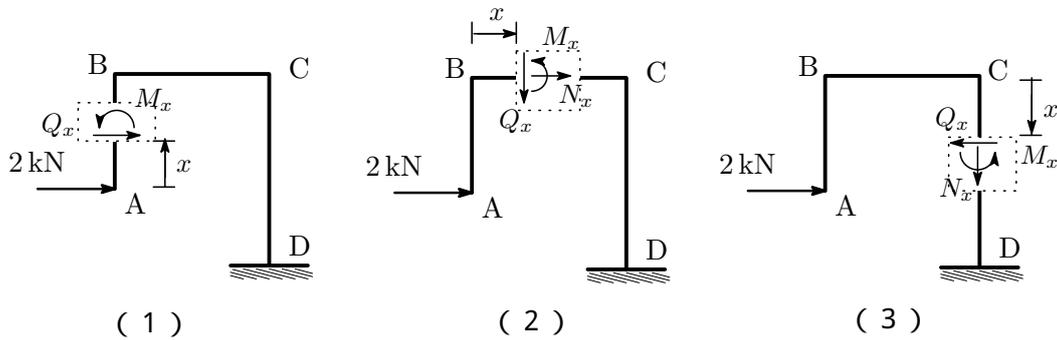


図 3.11: 片持ち梁ラーメンの仮想切断

・ 区間 AB ($0 \leq x \leq 2$)

$$N_x = 0 \tag{3.32}$$

$$\sum X = 2 + Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = -2 \tag{3.33}$$

$$\sum M = -x \times 2 - M_x = 0 \quad \therefore M_x = -2x \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ -4 & (x = 2) \end{cases} \tag{3.34}$$

⁷ $H_D = -2\text{kN}$ (左向き), $V_D = 0$, $M_D = -2\text{kNm}$ (反時計回り)

・ 区間 BC($0 \leq x \leq 3$)

$$Q_x = 0 \tag{3.35}$$

$$\sum X = 2 + N_x = 0 \quad \therefore N_x = -2 \tag{3.36}$$

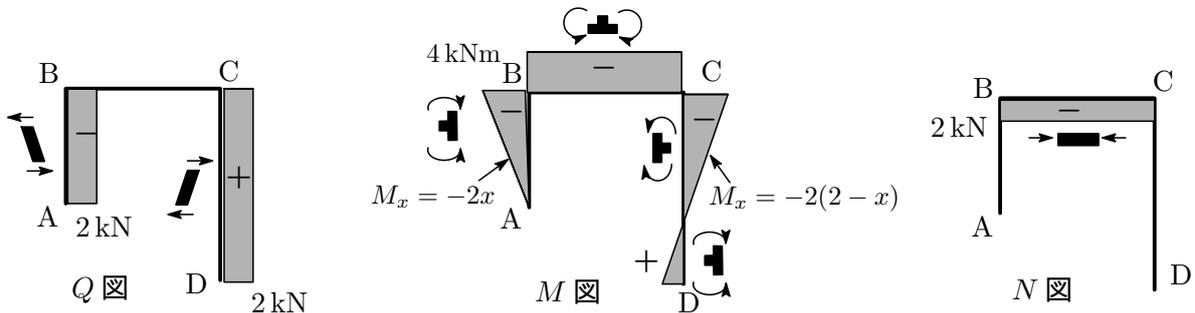
$$\sum M = -2 \times 2 - M_x = 0 \quad \therefore M_x = -4 \tag{3.37}$$

・ 区間 CD($0 \leq x \leq 3$)

$$N_x = 0 \tag{3.38}$$

$$\sum X = 2 - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = 2 \tag{3.39}$$

$$\sum M = -(2-x) \times 2 - M_x = 0 \quad \therefore M_x = -2(2-x) \begin{cases} -4 & (x=0) \\ 2 & (x=3) \end{cases} \tag{3.40}$$



3 - 3 . 3 ヒンジ系ラーメン：鉛直荷重のケース

図 3.12 の 3 ヒンジラーメンの反力と断面力を求める。支点 A, F はピン支点なので水平と鉛直の合計 4 つの反力を生じる。力のつり合いの式は 3 つで未知数が 1 つ多いのでこのままでは解けなが、ピン

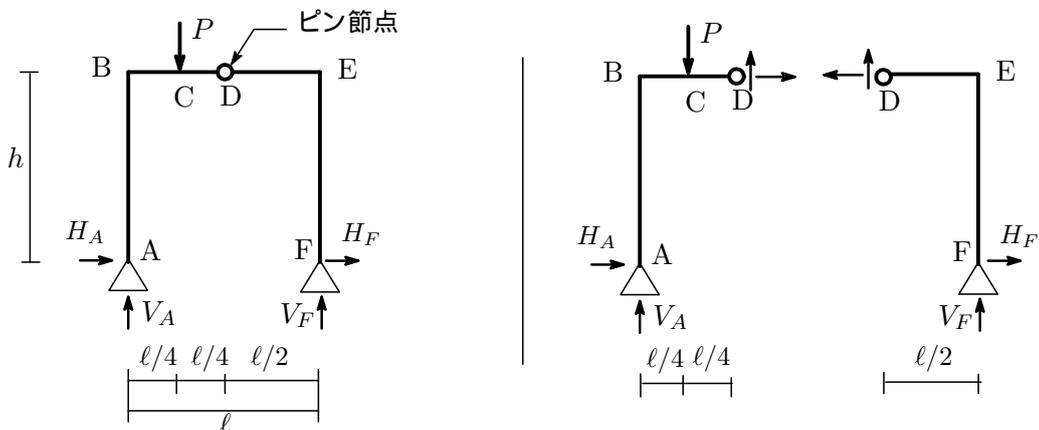


図 3.12: 3 ヒンジラーメン

節点では曲げモーメントは必ずゼロになる。この条件式を付加することで解くことができる。

(1) 反力

力のつり合いの式より

$$\begin{cases} \sum X = H_A + H_F = 0 & \therefore H_A = -H_F \quad (\text{向きは反対}) \\ \sum Y = V_A + V_F - P = 0 & \therefore V_A + V_F = P \\ \sum M_A = \ell/4 \times P - \ell \times V_F = 0 & \therefore V_F = P/4, V_A = 3P/4 \end{cases} \quad (3.41)$$

次にピン節点 D 点での曲げモーメントは 0 (D 点の左側からの曲げモーメントも右側からの曲げモーメントも共にゼロになる) という条件を使う。仮に左側の D 点回りのモーメントを考えると

$$\sum M_D = \ell/2 \times V_A - h \times H_A - \ell/4 \times P = 0 \quad \therefore H_A = \ell P/8h \quad (3.42)$$

以上 4 つの式より

$$V_A = 3P/4, \quad V_F = P/4, \quad H_A = \ell P/8h, \quad H_F = -\ell P/8h \quad (3.43)$$

(2) 断面力

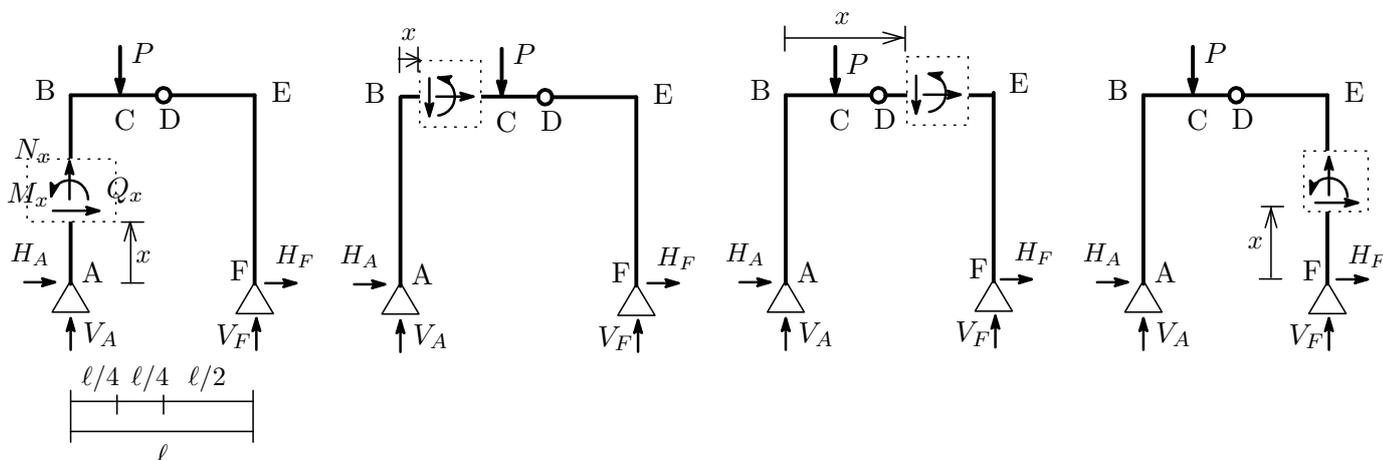


図 3.13: 3 ヒンジラーメンの断面力を求める

$$\text{AB 間} \begin{cases} \sum X = H_A + Q_x = 0 & \therefore Q_x = -H_A = -\frac{P\ell}{8h} \\ \sum Y = V_A + N_x = 0 & \therefore N_x = -V_A = -\frac{3P}{4} \\ \sum M_x = -x \times H_A - M_x = 0 & \therefore M_x = -H_A x = -\frac{P\ell}{8h}x, M_B = -\frac{P\ell}{8} \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\text{BC 間} \begin{cases} \sum X = H_A + N_x = 0 & \therefore N_x = -H_A = -\frac{P\ell}{8h} \\ \sum Y = V_A - Q_x = 0 & \therefore Q_x = V_A = \frac{3P}{4} \\ \sum M_x = -h \times H_A + x \times V_A - M_x = 0 \\ \therefore M_x = -H_A h + V_A x = -\frac{P\ell}{8} + \frac{3P}{4}x, M_C = \frac{P\ell}{16} \\ x = \ell/6 \text{ で } M_x = 0 (\text{反曲点}) \text{ となる。} \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\text{DE間} \left\{ \begin{array}{l} \sum X = H_A + N_x = 0 \quad \therefore N_x = -H_A = -\frac{P\ell}{8h} \\ \sum Y = V_A - P - Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = V_A - P = -\frac{P}{4} \\ \sum M_x = -h \times H_A + x \times V_A - (x - \ell/4) \times P - M_x = 0 \\ \quad \therefore M_x = -H_A h + V_A x = \frac{P\ell}{8} - \frac{P}{4}x, M_D = 0, M_E = -\frac{P\ell}{8} \end{array} \right. \quad (3.46)$$

$$\text{FE間} \left\{ \begin{array}{l} \sum X = Q_x - H_F = 0 \quad \therefore Q_x = H_F = \frac{P\ell}{8h} \\ \sum Y = N_x + V_F = 0 \quad \therefore N_x = -V_F = -\frac{P}{4} \\ \sum M_x = x \times H_F - M_x = 0 \\ \quad \therefore M_x = H_F x = \frac{P\ell}{8h}x, M_E = \frac{P\ell}{8}, M_F = 0 \end{array} \right. \quad (3.47)$$

M 図で曲げモーメントが 0 になる点を境に部材のわん曲の凹凸が逆になっている。その点を反曲点と呼んでいる。

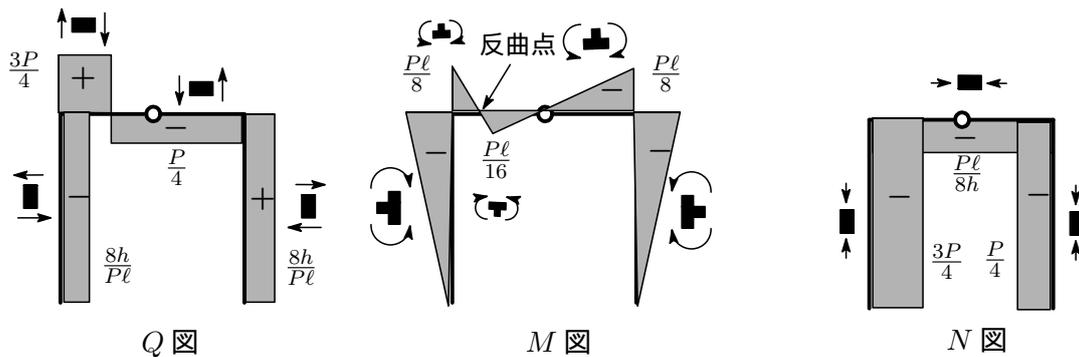


図 3.14: 3 ヒンジラーメン Q, M, N 図

以上，第 3 話はここれで終わり，第 4 話ではトラス構造を見ていく。

おまけ：片持ち梁と断面力 ——

1 次元単純ばりを折り曲げたものをラーメン構造とみなすとせん断力や曲げモーメントの正負の向きを容易に決められるといったが，図 3.15 の片持ちラーメンを考えよう。この構造物の場合 (1) の側から見ると「はり」として見ていることになるが，一方 (2) の側から見れば，A 点に破線で示した水平材があると仮定するなら「ラーメン」として見ているとも考えられる。そこで (1) はりとして見る立場と (2) ラーメンとして見る立場，それぞれの立場で断面力の矢印を描くとどうなるかを考えよう。

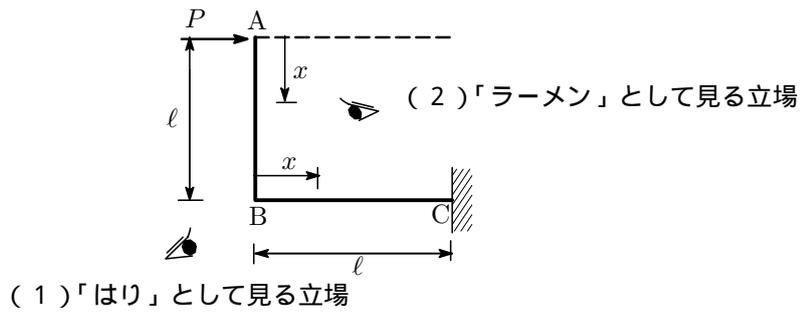


図 3.15: 片持ち梁ラーメン

(1) はりの立場

はりを AB 間と BC 間に分けて考え、A 点、B 点をそれぞれの起点にとると、各区間の断面力の矢印は図 3.16 のようになる。

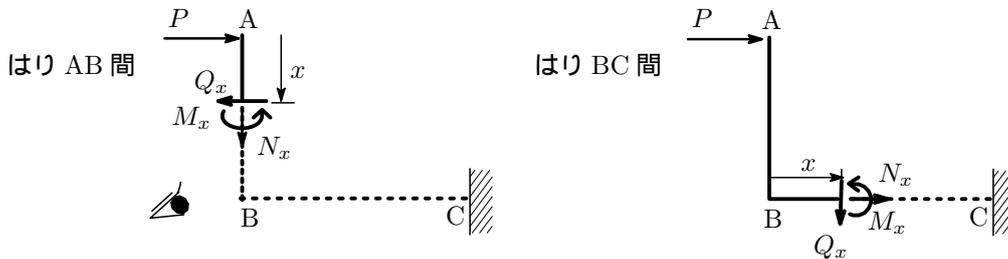


図 3.16: はりとして見た立場

断面力は

$$\begin{aligned} \cdot \text{区間 AB} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sum X = P - Q_x = 0, \quad \sum Y = -N_x = 0 \quad \therefore Q_x = P, N_x = 0 \\ \sum M = x \times P - M_x = 0 \end{array} \right. \quad \therefore M_x = Px \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 : M_A = 0 \\ x = l : M_B = Pl \end{array} \right. \quad (3.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{区間 BC} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sum X = P + N_x = 0, \quad \sum Y = -Q_x = 0 \quad \therefore Q_x = 0, N_x = -P \\ \sum M = l \times P - M_x = 0 \end{array} \right. \quad \therefore M_x = Pl \quad (3.49) \end{aligned}$$

となる。一方、ラーメンの立場から見ると

(2) ラーメンの立場

各区間の断面力の矢印は図 3.17 のようになる。

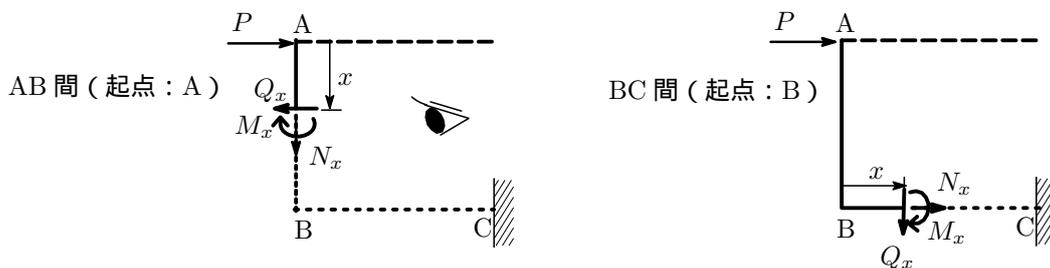


図 3.17: ラーメンとして見た立場

断面力は

$$\text{区間 AB} \begin{cases} \sum X = P - Q_x = 0, \sum Y = -N_x = 0 & \therefore Q_x = P, N_x = 0 \\ \sum M = x \times P + M_x = 0 & \therefore M_x = -Px \end{cases} \begin{cases} x = 0 : M_A = 0 \\ x = \ell : M_B = -P\ell \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\text{区間 BC} \begin{cases} \sum X = P + N_x = 0, \sum Y = -Q_x = 0 & \therefore Q_x = 0, N_x = -P \\ \sum M = \ell \times P + M_x = 0 & \therefore M_x = -P\ell \end{cases} \quad (3.51)$$

以上の結果を表にまとめると

見方	区間	Q_x	M_x	N_x
はり	AB	P	Px	0
	BC	0	$P\ell$	$-P$
ラーメン	AB	P	$-Px$	0
	BC	0	$-P\ell$	$-P$

いずれの見方をとっても曲げモーメントを除く断面力は符号を含めて同じ値となるが、曲げモーメントだけは正負の符号が(1)と(2)で逆転している。これは図 3.18 からわかるように(1)の立場の場合と(2)の立場の場合とでは部材の変形の凹凸がちょうど逆になって見えることによる。

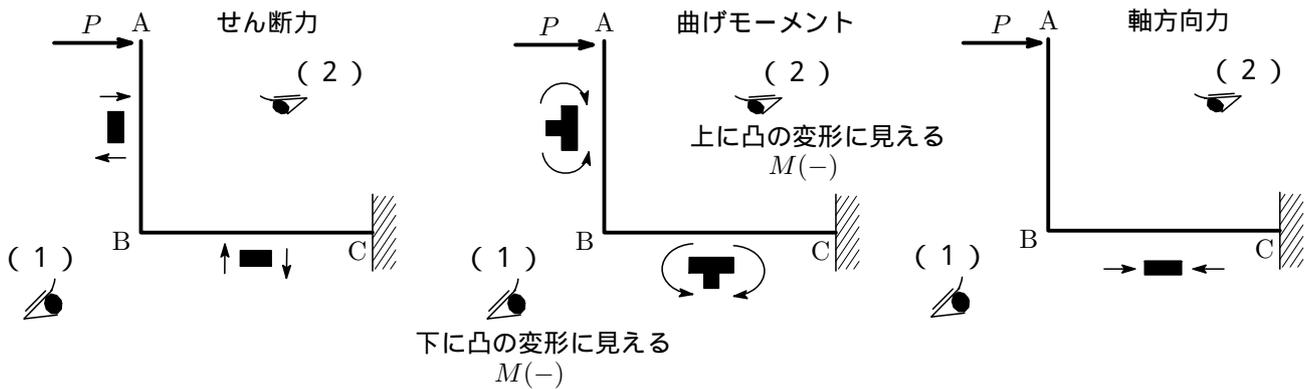


図 3.18: 断面力による部材の変形

4. 静定トラス

トラス構造の特長

トラス構造というのは部材が三角形を単位とした骨組みで、部材と部材の節点（接合部）がすべて「ピン接合」という特長をもつ。ピン接合点では曲げモーメントがゼロで、外力は節点のみに加わり、各節点に集まる力はつり合っている。断面力として軸方向力のみ生じ、せん断力と曲げモーメントは生じない。トラスに荷重が作用したとき、構成部材すべてに軸方向力が発生するわけでもない。軸方向力

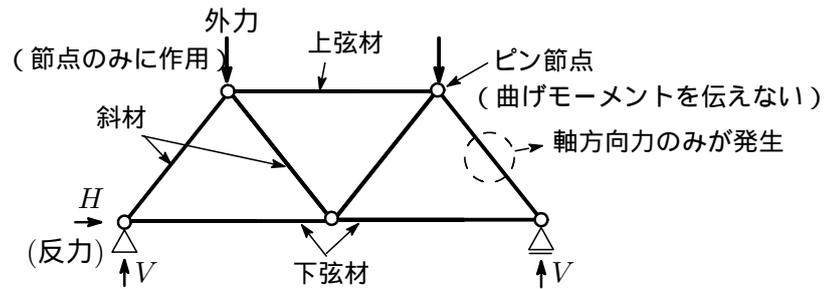


図 4.1: トラス構造

の発生しない部材をとくにゼロ部材とかゼロメンバーというが、くわしくは補足の項を参照されたい。

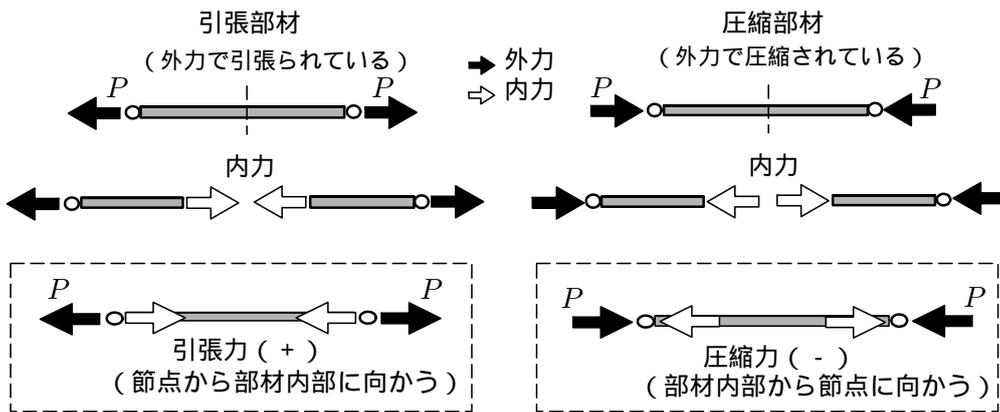


図 4.2: 軸方向力の正・負

トラスには三角形の骨組みの構成方法によっていろいろな種類があり、代表的なものを以下に示す。

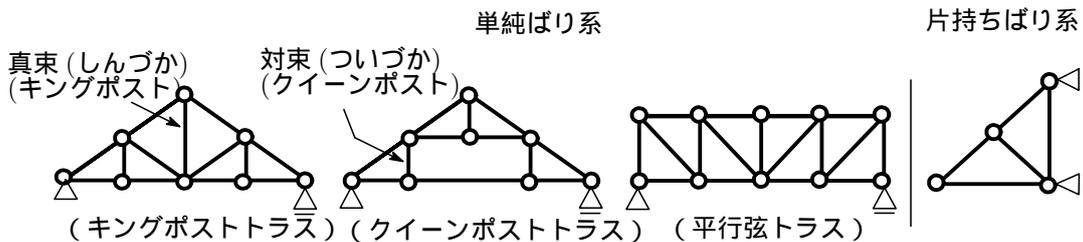


図 4.3: トラス構造の種類

軸方向力 N を求める計算法

静定トラスの軸方向力を求める主な方法として「節点法」と「切断法」がある。尚、示力図を使った図式解法もあるが、これは補足で触れよう。

A. 節点法：各節点ごとに作用する力のつり合い条件式を立て軸方向力を求めていく方法。

全体の複数部材の断面力を求める場合によく使われる。

B. 切断法：単純ばりの場合と同様に、求める点でトラスを切断し片側で計算する方法。

ある特定の部材に働く軸方向力を求める場合によく使われる。

4 - A. 節点法

次のトラスを考える。

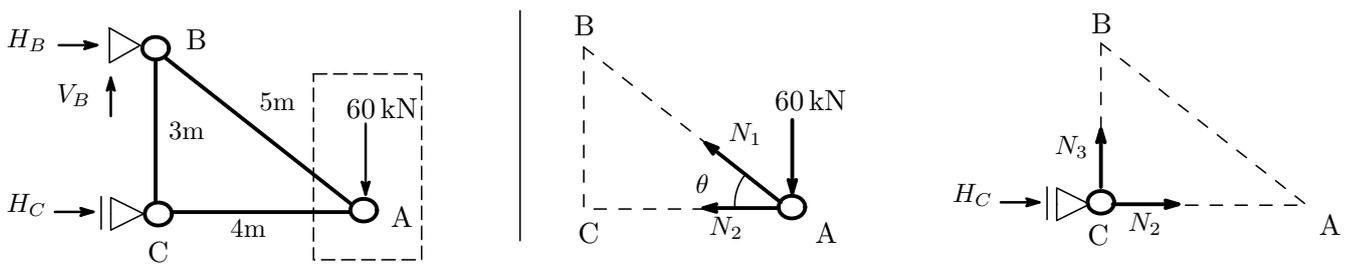


図 4.4: 3部材で構成されたトラス

(1) 反力

力のつり合いの式から

$$\sum X = H_B + H_C = 0 \quad \therefore H_B = -H_C \quad (\text{大きさは同じだが向きは反対}) \quad (4.1)$$

$$\sum Y = V_B - 60 = 0 \quad \therefore V_B = 60 \quad (4.2)$$

$$\sum M = 4 \times 60 - 3 \times H_C = 0 \quad \therefore H_C = 80 \quad (4.3)$$

(2) 軸方向力

A 点に作用する軸方向力を正（引張力）の向きに仮定し、それぞれ N_1 , N_2 とする。節点 A での力のつり合いの式から

$$\sum X = H_B + H_C = -N_2 - N_1 \cos \theta = 0 \quad \therefore N_2 = -(4/5)N_{AB}$$

$$\sum Y = N_1 \sin \theta - 60 = 0 \quad \therefore N_1 = 100, \quad N_2 = -80$$

N_1 は正なので AB 材は引張部材, N_2 はマイナスなので部 C 材は圧縮材となる。

次に節点 C について考える。節点 C には反力 $H_C = 80 \text{ kN}$ と軸方向力 N_2 , N_3 が作用している。力のつり合いの式より

$$\sum X = H_C + N_2 = 80 - 80 = 0, \quad \sum Y = N_3 = 0$$

これから部材 BC の軸方向力は 0 となることがわかる（ゼロ部材！）。

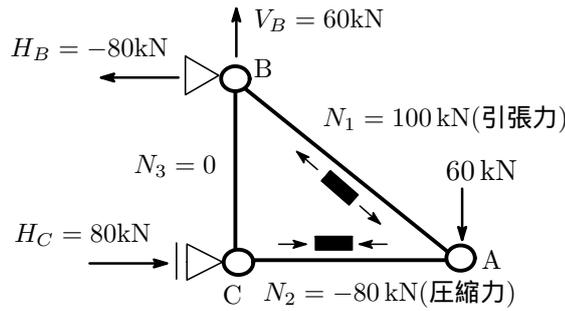


図 4.5: 節点法

補足：図式解法

トラスは「各節点に集まる力がつり合っている」ので、例えば節点 A のまわりの力のベクトルを向きに注意して書くと図 4.6 のようになり、節点にかかる力がつり合うとき力の矢印は一周して閉じる。力のベクトルの始点

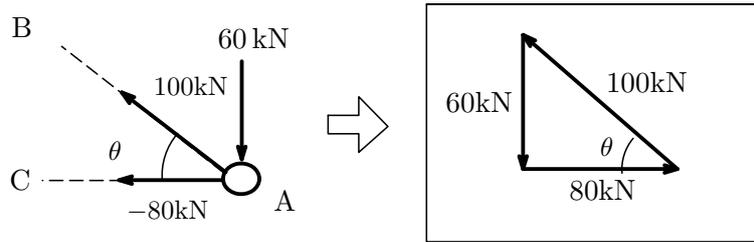


図 4.6: 示力図

と終点をつなぎ合わせた図を示力図 (force diagram) というが、力のつり合いの条件は、図式的には示力図が閉じるということになる。このことを利用して軸方向力を求める方法は図式解法と呼ばれる⁸。なお、先ほど計算したやり方は数式解法と呼ばれる。

exa.1) 次のトラスの軸方向力を図式解法で求めよう。

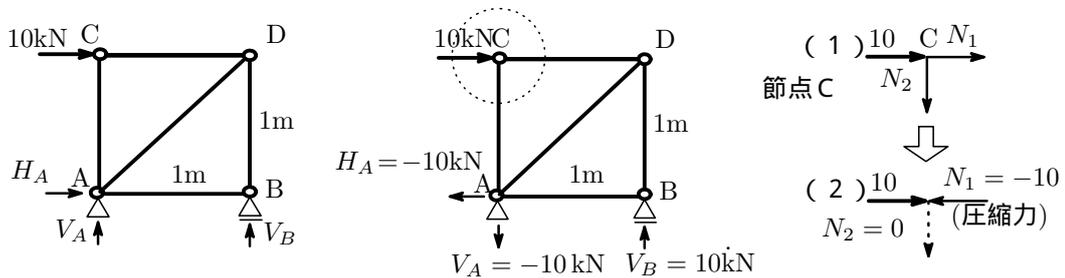


図 4.7: 図式解法

反力を求める。反力の矢印を図 4.7 のように書き込んでおくと、力のつり合いより

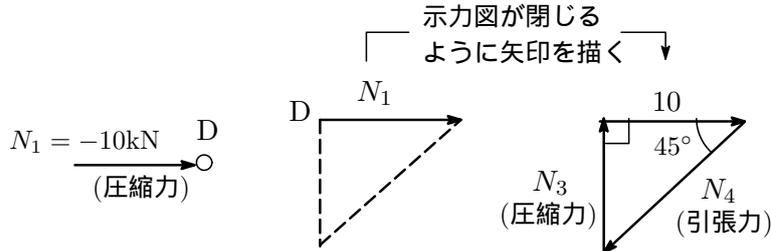
$$\begin{aligned} \sum X &= H_A + 10 = 0 & \therefore H_A &= -10 \\ \sum Y &= V_A + V_B = 0 & \therefore V_A &= -V_B \\ \sum M &= 1 \times 10 - 1 \times V_B = 0 & \therefore V_B &= 10, \quad V_A = -10 \end{aligned}$$

次に、未知の軸応力が 2 つ以下の節点を見つけてそこから解いていく。とりあえず C 点から考えよう。引張力は節点から離れていく方向が正なので図 4.7 の (1) に示すように N_1, N_2 を設定すると、この示力図が閉じるに

⁸ 図式解法をよりシステマティックにしたクレモナ解法があるが詳細は省略。Luigi Cremona: イタリアの数学者 (1830-1903)

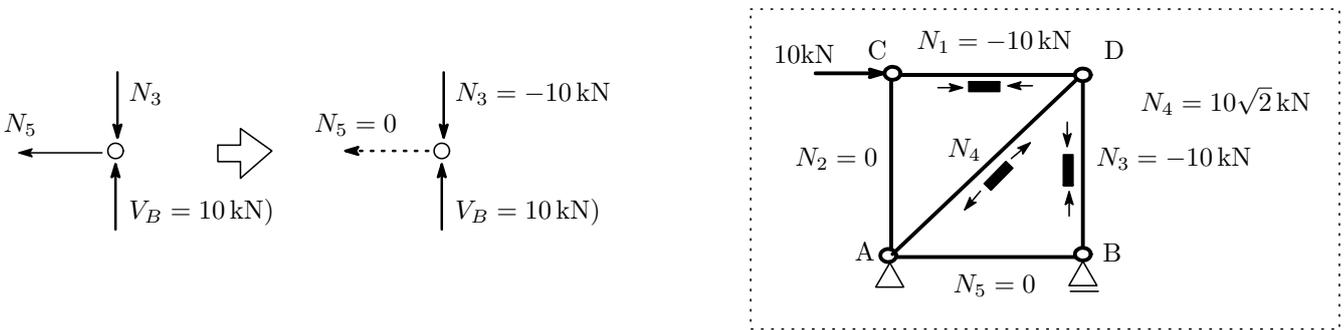
は $N_1 = -10, N_2 = 0$ でなければならない。つまり部材 CD は圧縮材となる。

次に節点 D を考えよう。節点 D には N_1 の圧縮力と未知の N_3, N_4 の軸方向力が働いている。既知の N_1 をベースに矢印が 1 周するように N_4, N_3 の方向を定めてその長さ (力の大きさ) を求めると $N_3 = 10 \text{ kN}, N_4 = 10\sqrt{2} \text{ kN}$



と求まる。 N_3 の矢印の向きは節点 D に向かっているので圧縮力、 N_4 は節点 D から離れる向きなので引張力となることが分かる。

節点 B には反力 $V_B = 10 \text{ kN}$ と先ほど求めた $N_3 = 10 \text{ kN}$ の圧縮力と未知の軸方向力 N_5 が働いているので、示力図を描くと



これから $N_5 = 0$ となる。部材 AB はゼロ部材であることが分かる。

exa.2) ついでにもう一つ、図 4.8 のトラス部材を考えよう。

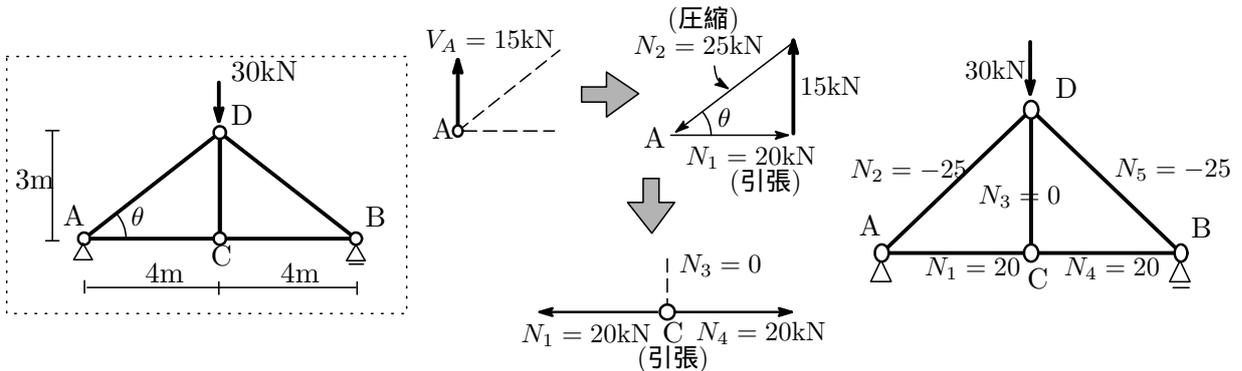


図 4.8: トラス

節点 A, B の反力是对称性から $V_A = V_B = 30 \div 2 = 15 \text{ kN}$ 。節点 A に注目して閉じた示力図を描くと $N_1 = 20 \text{ kN}, N_2 = 25 \text{ kN}$ と得られる。 N_1 の矢印の向きは節点 A から離れる方向なので引張力、一方 N_2 の矢印は節点に向かう方向なので圧縮力となる。 N_1 が得られたので節点 C での閉じた示力図を描くと $N_3 = 0, N_4 = 20 \text{ kN}$ と得られ、 N_4 は引張力となる。

ゼロ部材の見つけ方

ゼロ部材は節点での力のつり合いには関係しない。力のつり合いは示力図が閉じていることなので、ここから

ゼロ部材を見つけることができる。具体的には図 4.9 を参照していただきたい。タイプ 1 とタイプ 2 を示しておく。

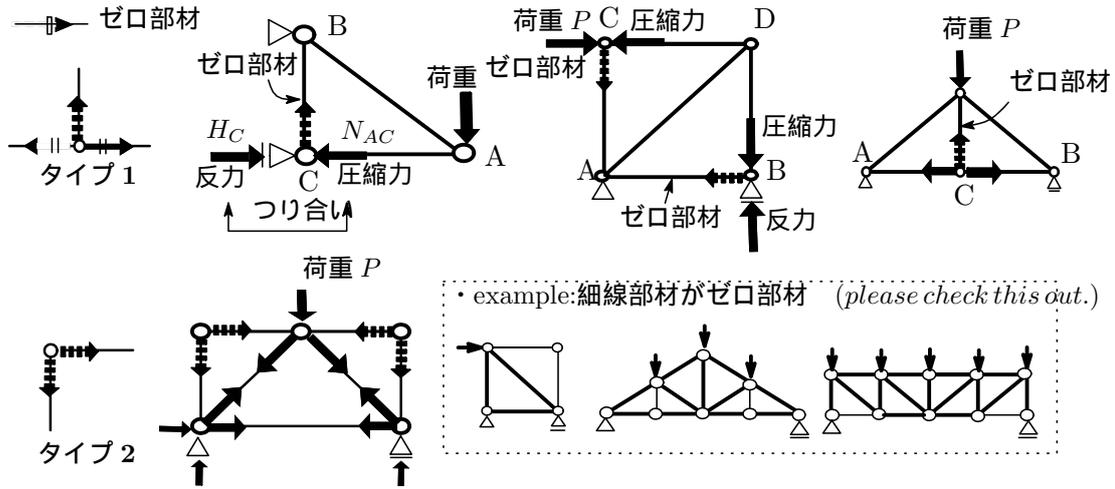


図 4.9: ゼロ部材の見つけ方

4 - B . 切断法

切断法は次の 3 つのステップを踏む。

- 1) 軸方向力を求める部材のある箇所で切断する。ただし、切断する部材の数は 3 つ以下とする。
ただし、軸方向力が分かっている部材を含めれば切断する部材が 4 つでも構わない。
- 2) 切断した部材の軸方向力 N_1, N_2, N_3 を設定する。
- 3) 力のつり合いの式を立て、これを解いて軸方向力を求める。

それでは次の片持ちばり系トラスの軸方向力を求めよう。

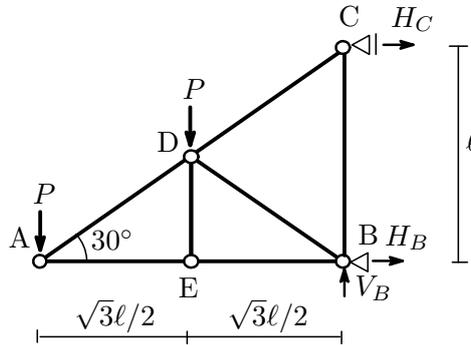


図 4.10: 片持ちばり系トラス

(1) 反力

力のつり合いより

$$\sum X = H_B + H_C = 0 \quad \therefore H_B = -H_C$$

$$\sum Y = V_B - 2P = 0 \quad \therefore V_B = 2P \tag{4.4}$$

$$\sum M_B = -\sqrt{3}l \times P - \frac{\sqrt{3}l}{2} \times P + l \times H_C = 0 \quad \therefore H_C = \frac{3\sqrt{3}}{2}P, H_B = -\frac{3\sqrt{3}}{2}P \tag{4.5}$$

(2) 軸方向力

図中 (a) の切断面について考える。部材 DE はゼロ部材なので軸方向力は 0 である。各部材の断面に軸方向力 N_1, N_2, N_3 を図のように仮定すると力のつり合いより

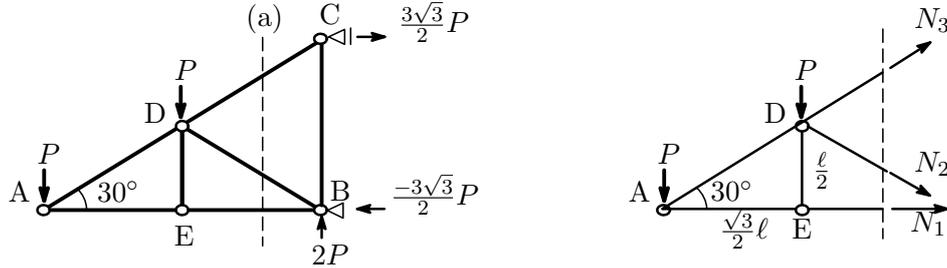


図 4.11: 切断法 (その 1)

$$\begin{aligned}\sum X &= N_1 + N_2 \cos 30^\circ + N_3 \cos 30^\circ = N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_3 = 0 \\ \sum Y &= -N_2 \sin 30^\circ + N_3 \sin 30^\circ - 2P = -\frac{1}{2} N_2 + \frac{1}{2} N_3 - 2P = 0 \\ \sum M_D &= -\frac{\sqrt{3}\ell}{2} \times P - \frac{\ell}{2} \times N_1 = 0\end{aligned}$$

これから

$$N_1 = -\sqrt{3}P (\text{圧縮}), \quad N_2 = -P (\text{圧縮}), \quad N_3 = 3P (\text{引張}) \quad (4.6)$$

同様に (b) で切断すると

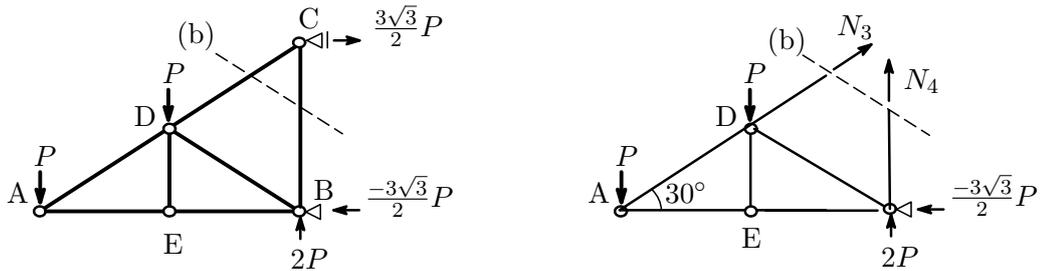


図 4.12: 切断法 (その 2)

$$\sum Y = N_4 + N_3 \sin 30^\circ - 2P + 2P = N_4 + N_3 \sin 30^\circ = 0 \quad \therefore N_4 = -\frac{3}{2}P (\text{圧縮})$$

次に (c) で切断して

$$\sum X = -N_1 - N_5 \cos 30^\circ = \sqrt{3}P - \frac{\sqrt{3}}{2} N_5 = 0 \quad \therefore N_5 = 2P (\text{引張})$$

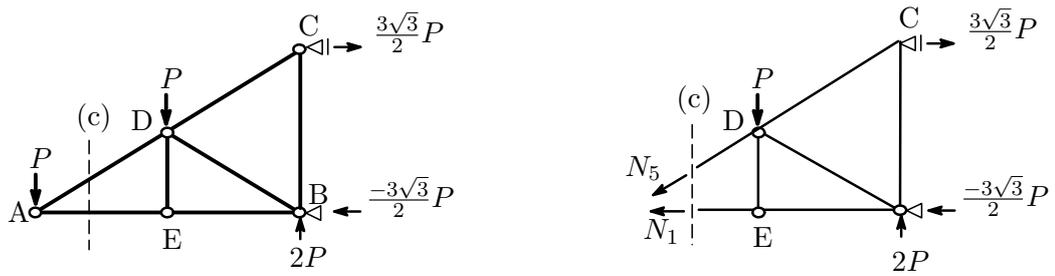


図 4.13: 切断法 (その3)

ということでこのトラスの軸方向力は次のようになる。

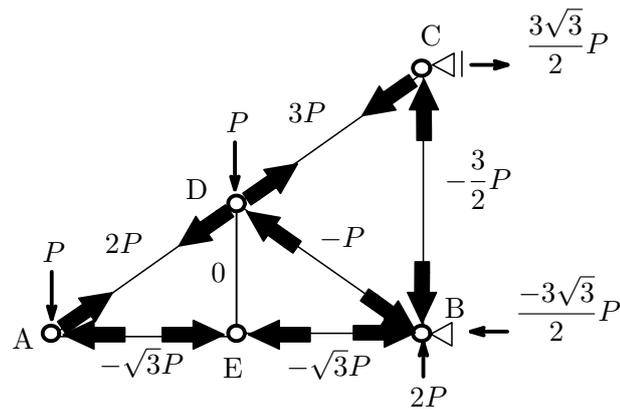


図 4.14: トラス構造の軸方向力

(蛇足) 図 4.14 の軸方向力を眺めていると力の伝わり方がよく見え、また、ゼロ部材のこともよく分かると思う。

構造物の安定と不安定

構造物は安定構造物と不安定構造物に大別できる。安定構造物は外力を受けても力がつり合い静止する構造物のことで、一応、力のつり合いの式ですべての反力、断面力が求められる。一方、不安定構造物は、変形したら形が元に戻らなかったり元の状態を維持できなったりする。

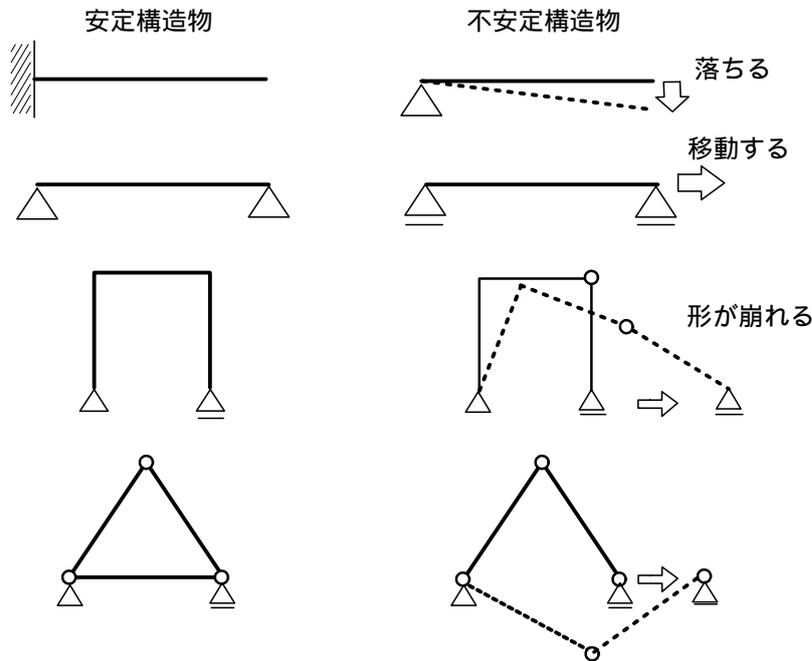
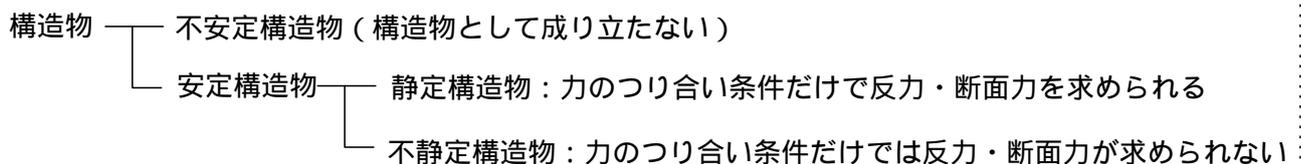


図 5.1: 安定・不安定構造物

安定構造物は”一応”つり合いの式ですべての反力、断面力が求められるといったが、つり合いの式だけでは反力、断面力が求められないものもある。前者を静定構造物というのに対し、後者を不静定構造物という。頭に「不」の文字が付いているが不安定の「不」ではないことに留意されたい。



不静定構造物は力のつり合い条件式だけでは反力や断面力を求めることができない構造物で、安定を保つための最小限必要な拘束(数)より多くの拘束(数)を受けている構造物である。力のつり合いの式以外に必要な条件式の数を不静定次数といい m で表す。

不静定次数

図 5.2 の単純ばりを考えよう。(1) の単純ばりは未知数となる反力が 4 つ, (2) は 5 つ存在する。つり合いの 3 式より数が多いので, つり合いの式だけでは反力が求められない。例えば (1) の単純ばりでは力のつり合いの式より

$$\sum X = H_B = 0, \quad \sum Y = V_A + V_B - w\ell = 0, \quad \sum M = -\frac{w\ell^2}{2} + M_B = 0$$

$$\therefore V_A + V_B = w\ell, \quad M_B = \frac{w\ell^2}{2}, \quad H_B = 0$$

となるが, 個々の反力をこれ以上求めることはできない。求めるための条件式が 1 つ不足している。これを 1 次不静定 ($m = 1$) の単純ばりという。(2) の単純ばりは 2 次不静定 ($m = 2$) となる。

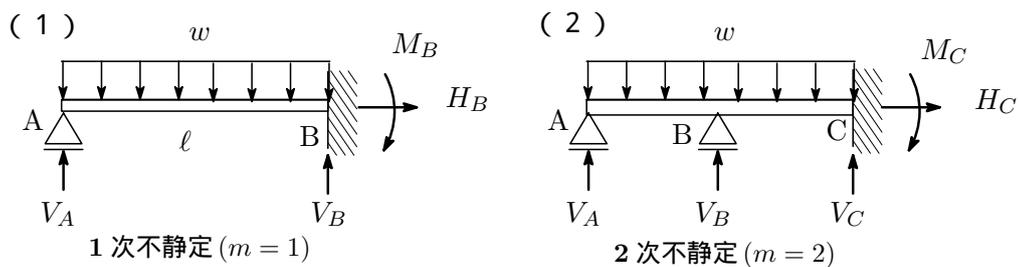


図 5.2: 不静定次数

判別式

構造物が安定か不安定化か, 静定か不静定かの判断は次の判別式⁹で判断できる。

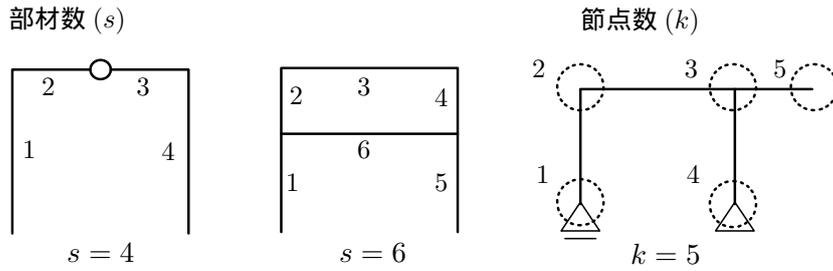
$$\text{判別式} \quad m = s + n + r - 2k \quad \begin{cases} s: \text{部材数} & r: \text{剛接合部材数} \\ n: \text{反力の数} & k: \text{節点数} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$m = 0: \text{安定・静定} \quad m > 0: \text{安定・不静定} \quad m < 0: \text{不安定}$$

- ・部材数: 各支点および節点 (自由端を含む) 間ならびに支点と節点との間の部材を 1 部材と数える。
- ・剛接合部材数: 1 つの部材に注目し, その部材に剛接合でつながっている他の部材の数。あるいは剛接合された部材の数から 1 を差し引いた数。
- ・節点数: 自由端を含む節点の数。

下手な説明をするより図を見た方が早いと思うので図 5.3 を参照していただきたい。

⁹別の判別式はあとで触れる。



剛接合部材数

- (1) 注目する部材に剛接合している他の部材の数
- (2) 剛接合している部材の本数 - 1

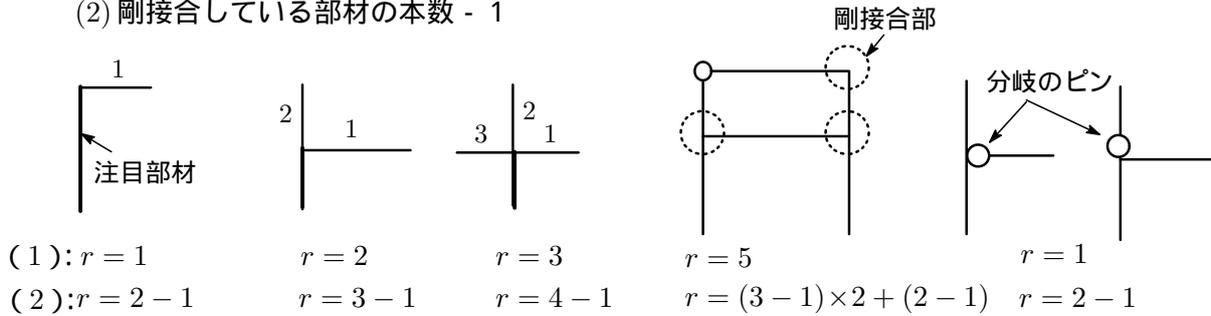


図 5.3: 部材数, 節点数, 剛接合部材数の数え方

判別式による判定

それではさっそく判別式を使って (1) から (10) までの構造物を判定してみよう。

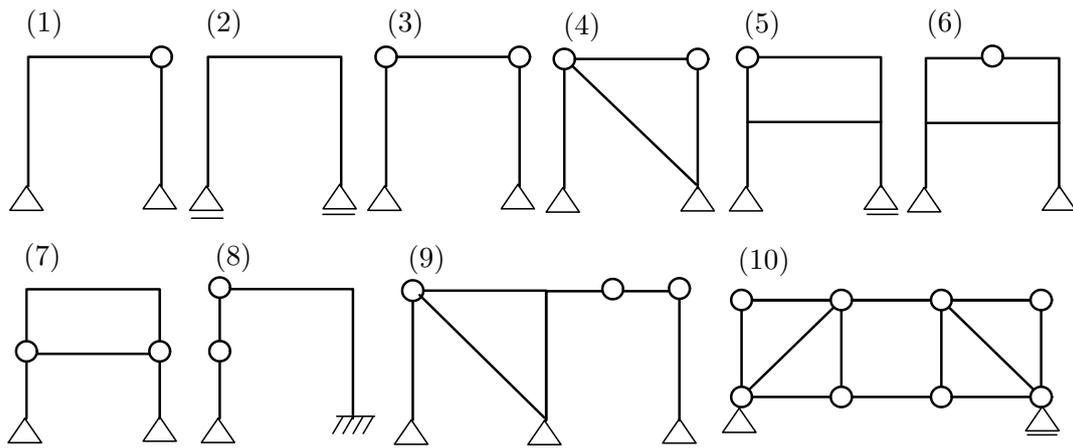


図 5.4: 構造物の判定

- (1) $s = 3, n = 2 + 1 = 3, r = 1, k = 4$ で $m = -1$: 不安定構造物。
- (2) $s = 3, n = 1 + 1 = 2, r = 2, k = 4$ で $m = -1$: 不安定構造物。
- (3) $s = 3, n = 2 \times 2 = 4, r = 0, k = 4$ で $m = -1$: 不安定構造物。
- (4) (1) に筋交いが一本入っている。 $s = 4, n = 2 \times 2 = 4, r = 0, k = 4$ で $m = 0$: 安定構造物。
- (5) 剛接合部材数に注意が必要。この場合, $r = 5$ となり, $s = 6, n = 2 + 1 = 3, k = 6$ で $m = 2$: 2次不静定構造物。
- (6) $s = 7, n = 2 \times 2 = 4, r = 6, k = 7$ で $m = 3$: 3次不静定構造物。

- (7) $s = 6, n = 2 \times 2 = 4, r = 2, k = 6$ で $m = 0$: 安定構造物。
 (8) $s = 4, n = 2 + 3 = 5, r = 1, k = 5$ で $m = 0$: 安定構造物。
 (9) $s = 7, n = 2 \times 2 + 1 = 5, r = 2, k = 7$ で $m = 0$: 安定構造物。
 (10) $s = 12, n = 2 + 1 = 3, r = 0, k = 8$ で $m = -1$: 不安定構造物。

判別式 (その2)

この判別式も先ほどの判別式と同じことをいっているが、視点が異なっている。

$$\text{判別式 } m = n + j - 3s \quad \begin{cases} n: \text{支点反力の数 (拘束度)} \\ j: \text{接点拘束度} \\ s: \text{部材数} \end{cases} \quad (5.2)$$

$m = 0$: 安定・静定 $m > 0$: 安定・不静定 $m < 0$: 不安定

部材 1 本に対して力のつり合い条件は 3 個なので部材 s 本では $3s$ 個となる。 $n + j$ はこれから求めようとする未知数の数。したがって、その差は力のつり合い条件だけでは解けない未知数の数で不静定次数 m となる。

表 1 に支点、接合点における拘束度の数を示しておく。なお、 S は節点に集まる部材の本数を表す。

表 1: 支点・接合点における拘束度

支点	拘束度 (n)	接合点	拘束度 (j)
固定支点	$n = 3$	剛接合	$j = 3(S - 1)$
ピン支点	$n = 2$	ピン接合	$j = 2(S - 1)$
ローラー支点	$n = 1$		

n や j の数の数え方は図 5.5 を参照。

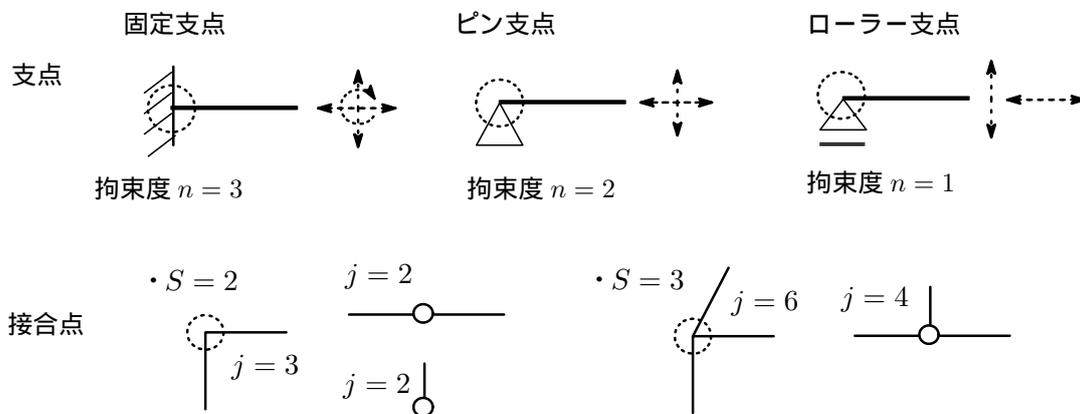


図 5.5: 支点・節点の種類と拘束度

この判別式を使って図 5.4 の (3) と (6) の構造物を判定してみよう。

(3) の 2 つの支点はピン節点なので拘束度は $n = 2 \times 2 = 4$ 。節点拘束度はピン節点ばかりなので

$j = 2(2 - 1) \times 2 = 4$ 。部材の数は $s = 3$ で $m = n + j - 3s = 1$ となって 1 次の不静定構造物。

(6) は $n = 4$, $j = 6 + 3 + 2 + 3 + 6 = 20$, $s = 7$ より $m = 3$ となって 3 次の不静定構造物と判定できる。

以下の構造物を判別式で判定した結果は次の通り。

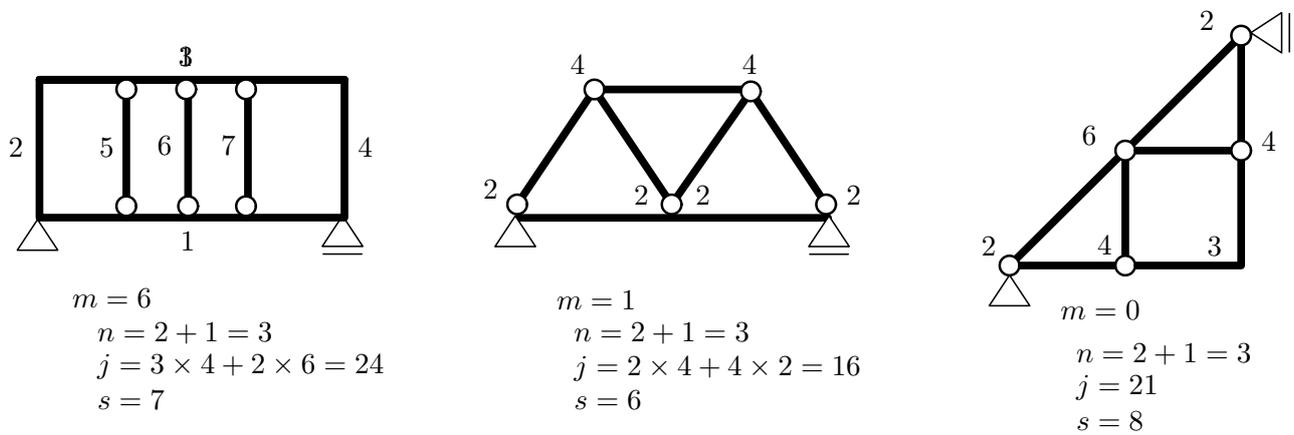


図 5.6: 判別式その 2

次の構造物を判別式その 2 を使って判定してみよう。

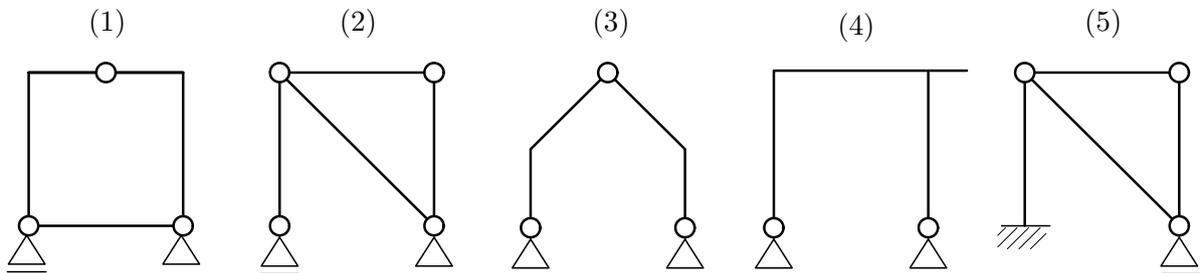


図 5.7: 判別式その 2 の問題

結果をまとめると次表のようになる。

	n	j	s	m	判定
(1)	3	12	5	0	安定
(2)	3	8	4	-1	不安定
(3)	3	8	4	-1	不安定
(4)	3	9	4	0	安定
(5)	4	6	3	1	1 次不静定

第6話.

静定構造物の変形 (1)

第1話から第4話では、はりやラーメン、トラスなどの構造物に荷重が作用したときの反力や断面力の求め方について説明してきた。構造物は荷重の作用によって変形し、変形がきつくなると構造物の崩壊につながる。したがって、設計段階で変形量を計算しておく必要があるし、安全上必須の要件。第6話では特に「はりの曲げ変形」についての基本的な計算のやり方を説明しよう。

曲げによる変形 (たわみとたわみ角)

持ちばりの変形をとりあげよう。片持ちばりの自由端 A 点に荷重 P がかかると A 点は押し下げられて斜めに傾く。この押し下げられた量 (変形量) を A 点の「たわみ」、傾いた角度 (変形角) を A 点の「たわみ角」という。それぞれ δ_A と θ_A で表す。A 点は自由端とは限らず、はりの任意の位置 C 点での「たわみ」 δ_C と「たわみ角」 θ_C がある。大抵は最大たわみと最大たわみ角に関心があるので、自由端を問題にすることが多い。

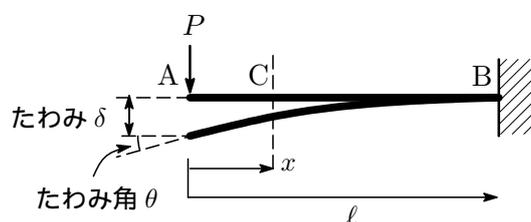


図 6.1: 片持ち梁のたわみとたわみ角

図 6.2 にはりの曲げ変形前後の図を示す。図のように曲がれば、はりの上面は圧縮され、下面は引張られる。当然、上面と下面の間には変形で長さの変化しない場所があり、これを中立軸 (中立面) と呼んでいる。はりの曲げ変形の曲線を円弧と見做せば、曲率半径 ρ とその逆数 $1/\rho$ を曲率 κ が設定できる。

まあ、今後、説明の都合上、 y 軸は鉛直下方を正の向きにとることとする。

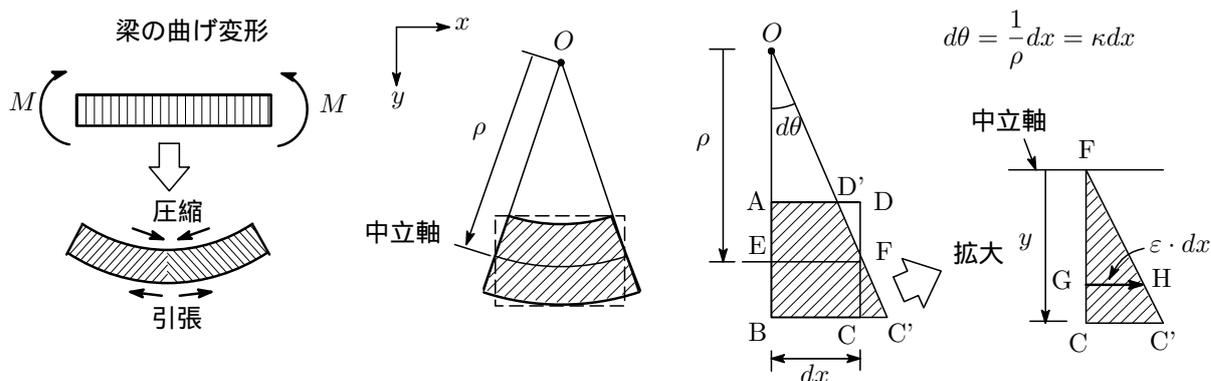


図 6.2: 梁の曲げ変形

さて、はりは曲線的に変形するが、微小変形なので直線で近似し、長方形 ABCD が曲げられて台形

ABC'D' に変形したとして、中立軸から下方 y 離れた場所のひずみを考える。BC の長さを dx とすると GH の長さはひずみを ε として $\varepsilon \cdot dx$ である。△OEF と △FGH は相似形なので

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{\varepsilon \cdot dx}{y}$$

が成り立ち、これからひずみは

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (6.1)$$

フックの法則からこの場所の応力は

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} y \quad (6.2)$$

と表され、 σ は y に比例することが分かる¹⁰。 σ は曲げ変形によりはりの内部に発生した応力で、縮んだ部分には圧縮応力、伸びた部分には引張応力が断面に垂直に作用する。このように、はりに曲げモーメントが作用したとき、はりに生じる垂直応力をとくに曲げ応力 (bending stress) と呼んでいる。

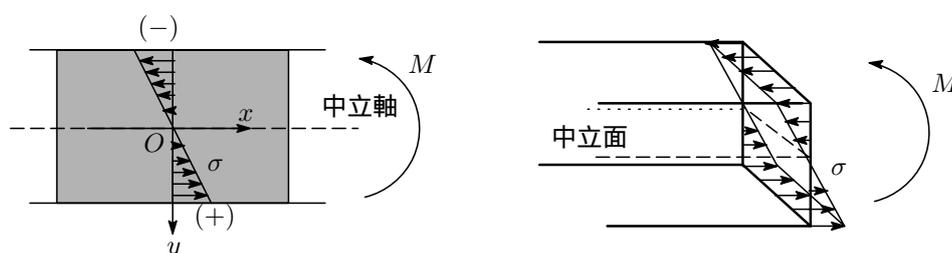


図 6.3: 曲げ応力 σ の y 軸方向の変化

中立軸から距離 y 離れた位置の微小面積 dA を考えよう。そこに作用している力は応力 \times 面積 $= \sigma dA$ で、この力は中立軸まわりに $y \times \sigma dA$ なる力のモーメントを引きおこす。このモーメントを断面全体で足し合わせたものがその断面に作用している曲げモーメントで、曲げモーメントは

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \quad (6.3)$$

と表せる。ここでヤング率 E や密度 ρ は一定とした。

$$I \equiv \int_A y^2 dA \quad (6.4)$$

とおくと

$$M = \frac{EI}{\rho} = \kappa EI \quad (6.5)$$

と表せる。 I を断面の 2 次モーメントといい、その値は断面の形によって決まる。 EI は曲げ変形のしにくさを示す指標で曲げ剛性と呼ばれる。

(6.2) と (6.5) より

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (6.6)$$

曲げ応力 σ は曲げモーメント M に比例する。また、 σ は中立軸で 0 で縁端部で最大値をとる¹¹ことが分かる。

¹⁰ 比例常数 E はヤング率とか弾性係数と呼ばれる。

¹¹ 縁端部の応力を縁応力という。

ex) 断面が幅 $b = 180$ × 高さ $h = 240$ mm のはりに $M = 50$ kNm の曲げモーメントが作用するとき，梁の断面に生じる曲率と最大垂直応力を求めてみよう。 $E = 2.074 \times 10^5$ N/mm² , $I = 2.0 \times 10^8$ mm⁴ とする。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{50 \times 10^6}{2 \times 10^5 \times 2.074 \times 10^8} = 1.205 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$\sigma = \frac{M}{I} \times \frac{h}{2} = \frac{50 \times 10^6}{2.074 \times 10^8} \times \frac{240}{2} = 28.9 \text{ N/mm}^2 \quad //$$

さて，曲げによる変形の話は第 8 話で詳しくとりあげるので，ここではこれくらいにして第 6 話の主題であるたわみ δ とたわみ角 θ を求める計算法の話に入ろう。計算の方法としては大体次の 3 つが代表的である。

- (A) 仮想仕事法による計算
- (B) たわみ曲線の微分方程式による解法
- (C) モールの定理により計算

第 6 話では仮想仕事法をみていこう。

A . 仮想仕事法による計算の方法

仮想仕事の原理

仮想仕事の原理は「外力のなした仕事量は内力のなした仕事量に等しい」という原理で，これから

「仮想外力が実変位に対してなす仕事は，仮想内力が実変位に対してなす仕事に等しい」

ことが導かれる。詳しい導出のやり方はここでは略する。内力の仕事量は

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{せん断力による仕事量} & : \int Q\gamma dx \\ \text{曲げモーメントによる仕事量} & : \int M d\theta = \int M\kappa dx \quad (d\theta = \kappa dx) \\ \text{軸方向力による仕事量} & : \int N\varepsilon dx \end{array} \right. \quad (6.7)$$

で定義されるが，はりやラーメンでは曲げモーメントによる仕事量がせん断力や軸方向力による仕事量より圧倒的に大きい¹²ので，通常，これらの仕事量は無視している。

図 6.4 をご覧いただきたい。はりの自由端 A に外力 P が作用し，たわみ δ を生じてつり合っている。これを実体系と呼ぶことにする。実体系のはり内部では曲率 κ の変形が生じ，曲げモーメント M の断面力が発生している。外力のなした仕事は $W_{\text{ex}} = P\delta$ ，内力のなした仕事は $W_{\text{in}} = \int_0^{\ell} M\kappa dx$ で，つり合いからこの両者の仕事量は等しい¹³。

$$P\delta = \int_0^{\ell} M\kappa dx \quad (6.8)$$

¹²第 9 話参照

¹³ δ は仮想変位ではない。誤解のないように。

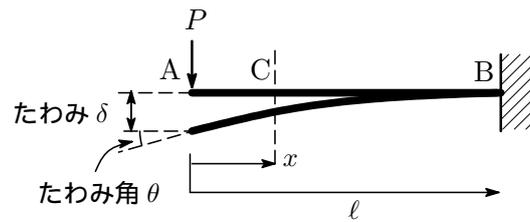


図 6.4: 片持ち梁のたわみとたわみ角

ここで，外力 P を仮想外力 \bar{P} として考えると，仮想内力は \bar{P} によって生じる仮想曲げモーメント \bar{M} となる。このような仮想外力，仮想内力が働く系を「仮想系」という。はりがつり合いの状態にあるとき，仮想外力のなした仕事量は仮想内力のなした仕事量に等しいという仮想仕事の原理より

$$\bar{P} \delta = \int_0^{\ell} \bar{M} \kappa dx \quad (6.9)$$

が成り立つ。(6.9) を仮想仕事の式という¹⁴。仮想外力 \bar{P} は任意なので $\bar{P} = 1$ (単位荷重) とすれば，変位 δ は (6.9) より

$$\delta = \int \bar{M} \kappa dx \quad (6.10)$$

で表される。曲率 κ と曲げモーメント M は $M = \kappa EI$ の関係にあるので，これを上式に代入して

$$\delta = \int \bar{M} \left(\frac{M}{EI} \right) dx \quad (6.11)$$

を得る。

同様にしてたわみ角 θ を求めるには仮想外力モーメント \bar{M}_{ex} のなした仕事は仮想曲げモーメント \bar{M} のなした仕事に等しいので

$$\bar{M}_{\text{ex}} \theta = \int \bar{M} \kappa dx \quad (6.12)$$

ここで $\bar{M}_{\text{ex}} = 1$ とすると

$$\theta = \int \bar{M} \left(\frac{M}{EI} \right) dx \quad (6.13)$$

が得られる。このように，求めようとする変位やたわみ角の位置に仮想単位荷重，仮想単位モーメントを作用させた仮想系を考え，仮想仕事の原理を適用して変位やたわみ角を求めていく方法を「単位荷重法」と呼んでいる¹⁵。具体的な計算手順は次の通りである。

- 1) 実荷重を作用させた場合の場合の曲げモーメント M を求める。
- 2) 実荷重を除いた仮想系で，たわみ δ を求めたい点に仮想単位荷重 $\bar{P} = 1$ を作用させ，仮想曲げモーメント \bar{M} を求める。
- 3) 実荷重を除いた仮想系で，たわみ角 θ を求めたい点に仮想単位モーメント荷重 $\bar{M} = 1$ を作用させ，仮想曲げモーメント \bar{M} を求める。

¹⁴仮想荷重 \bar{P} と実体ばりの変位 δ を掛けた仕事量は仮想系の曲げモーメント \bar{M} と実体ばりの曲率 κ を掛けて積分したものに等しいということである。

¹⁵かなり端折った説明で，腑に落ちない方は参考文献の 3) を参照されたい。

4) (6.11), (6.13) に M, \bar{M} を代入して積分を行い, たわみ δ とたわみ角 θ を求める。

さっそく具体的な問題に当たっていこう。

A - 1 . 片持ちばり・集中荷重

(1) たわみ δ_A を求める

図 6.4 の片持ちばりの自由端 A のたわみ δ_A を求める。実荷重が作用している片持ちばりの曲げモーメントは

$$M = -Px \quad (6.14)$$

自由端 A のたわみを求めたいので A 点に仮想単位荷重を作用させる。このときの仮想曲げモーメントは

$$\bar{M} = -x \quad (6.15)$$

したがって自由端 A 点のたわみは

$$\delta_A = \int_0^\ell \bar{M} \left(\frac{M}{EI} \right) dx = \int_0^\ell -x \left(\frac{-Px}{EI} \right) dx = \int_0^\ell \frac{Px^2}{EI} dx = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (6.16)$$

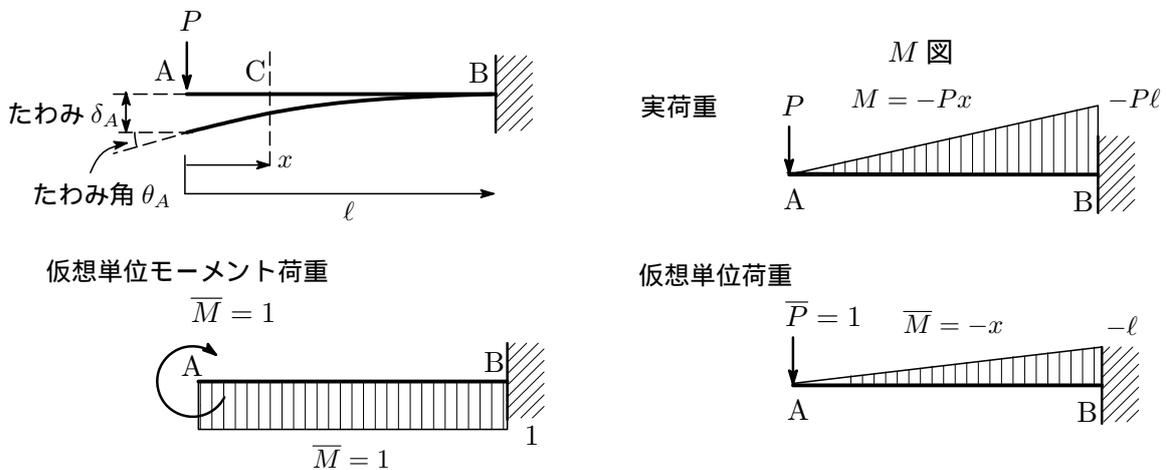


図 6.5: 仮想仕事法

(2) たわみ角 θ_A を求める

自由端 A のたわみ角 θ_A を求めたいので, A 点に仮想単位モーメントを作用させた仮想系を考える。このときの仮想曲げモーメント¹⁶は

$$\bar{M} = 1 \quad (6.17)$$

したがって, たわみ角 θ_A は

$$\theta_A = \int_0^\ell \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \int_0^\ell 1 \cdot \frac{-Px}{EI} dx = -\frac{P\ell^2}{2EI} \quad (6.18)$$

マイナス符号は仮定した単位モーメント荷重の方向に対して逆方向にたわみ角が生じることを意味している。

¹⁶モーメント荷重は梁のすべての位置に等しいモーメントの影響を与える。

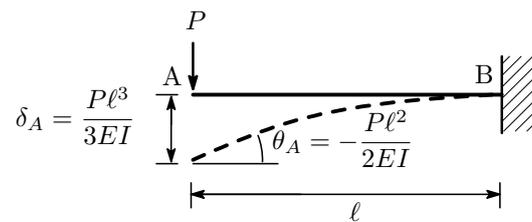


図 6.6: たわみとたわみ角

(ex.1) ヤング率 $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, 断面 2 次モーメント $I = 4.68 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $l = 5 \text{ m}$ のほりに $P = 30 \text{ kN}$ の荷重がかかっている場合の最大たわみ δ_A とたわみ角 θ_A は

$$\delta_A = \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{30 \times 5^3}{3 \times 2 \times 10^8 \times 4.68 \times 10^{-4}} = 0.0134 \text{ (m)}$$

$$\theta_A = -\frac{P\ell^2}{2EI} = -\frac{30 \times 5^2}{2 \times 2 \times 10^8 \times 4.68 \times 10^{-4}} = -4.006 \times 10^{-3} \text{ (rad)} = -0.23^\circ$$

A - 2 . 単純ばり・集中荷重

長さ l の単純ばりの中点 C に荷重 P が作用している。支点 A から $l/4$ の位置のたわみ δ_C を求めよう。

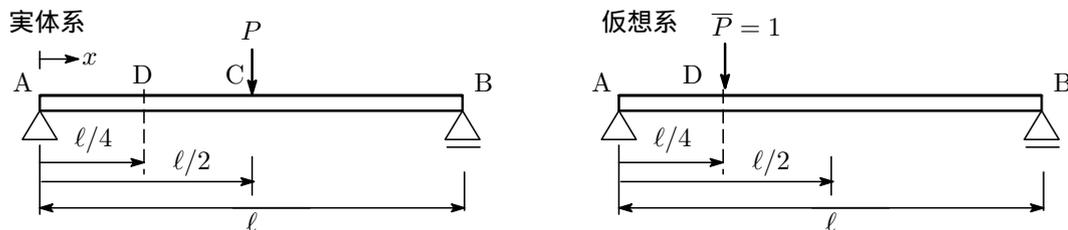


図 6.7: 単純ばり・集中荷重

実体系の単純ばりの曲げモーメントは

$$\begin{cases} \text{区間 AC } (0 \leq x \leq \ell/2) & M_x = \frac{Px}{2} \\ \text{区間 CB } (\ell/2 \leq x \leq \ell) & M_x = \frac{P(\ell-x)}{2} \end{cases} \quad (6.19)$$

いま, D 点のたわみ δ_D を求めたいので, 仮想系単純ばりの D 点に仮想単位荷重 $\bar{P} = 1$ を作用させる。このときの仮想曲げモーメントは

$$\begin{cases} \text{区間 AD } (0 \leq x \leq \ell/4) & \bar{M}_x = \frac{3x}{4} \\ \text{区間 DB } (\ell/4 \leq x \leq \ell) & \bar{M}_x = \frac{(\ell-x)}{4} \end{cases} \quad (6.20)$$

したがってたわみ δ_D は

$$\begin{aligned} \delta_D &= \int \bar{M}_x \frac{M_x}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{\ell/4} \frac{3x}{4} \frac{Px}{2} dx + \int_{\ell/4}^{\ell/2} \frac{(\ell-x)}{4} \frac{Px}{2} dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{(\ell-x)}{4} \frac{P(\ell-x)}{2} dx \right\} \\ &= \frac{11P\ell^2}{768EI} \end{aligned} \quad (6.21)$$

注：この例は「たわみ δ を求めたい点に仮想荷重を作用させた仮想系」を考え、実体系の曲げモーメント M と仮想系の曲げモーメント \bar{M} を使って

$$\delta = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx \quad (6.22)$$

よりたわみを求める好例の一つ。

A - 3 . 単純ばり・等分布荷重

等分布荷重 w が作用した単純ばりの中央 C 点におけるたわみ δ_C と支点 A のたわみ角 θ_A を求めよう。

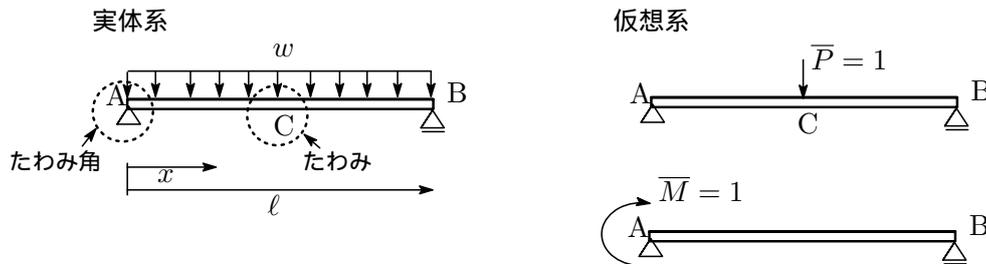


図 6.8: 単純梁・等分布荷重のたわみ

(1) たわみ δ_C を求める

等分布荷重単純ばり（実体系）の任意の点での曲げモーメントは

$$M = \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (6.23)$$

いま、はりの中央 C 点のたわみを求めたいので、C 点に単位仮想荷重 $\bar{P} = 1$ を作用させた仮想ばりを考える。このはりの仮想曲げモーメントは

$$\begin{cases} \text{区間 AC } (0 \leq x \leq \ell/2) & \bar{M}_x = \frac{x}{2} \\ \text{区間 CB } (\ell/2 \leq x \leq \ell) & \bar{M}_x = \frac{\ell - x}{2} \end{cases} \quad (6.24)$$

したがって

$$\begin{aligned} \delta_C &= \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{\ell/2} \frac{x}{2} \left(\frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{\ell - x}{2} \left(\frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx \right\} \\ &= \frac{5w\ell^4}{384EI} \end{aligned} \quad (6.25)$$

(2) たわみ角 θ_A を求める

支点 A のたわみ角 θ_A を求めたいので、A 点に仮想単位モーメント荷重 $\bar{M} = 1$ を作用させた仮想系を考える。仮想曲げモーメント \bar{M} は

$$\bar{M} = 1 - \frac{x}{\ell} \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (6.26)$$

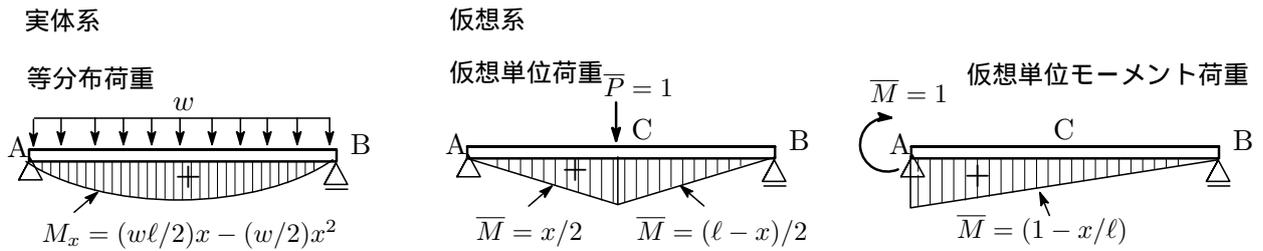


図 6.9: M 図

であたえられるので,

$$\begin{aligned} \theta_A &= \int_0^\ell \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(\frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2\right) dx \\ &= \frac{w\ell^3}{24EI} \end{aligned} \tag{6.27}$$

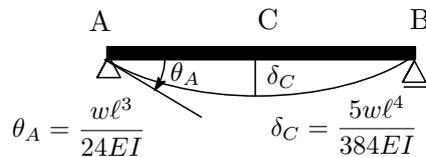


図 6.10: 単純ばりのたわみとたわみ角

(ex.2) ヤング率 $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, 断面 2 次モーメント $I = 4.68 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $\ell = 5 \text{ m}$ の単純梁に $w = 10 \text{ kN/m}$ の荷重がかかっているときの最大たわみ δ_C とたわみ角 θ_A は

$$\begin{aligned} \delta_C &= \frac{5w\ell^4}{384EI} = \frac{5 \times 10 \times 5^4}{384 \times 2 \times 10^8 \times 4.68 \times 10^{-4}} = 8.69 \times 10^{-4} \text{ (m)} \\ \theta_A &= -\frac{w\ell^3}{24EI} = -\frac{10 \times 5^3}{24 \times 2 \times 10^8 \times 4.68 \times 10^{-4}} = -5.56 \times 10^{-4} \text{ (rad)} \end{aligned}$$

A - 4 . 単純ばり・モーメント荷重

単純ばりの C 点にモーメント荷重 M_C が作用しているとき, C 点のたわみ δ_C とたわみ角 θ_C を求めよう。少し復習もかねて反力や断面力を求める計算をしておこう。ご存知の方はここを飛ばして読み進められるとよい。

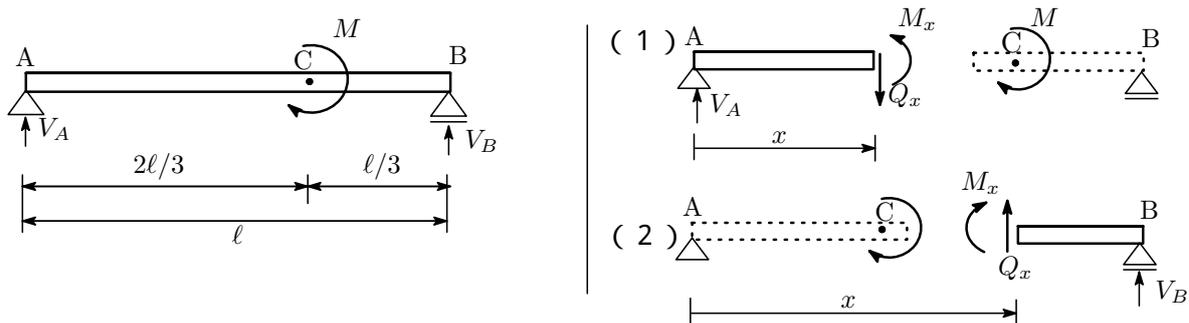


図 6.11: モーメント荷重

支点 A, B の反力を V_A, V_B とすると水平力の作用はないので, 力のつり合いの式から

$$-V_A - V_B = 0, \quad M - \ell \times V_B = 0 \quad \therefore V_A = -\frac{M}{\ell}, \quad V_B = \frac{M}{\ell} \quad (6.28)$$

次に, 支点 A から $x (0 \leq x \leq 2\ell/3)$ の距離で仮想切断し, その位置の断面力を Q_x, M_x とすると

$$-V_A + Q_x = 0, \quad x \times V_A - M_x = 0 \quad \therefore Q_x = -\frac{M}{\ell}, \quad M_x = -\frac{M}{\ell}x \quad (6.29)$$

支点 B から $x (2\ell/3 \leq x \leq \ell)$ の距離で仮想切断しその位置での断面力を Q_x, M_x とすると

$$-V_B - Q_x = 0, \quad -(\ell - x) \times V_B + M_x = 0 \quad \therefore Q_x = -\frac{M}{\ell}, \quad M_x = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)M$$

このはりの M 図は図 6.12 となる。

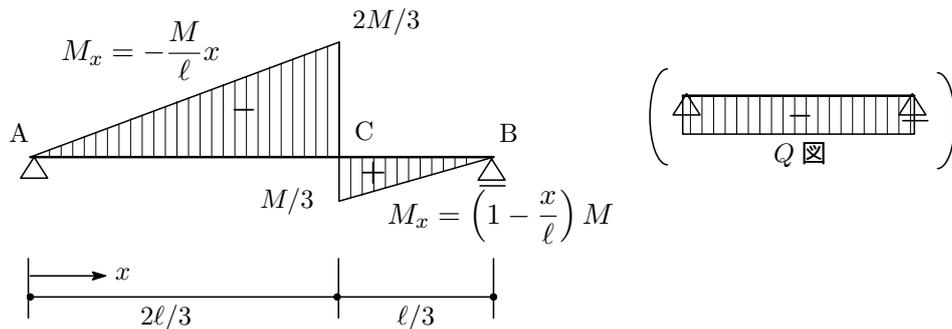


図 6.12: モーメント荷重の M 図

(1) たわみ δ_C を求める

C 点に仮想単位荷重 $\bar{P} = 1$ を作用させたときの仮想曲げモーメント \bar{M} と C 点に仮想単位モーメント $\bar{M} = 1$ を作用させたときの仮想曲げモーメント \bar{M} の M 図は次の通り。

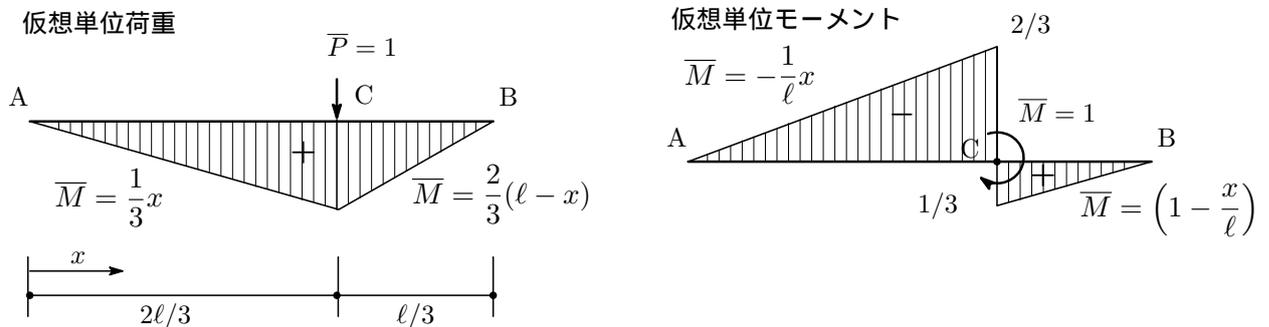


図 6.13: 仮想単位荷重と仮想単位モーメント荷重

したがってたわみ δ_C は

$$\begin{aligned} \delta_C &= \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{2\ell/3} \frac{1}{3}x \left(-\frac{M}{\ell}x\right) dx + \int_{2\ell/3}^{\ell} \frac{2}{3}(\ell - x) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) M dx \right\} = -\frac{2M\ell^2}{81EI} \end{aligned}$$

(2) たわみ角 θ_C を求めるたわみ θ_C は

$$\theta_C = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{2\ell/3} \left(-\frac{x}{\ell}\right) \left(-\frac{M}{\ell}x\right) dx + \int_{2\ell/3}^{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) M dx \right\} = \frac{M\ell}{9EI}$$

A - 4 . 単純ばり系ラーメン

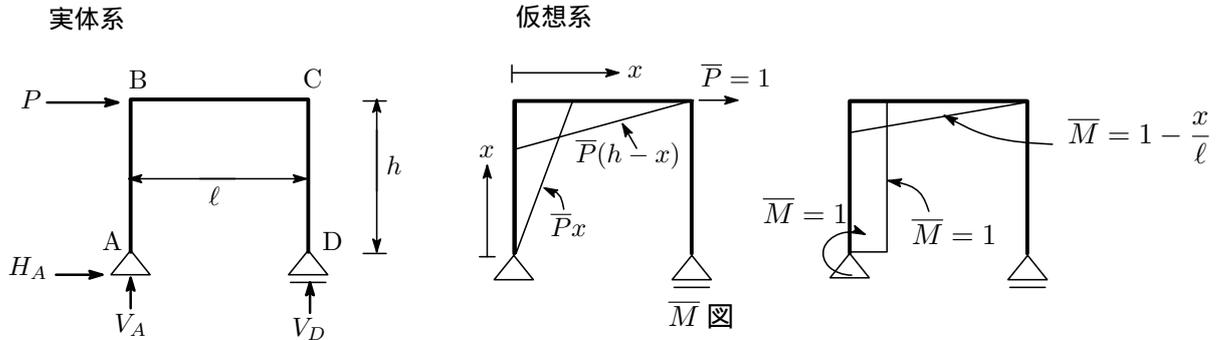
B 点に外力 P が作用しているラーメンの C 点でのたわみ δ_C と A 点のたわみ角 δ_A を求めよう。実体

図 6.14: 単純ばり系ラーメン構造

系の M 図は第 3 話ですすでに求めているので参照されたい。(1) たわみ δ_C を求めるC 点に仮想荷重 $\bar{P} = 1$ を作用させた仮想系ラーメンの曲げモーメントを \bar{M} とすると

$$\begin{aligned} \delta_C &= \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\int_0^h x \cdot Px dx + \int_0^{\ell} (h-x) \cdot P(h-x) dx \right) \\ &= \frac{P}{EI} \left(\int_0^h x^2 dx + \int_0^{\ell} (h-x)^2 dx \right) = \frac{h^3 + 3h^2\ell - 3h^2\ell + \ell^3}{3EI} P \end{aligned} \quad (6.30)$$

(2) たわみ角 θ_A を求めるA 点に仮想単位モーメント荷重 $\bar{M}_A = 1$ を作用させた場合，モーメントは節点 B にそのまま伝搬し区間 BC の仮想モーメントは $\bar{M}_x = 1 - \frac{x}{\ell}$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \theta_A &= \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\int_0^h 1 \cdot Px dx + \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot P(h-x) dx \right) \\ &= \frac{3h^2 + 3h\ell - \ell^2}{6EI} P \end{aligned} \quad (6.31)$$

A - 5 . トラス

トラスでは曲げモーメント M とせん断力 Q は働かないため，仮想仕事の式は軸方向力 N だけで表され，(6.11) に相当する式は

$$\delta = \sum_i \frac{\bar{N}_i N_i L_i}{E_i A_i} \quad (6.32)$$

となる。 L_i , E_i , A_i はそれぞれ i 番目の部材の長さ，ヤング率，断面積で，ヤング率と断面積が一定であれば，たわみは

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum_i \bar{N}_i N_i L_i \quad (6.33)$$

で表される。

それでは図 6.15 のトラスの D 点に鉛直荷重 P が作用しているときの、D 点の鉛直たわみ δ_{DV} を求めよう。部材のヤング率 E と断面積 A は一定とする。

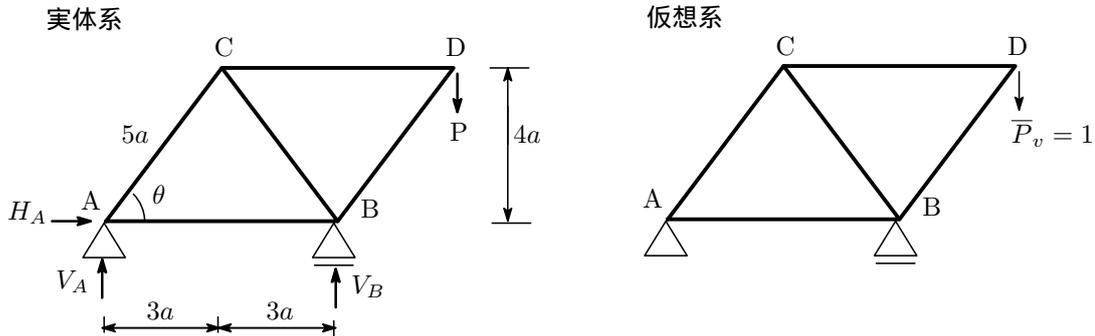


図 6.15: トラス

最初に、実体系の反力と軸方向力を求めておく。

$$\text{反力} \begin{cases} \sum X = H_A = 0, & H_A = 0 \\ \sum M = 6aV_A + 3aP = 0, & V_A = -\frac{P}{2} \\ \sum Y = P - (V_A + V_B) = 0, & \therefore V_B = \frac{3P}{2} \end{cases} \quad (6.34)$$

$$\text{軸方向力} \begin{cases} \text{A 点} \quad \sum Y = -N_{AC} \sin \theta - V_A = 0, & \therefore N_{AC} = \frac{5}{8}P \\ \quad \quad \quad \sum X = N_{AB} + N_{AC} \cos \theta = 0, & \therefore N_{AB} = -\frac{3}{8}P \\ \text{C 点} \quad \sum Y = -N_{AC} \sin \theta - N_{BC} \sin \theta = 0, & \therefore N_{BC} = -\frac{5}{8}P \\ [5pt] \quad \quad \quad \sum X = -N_{AC} \cos \theta + N_{BC} \cos \theta + N_{CD} = 0, & \therefore N_{CD} = \frac{3}{4}P \\ \text{B 点} \quad \sum Y = -N_{BC} \sin \theta - N_{BD} \sin \theta - V_B = 0, & \therefore N_{BD} = -\frac{5}{4}P \end{cases} \quad (6.35)$$

・ D 点の鉛直たわみ δ_{DV} を求める

D 点に鉛直方向に単位仮想荷重 $\bar{P}_v = 1$ をさせた仮想系を考える。(6.33) より

$$\begin{aligned} \delta_{DV} &= \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^5 \bar{N}_i N_i L_i = \frac{1}{EA} (\bar{N}_{AC} N_{AC} \times 5a + \bar{N}_{AB} N_{AB} \times 6a + \bar{N}_{BC} N_{BC} \times 5a \\ &\quad + \bar{N}_{CD} N_{CD} \times 6a + \bar{N}_{BD} N_{BD} \times 5a) \\ &= \frac{255Pa}{64EA} \end{aligned}$$

第7話.

静定構造物の変形 (2)

第6話では仮想仕事法を使ってたわみを求めたが、第7話はたわみ曲線の微分方程式を解く方法とモールの定理を使った方法の話をする。

B. たわみ曲線の微分方程式による解法 (弾性曲線法)

たわんだはりの外形曲線を関数 $y(x)$ とすると曲率 κ は

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (7.1)$$

で定義される¹⁷。いま、たわみが微小とすると $y' \ll 1$ となり、(7.1) の分母は $(1 + y'^2)^{2/3} \doteq 1$ 近似できるので曲率は

$$\kappa \doteq \frac{d^2y}{dx^2}$$

と表すことができ、 $\kappa = \frac{M}{EI}$ なので

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

を得る。これがたわみ曲線を表す微分方程式。ただし、図 7.1 に見るように曲げモーメントが正のとき曲率は負となる関係にあるので、符号の調整をするために右辺に負号を付けて

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (7.2)$$

と表す。これをはりのたわみの微分方程式とか弾性曲線方程式と呼んでいる。

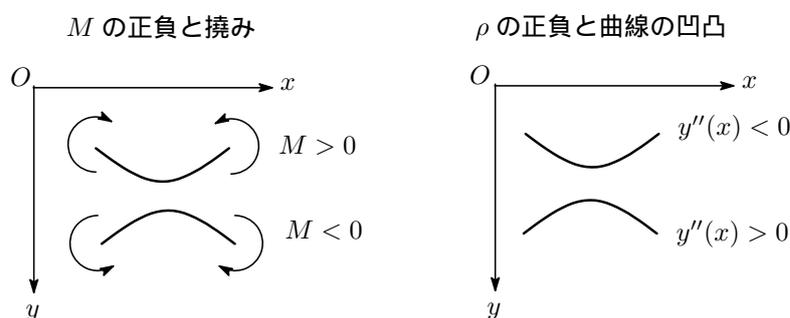


図 7.1: 曲率と曲げモーメントの符号

たわみ角 θ はたわみ曲線 $y(x)$ の接線の傾きの角度なので

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (7.3)$$

(7.2) と (7.3) より

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI} \quad (7.4)$$

¹⁷ 詳しいことが知りたければ HP の数学のコーナーの「曲線と曲面」のレポートを参照。

これらを積分するとたわみ角 θ とたわみ y

$$\int d\theta = - \int \frac{M}{EI} dx \quad \rightarrow \quad \theta = - \int \frac{M}{EI} dx + C_1 \tag{7.5}$$

$$\int dy = \int \theta dx \quad \rightarrow \quad y = - \int \left(\int \frac{M}{EI} dx + C_1 \right) dx + C_2 \tag{7.6}$$

を得る。 C_1, C_2 は境界条件で決まる積分定数。

・境界条件：長さが ℓ の片持ちばりと単純ばりを考える。片持ちばりの境界条件は固定端の A 点で

$$\theta(0) = \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 0 \tag{7.7}$$

単純ばりでは支点 A, B で

$$y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0 \tag{7.8}$$

と設定できる。いずれも境界条件を θ や y の変位で与えているのでこれを幾何学的境界条件という。

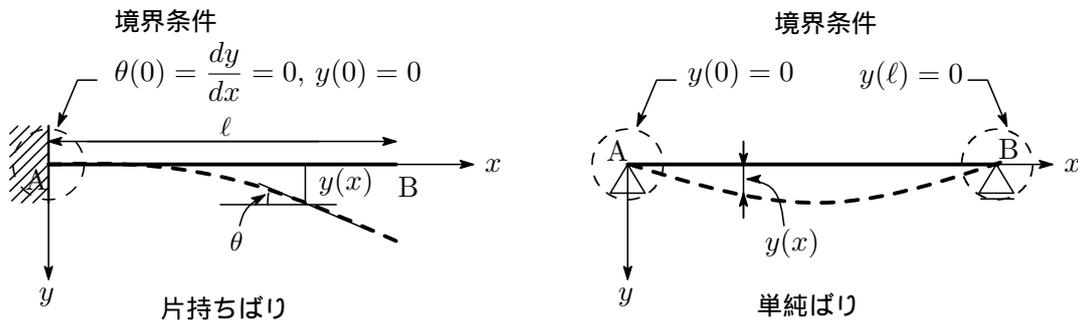


図 7.2: 幾何学的境界条件

境界条件としては他にも考えられる。片持ちばりでは $x = \ell$ の自由端 (B 点) において曲げモーメントとせん断力は 0 なので $d^2y/dx^2|_{x=\ell} = 0, Q_x = dM/dx \rightarrow y'''(x)|_{x=\ell} = 0$, 単純ばりでは支点 A ($x = 0$), B ($x = \ell$) で曲げモーメントが 0 という境界条件も設定できる。これらはいずれも力に関する境界条件なので力学的境界条件と呼ばれる。

表 2: 境界条件

	幾何学的境界条件 (変位に関する)	力学的境界条件 (力に関する)
片持ちばり	$y(0) = 0, \quad \theta(0) = 0$	$Q(\ell) = 0, \quad M(\ell) = 0$
単純ばり	$y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0$	$M(0) = 0, \quad M(\ell) = 0$

B - 1. 片持ちばり・集中荷重

それでは片持ちばりの自由端に荷重 P が作用してるケースをみていこう。

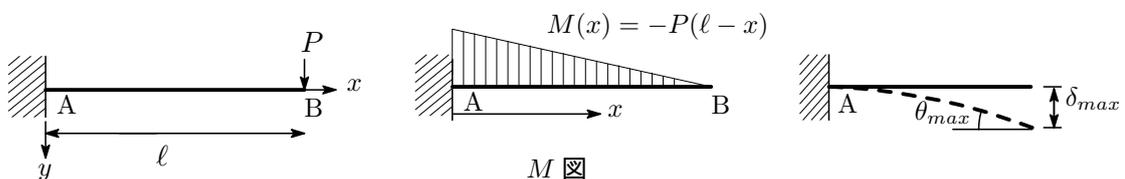


図 7.3: 片持ち梁

(1) たわみ角を求める

位置 x での曲げモーメントは $M(x) = -P(\ell - x)$ なので、たわみ角 $\theta(x)$ は (7.5) より

$$\theta(x) = - \int \frac{M}{EI} dx + C_1 = \frac{1}{EI} \int P(\ell - x) dx + C_1 = \frac{P}{EI} \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

積分定数 C_1 は境界条件 $\theta(0) = 0$ より $C_1 = 0$ となるので

$$\theta(x) = \frac{P}{2EI} (2\ell - x)x \quad (7.9)$$

$\theta(x)$ は $0 \leq x \leq \ell$ の範囲で単調増加関数となり $x = \ell$ で最大値を取る。したがって最大たわみ角は

$$\theta_{max} = \theta(\ell) = \frac{P\ell^2}{2EI} \quad (7.10)$$

これは仮想仕事法で得られた (6.18) と一致する。

(2) たわみを求める

(7.6) より

$$y(x) = \int \theta(x) dx + C_2 = \frac{P}{6EI} (3\ell - x)x^2 + C_2$$

積分定数 C_2 は境界条件 $y(0) = 0$ より $C_2 = 0$ となり、

$$y(x) = \frac{P}{6EI} (3\ell - x)x^2 \quad (7.11)$$

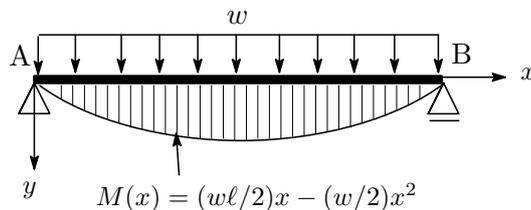
$y(x)$ は $0 \leq x \leq \ell$ の範囲で単調増加関数となるので $x = \ell$ で最大値を取る。したがって最大たわみは

$$\delta_{max} = y(\ell) = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (7.12)$$

となり、仮想仕事法で得られた (6.16) と一致する。

B - 2. 単純ばり・等分布荷重

長さ ℓ の単純ばりに等分布荷重が作用している場合のたわみ角とたわみを求める。



はりの位置 x での曲げモーメントは $M(x) = \frac{w\ell}{2}x - \frac{w}{2}x^2$ なので、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみ $y(x)$ は

$$\theta(x) = - \int \frac{M}{EI} dx = - \frac{w}{2EI} \int (\ell x - x^2) dx = \frac{wx^2(2x - 3\ell)}{12EI} + C_1$$

$$y(x) = \int \theta(x) dx + C_2 = \frac{wx^3(x - 2\ell)}{24EI} + C_1x + C_2$$

ここで境界条件 $y(0) = 0, y(\ell) = 0$ を上式に入れると積分定数は $C_2 = 0, C_1 = \frac{w\ell^3}{24EI}$ と求められる。したがってたわみ角 $\theta(x)$ とたわみ $y(x)$ は

$$\theta(x) = \frac{wx^2(2x - 3\ell)}{12EI} + \frac{w\ell^3}{24EI} \rightarrow \begin{cases} \theta_A = \frac{w\ell^3}{24EI} & (x = 0) \\ \theta_B = -\frac{w\ell^3}{24EI} & (x = \ell) \end{cases} \quad (7.13)$$

$$y(x) = \frac{wx^3(x - 2\ell)}{24EI} + \frac{w\ell^3}{24EI}x \rightarrow \delta_{max} = \frac{5w\ell^4}{384EI} \quad (x = \ell/2) \quad (7.14)$$

仮想仕事法で求めた (??) , (6.27) と一致する。

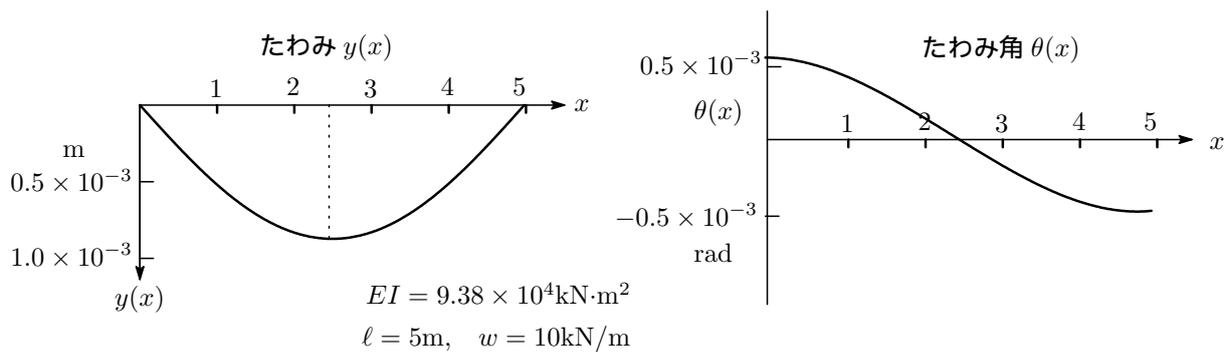


図 7.4: たわみとたわみ角

それでは最後にモールの定理によるたわみの計算を紹介しておこう。

C . モールの定理による解法

ドイツの土木工学技術者モール (,Christian Otto Mohr,1835-1918) が 1868 年に発表した定理で , 弾性曲線方程式を直接解かなくてもはりのたわみを求めることができるといった内容。具体的にみていこう。曲げモーメント $M(x)$ とせん断力 $Q(x)$, 荷重 w の間には

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -w(x), \quad Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (7.15)$$

という関係式が成り立つ。一方 , たわみ $y(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ の間には

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}, \quad \theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} \quad (7.16)$$

の関係式が成立する。この両式を見比べると , (7.15) 式で $M(x)$ を $y(x)$ に , $w(x)$ を $M(x)/EI$ に Q_x を $\theta(x)$ に置き換えれば (7.15) は (7.16) と一致することが分かる。実際の荷重 w に対応する M/EI を弾性荷重 (elastic load) 呼んでいる。

$$\begin{pmatrix} M(x) \longleftrightarrow y(x) \\ Q(x) \longleftrightarrow \theta(x) \\ w(x) \longleftrightarrow M(x)/EI \end{pmatrix}$$

この両式のアナロジーから形式的には弾性荷重 M/EI が作用するはりの断面力 $M(x)$, $Q(x)$ を求めれば, (7.16) の微分方程式を解くことなくたわみ $y(x)$ とたわみ角 $\theta(x)$ が求められることになる。これがモールの定理のいわんとするところ。モールの定理を利用してたわみやたわみ角を求める方法を弾性荷重法といい, 弾性荷重 M/EI が作用するはりをとくに共役ばり (conjugate beam) と呼んで実際のはりと区別している。

さて, (7.15) と (7.16) の微分方程式の境界条件をみてみよう。(7.15) は曲げモーメントやせん断力といった「力」に関する微分方程式なので境界条件としては力学的境界条件の採用が理にかなっている。一方, (7.16) はたわみやたわみ角の「変位」についての微分方程式なので幾何学的境界条件の採用がふさわしい。モールの定理は共役ばりの M と θ を求め, それを実際のはりのたわみ y とたわみ角 θ とみなすということなので, この2つの境界条件の整合性がマッチングしている必要がある。

具体的に「単純ばり」のケースで見てみよう。このケースでは実際のはりと共役ばりの自由端と固定端は $y(0) \leftrightarrow M(0)$, $y(\ell) \leftrightarrow M(\ell)$ とうまく対応がとれているので問題はない。しかし「片持ちばり」のケースでは $y(0) \leftrightarrow Q(\ell)$, $\theta(0) \leftrightarrow M(\ell)$ という対応になるので, 実際の片持ちばりの固定端は共役ばりでは自由端, 固定端は自由端としなければならない。つまり, 共役ばりを考える場合, この両端を入れ替えたはりを考える必要があり, この点に注意されたい。詳しくは図 7.5 を参照してください。

	幾何学的境界条件	力学的境界条件
単純ばり	$y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0$	$M(0) = 0, \quad M(\ell) = 0$
片持ちばり	$y(0) = 0, \quad \theta(0) = 0$	$Q(\ell) = 0, \quad M(\ell) = 0$

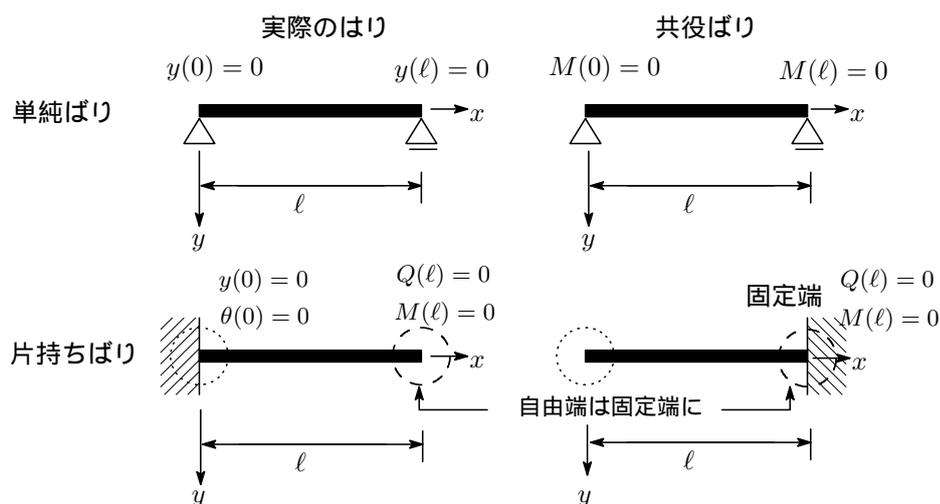


図 7.5: 実際の梁とその共役梁

さて, 弾性荷重法の具体的な計算手順は次の通り。

- 1) たわみを求めようとしている実際のはりの曲げモーメント $M(x)$ を求める。
- 2) 共役ばりに弾性荷重 $M(x)/EI$ を作用させる。
- 3) 共役ばりの断面力 $Q(x)$, $M(x)$ を求め, $Q \rightarrow \theta$, $M \rightarrow y$ よりたわみ角 θ とたわみ y を得る。

それではモールの定理を使った具体的な問題をみていこう。

C - 1 . 片持ちばり

(a) 集中荷重

片持ちばりの自由端 B に荷重 P が作用している。このはりの最大たわみと最大たわみ角を求めよう。

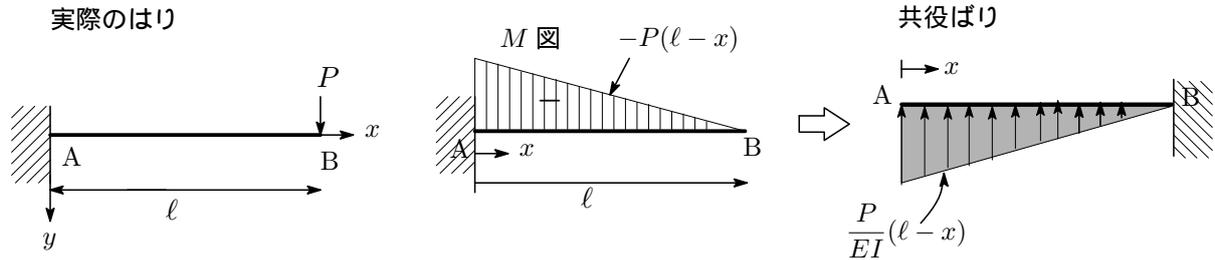


図 7.6: モールの定理と片持ち梁

片持ちばりのモーメントは

$$M(x) = -P(\ell - x) \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (7.17)$$

この共役ばりは実際のはりの固定端と自由端を入れ替えたものになるということ、弾性荷重 M/EI は曲げモーメントの符号が負なので y 軸の負の向き、つまり下から上の方向に作用する分布荷重となることに注意しよう。

さて、固定端 A から距離 x の点でのたわみ $y(x)$ とたわみ角 $\theta(x)$ を求めよう。共役ばりでは図 7.7 に示すように自由端 A から距離 x の点での曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x を求めることになる。

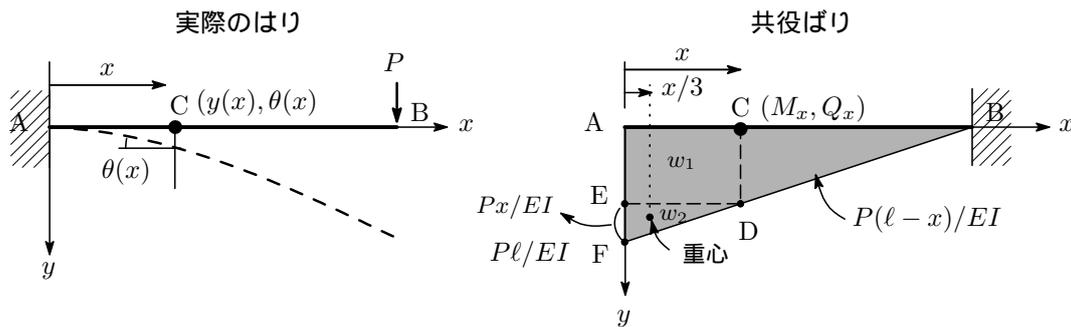


図 7.7: 共役ばりと断面力

図 7.7 で ACDE で囲まれた四角形の面積部の荷重を w_1 , 三角形 DEF で囲まれた面積の荷重を w_2 とすると

$$w_1 = \frac{Px(\ell - x)}{EI}, \quad w_2 = \frac{Px^2}{2EI}$$

したがって断面力は

$$\begin{cases} Q(x) = w_1 + w_2 = \frac{P}{EI} \left(\ell x - \frac{1}{2}x^2 \right) \\ M(x) = \frac{2}{3}x \times w_2 + \frac{1}{2}xw_1 = \frac{P}{6EI} (3\ell - x)x^2 \end{cases} \quad (7.18)$$

と求められる（注参照）。したがって、モールの定理よりたわみとたわみ角、およびその最大値は

$$y(x) = M(x) = \frac{P}{6EI}(3\ell - x)x^2, \quad y_{max} = y(\ell) = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (7.19)$$

$$\theta(x) = Q(x) = \frac{P}{EI}\left(\ell x - \frac{1}{2}x^2\right), \quad \theta_{max} = \theta(\ell) = \frac{P\ell^2}{2EI} \quad (7.20)$$

と求められ、これは弾性曲線法から得た (7.11), (7.9) と一致する。

注：(7.18) は次のようにすればもっと簡単に求められる。共役ばりの自由端 A から距離 x の点におけるせん断力 $Q(x)$ は

$$Q(x) = \frac{1}{EI} \int_0^x P(\ell - x)dx = \frac{P}{EI} \left(\ell x - \frac{1}{2}x^2\right)$$

したがって曲げモーメントは

$$M(x) = \int_0^\ell Q(x)dx = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad //$$

補足：片持ちばりに適用できる有用な公式を紹介しておこう。

$$\text{公式} \begin{cases} y_{max} = -\frac{1}{EI} \times \text{片持ちばりの } M \text{ 図の面積の自由端に関する 1 次モーメント} \\ \theta_{max} = -\frac{1}{EI} \times \text{片持ちばりの } M \text{ 図の面積} \end{cases} \quad (7.21)$$

上のはりの問題に当てはめると

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{1}{EI} \frac{P\ell^3}{3} \\ &= -\frac{1}{EI} \times M \text{ 図の面積の自由端 B に関する 1 次モーメント} \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} &\left(= -\frac{1}{EI} \times \int_0^\ell P(\ell - x)^2 dx = \frac{1}{EI} \times \frac{P\ell^3}{3} \right) \\ \theta_{max} &= \frac{P\ell^2}{2EI} = -\frac{1}{EI} \times (-P\ell^2/2) = -\frac{1}{EI} \times \text{片持ちばりの } M \text{ 図の面積} \end{aligned} \quad (7.23)$$

で、確かに公式が成立していることが分かる。

(b) 等分布荷重

公式 (7.21) を活用して、等分布荷重が作用する片持ちばり自由端 B でのたわみとたわみ角を求めよう。

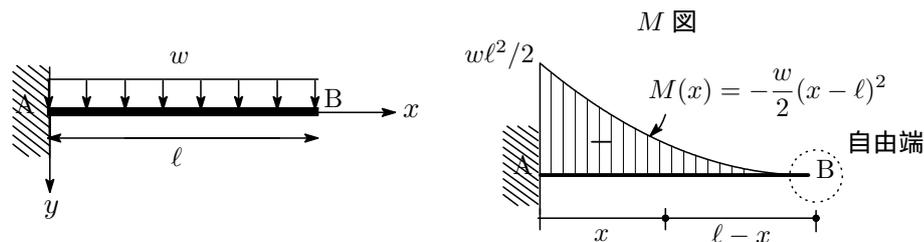


図 7.8: 片持ち梁・等分布荷重

・最大たわみ角：曲げモーメントは

$$M(x) = -\frac{w}{2}(x - \ell)^2$$

したがって、 M 図の面積は

$$S_M = \int_0^\ell M_x dx = -\frac{w}{2} \int_0^\ell (x - \ell)^2 dx = -\frac{w\ell^3}{6}$$

となり、公式 (7.21) より最大たわみ角は

$$\theta_{max} = -\frac{1}{EI} \times \left(-\frac{w\ell^3}{6}\right) = \frac{w\ell^3}{6EI}$$

と得られる。

・最大たわみ：「片持ち梁 M 図の面積の自由端まわりの 1 次モーメント」は、面積素片 $M_x dx$ の自由端まわりの 1 次モーメント $(\ell - x) \times M_x dx$ を $x = 0 \sim \ell$ にわたって積分したものになるので、公式 (7.21) より

$$y_{max} = -\frac{1}{EI} \int_0^\ell M_x (\ell - x) dx = \frac{w}{2EI} \int_0^\ell (x - \ell)^2 (\ell - x) dx = \frac{w\ell^4}{8EI}$$

と得られる。

exa. ヤング率 $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ，断面 2 次モーメント $I = 4.68 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ， $\ell = 5 \text{ m}$ の片持ちばりに $w = 6 \text{ kN/m}$ の等分布荷重が作用しているとき，最大たわみと最大たわみ角を求めると

$$\begin{cases} \text{最大たわみ} & y_{max} = \frac{w\ell^4}{8EI} = 0.001467 \text{ m} \\ \text{最大たわみ角} & \theta_{max} = \frac{w\ell^3}{6EI} = 4.452 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{cases}$$

C - 2. 単純ばり

(a) 集中荷重

長さ ℓ の単純ばりの C 点に荷重 P が作用している。C 点のたわみと A，B 点のたわみ角をモールの定理を使って求める。 M 図は図 7.9 参照。C 点 ($x = a$) での曲げモーメントは

$$M(a) = \frac{Pa(\ell - a)}{\ell} \tag{7.24}$$

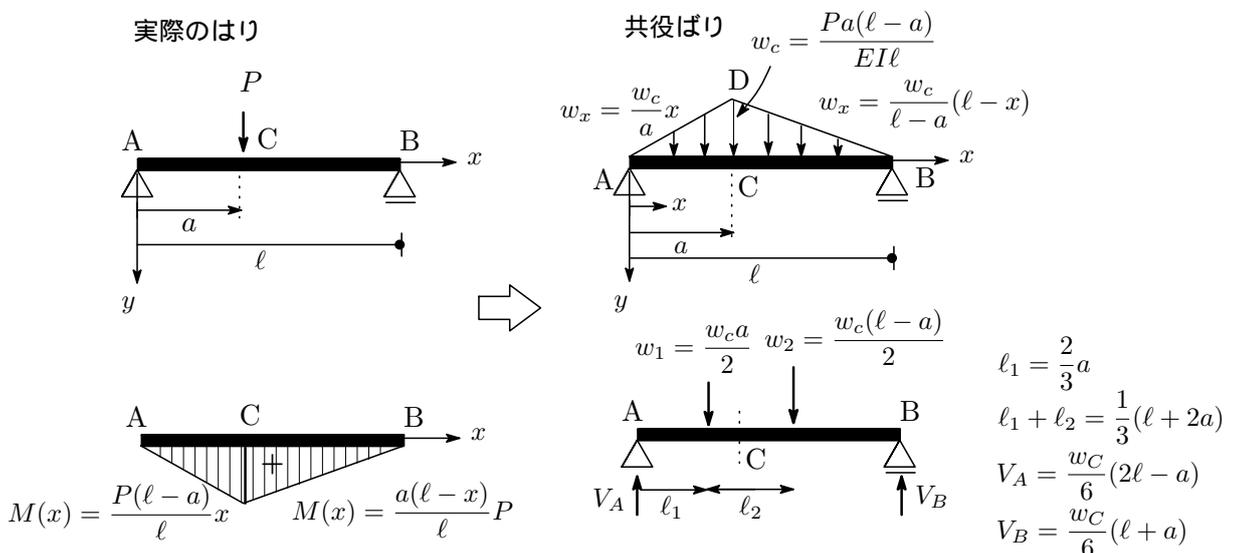


図 7.9: 単純梁・集中荷重

共役ばりでは M 図の面積を EI で割った分布弾性荷重が作用するので、これを集中荷重に置きなおしてやる。まず、 C 点での弾性荷重 w_c は

$$w_c = \frac{Pa(\ell - a)}{EI\ell}$$

共役ばりの AC には三角形 ACD の荷重 $w_c a/2$ 、 BC には三角形 BCD の荷重 $w_c(\ell - a)/2$ と 2 点荷重が作用する。 A 点、 B 点でのせん断力 Q_A 、 Q_B と C 点での曲げモーメント M_C は

$$\begin{cases} Q_A = V_A = \frac{w_c}{6}(2\ell - a) \\ Q_B = V_B = V_A - (w_1 + w_2) = -\frac{w_c}{6}(\ell + a) \\ M_C = \frac{1}{3}a(\ell - a)w_c \end{cases}$$

したがってモールの定理より A 点、 B 点のたわみ角 θ_A 、 θ_B と C 点のたわみ y_C は

$$\theta_A = Q_A = \frac{Pa(\ell - a)(2\ell - a)}{6EI\ell} \quad (7.25)$$

$$\theta_B = Q_B = -\frac{Pa(\ell^2 - a^2)}{6EI\ell} \quad (7.26)$$

$$y_C = M_C = \frac{Pa^2(\ell - a)^2}{3EI\ell} \quad (7.27)$$

と求められる。

補足：支点 A から任意の距離 x ($0 \leq x \leq \ell$) におけるたわみ $y(x)$ とたわみ角 $\theta(x)$ を求めておこう。共役ばりを 2 つの区間 AC と CB に分ける。

・区間 AC ($0 \leq x \leq a$)

$$\theta(x) = Q(x) = V_A - \int_0^x \frac{w_c}{a} x dx = -\frac{w_c}{6a}(a^2 - 2al + 3x^2)$$

$$\therefore \theta_A = \frac{Pa(\ell - a)(2\ell - a)}{6EI\ell} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$y(x) = M(x) = \int_0^x Q_x dx = -\frac{w_c}{6a}(a^2 - 2al + x^2)x$$

$$\therefore y_C = \frac{Pa^2(\ell - a)^2}{3EI\ell} \quad (x \rightarrow a)$$

・区間 CB ($a \leq x \leq \ell$)

$$\begin{aligned} \theta(x) &= Q(x) = V_A - \int_0^x \frac{w_c}{a} x dx - \int_a^x \frac{w_c}{\ell - a} (\ell - x) dx \\ &= -\frac{w_c}{6(a - \ell)}(a^2 + 2\ell^2 - 6\ell x + 3x^3) \end{aligned}$$

$$\therefore \theta_B = -\frac{Pa(\ell^2 - a^2)}{6EI\ell} \quad (x \rightarrow \ell)$$

$$y(x) = M(x) = \int_0^x Q_x dx = -\frac{w_c}{6a}(a^2 - 2al + x^2)x$$

(b) 分布荷重

等分布荷重が作用している単純ばりの A 点でのたわみ角 θ_A とはりの最大たわみ y_{max} を求める。
単純ばりの中点位置を C とする。

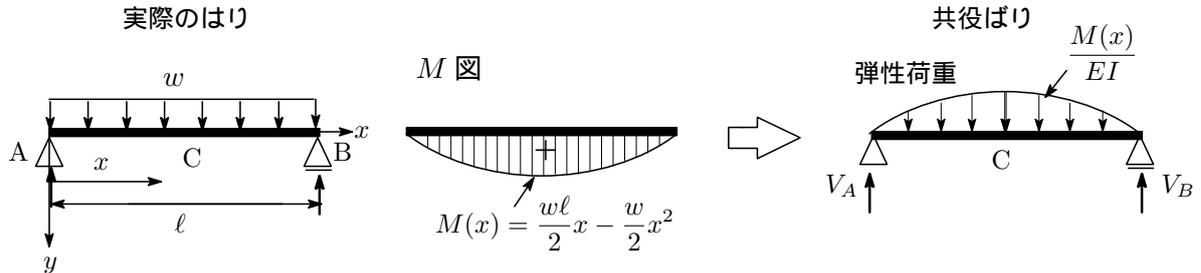


図 7.10: 単純ばり・等分布荷重

支点 A から任意の距離 x での曲げモーメントは

$$M(x) = \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

これから共役ばりの弾性荷重は図 7.10 の右図に示す放物線分布荷重となる。弾性荷重を W とすると

$$W = \frac{1}{EI} \int_0^l M(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx = \frac{wl^3}{12EI}$$

共役ばりの支点の反力を V_A, V_B とすると中点で対称なので力のつり合いより

$$V_A = V_B, \quad W - (V_A + V_B) = 0 \quad \therefore V_A = V_B = \frac{wl^3}{24EI}$$

支点 A から距離 x の点におけるせん断力は

$$Q(x) = V_A - \frac{1}{EI} \int_0^x \left(\frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx = \frac{wl^3}{24EI} - \frac{w}{2EI} \left(\frac{\ell}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \quad (7.28)$$

したがって、モールの定理より A 点のたわみ角は

$$\theta_A = Q_A = \frac{wl^3}{24EI} \quad (7.29)$$

曲げモーメントは

$$M(x) = \int_0^x Q_x dx = \frac{wl^3}{24EI}x - \frac{w}{2EI} \left(\frac{\ell}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \right) \quad (7.30)$$

$M(x)$ は C 点 ($x = \ell/2$) で最大値をとる。したがって最大たわみは

$$y_{max} = M_C = \left\{ \frac{wl^3}{24EI}x - \frac{w}{2EI} \left(\frac{\ell}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \right) \right\}_{x \rightarrow \ell/2} = \frac{5wl^4}{384EI} \quad (7.31)$$

(ex.3) $\ell = 5\text{m}$, $w = 10\text{kN/m}$, $EI = 9.36 \times 10^4\text{kN}\cdot\text{m}^2$ としたときの最大たわみと最大たわみ角は

$$y_{max} = \frac{5wl^4}{384EI} = 8.69 \times 10^{-4} \text{ m}, \quad \theta_A = \frac{wl^3}{24EI} = 5.56 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

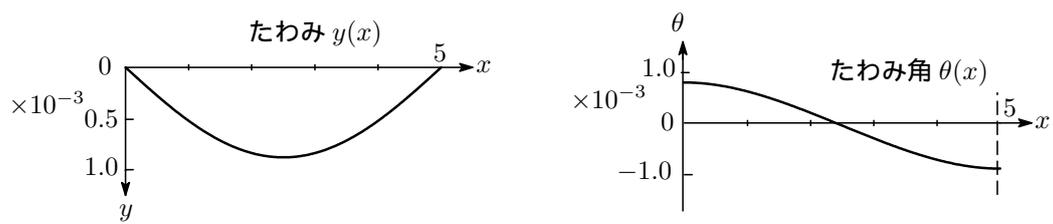


図 7.11: たわみとたわみ角

第8話.

はりの曲げ応力と断面係数・せん断応力

第8話ははりの曲げ応力と断面係数についての話なので、第6話も読み返されたい。後半では材料力学的な話題にも足を踏み入れているので、このところは適当にスルー（^^）; してもとくに支障はないと思う。

曲げモーメントと応力

一様な正の曲げモーメント ($M > 0$) だけを受けたはりの断面には中立軸（面）の下側では引張応力、上側では圧縮応力が働く。曲げモーメントは全域で一定となるのでせん断力は生じない。このような状態を純曲げ状態¹⁸と呼んでいる（ 補足参照）。

中立軸から y の距離に位置する軸に垂直な断面に生じる曲げ応力（垂直応力） σ は

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y \quad (8.1)$$

で表された。 σ を断面全体にわたって積分した値は0になるので

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad (8.2)$$

(8.2) に (8.1) を入れると

$$\frac{E}{\rho} \int y dA = 0 \quad \therefore \int y dA = 0 \quad (8.3)$$

$\int_A y dA$ を断面1次モーメントといい¹⁹、断面の図心²⁰を求めるときに必要となる。曲げ応力は

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (8.4)$$

と表せ、中立軸から最も離れた位置で σ は最大となる。中立軸からはりの最下端、最上端までの距離をそれぞれ h_1, h_2 とすると、曲げモーメントが $M > 0$ の場合、 $y = h_1$ の最下端で最大引張り応力 σ_1 、 $y = -h_2$ の最上端で最大圧縮応力 σ_2 が生じる。

$$\sigma_1 = \frac{h_1}{I} M = \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_2 = -\frac{h_2}{I} M = -\frac{M}{Z_2} \quad (8.5)$$

Z_1, Z_2 を中立軸に関する断面係数と呼んでいるが、これについてはまたまたあとで触れる。形式的にまとめると

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z}, \quad Z = \frac{I}{h} \quad (8.6)$$

と表せ、曲げ応力の最大値 σ_{max} は曲げモーメントを断面係数で割ることで求められる。

補足：支点 A, B に曲げモーメント M_A, M_B だけが作用している単純ばりで、 $M_A = M_B$ のとき純曲げ状態となる。

¹⁸ 曲率半径が同じになるように梁は変形する。

¹⁹ モーメントは定点からその量までの距離をその量に掛けたもの。 $y \times dA$ は断面積のモーメントで、距離 y の次数が1次だから断面1次モーメントといい、 $y^2 \times dA$ は距離 y の次数が2次だから断面2次モーメントという。

²⁰ 断面を厚さが一定の板と考えたときの重心位置。中立軸は図心を通る軸。

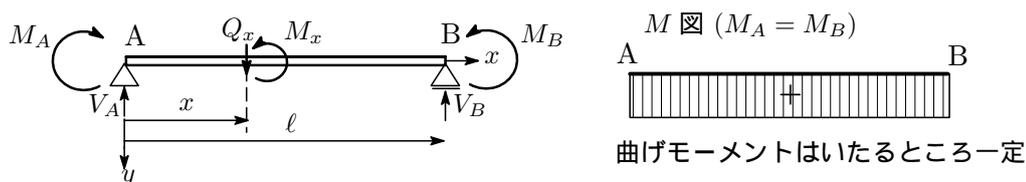


図 8.1: 純曲げ状態

力のつり合いより

$$\sum Y = -(V_A + V_B) = 0, \quad \sum M = M_A - M_B - \ell \times V_B = 0 \quad \therefore V_A = \frac{M_B - M_A}{\ell}, \quad V_B = \frac{M_A - M_B}{\ell}$$

位置 x でのせん断力 Q_x , 曲げモーメントを M_x とすると

$$\sum Y = Q_x - V_A = 0, \quad \sum M = M_A - M_x + x \times V_A = 0 \quad \therefore Q_x = \frac{M_B - M_A}{\ell}, \quad M_x = M_A + \left(\frac{M_B - M_A}{\ell} \right) x$$

$M_A = M_B$ の場合

$$Q_x = 0, \quad M_x = M \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

せん断力は生じず, 曲げモーメント M は単純ばり全域で一定の「純曲げ状態」となる。

8 - 1 . 断面の 1 次モーメント

x 軸, y 軸に関する断面 1 次モーメント (geometrical moment of area) を S_x, S_y とすると, S_x, S_y はそれぞれ x 軸, y 軸に関する面積の 1 次モーメントなので

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA \quad (8.7)$$

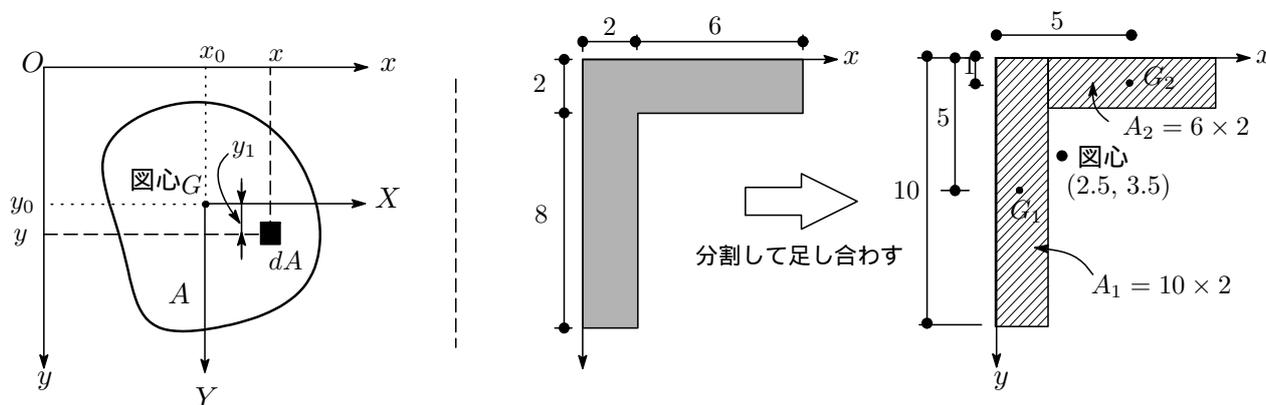


図 8.2: 断面 1 次モーメント

複雑な図形では単純な図形に分割し, 分割した図形の 1 次モーメントを加え合わせればよい。はりの断面の図心 (重心) 位置 (x_0, y_0) は断面の 1 次モーメントを用いて

$$x_0 = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{S_y}{A}, \quad y_0 = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{S_x}{A}$$

と表せる。図 8.2 の図心は

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{112}{32} = 2.5 \text{ cm}, \quad y_0 = \frac{80}{32} = 3.5 \text{ cm} \quad (8.8)$$

8 - 2 . 断面の 2 次モーメント

x 軸, y 軸 に関する断面 2 次モーメント (geometrical moment of inertia) は

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (8.9)$$

で表される²¹。断面積が A の図形の図心 $G(x_0, y_0)$ を通る X 軸に関する断面 2 次モーメントを I_X とすると

$$I_x = I_X + y_0^2 A \quad (8.10)$$

が成り立ち, これを平行軸の定理という。図心を原点 $(0, 0)$ とする X 軸から微小面積 dA までの距離を y_1 とすると

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_0 + y_1)^2 dA = \int_A y_1^2 dA + 2y_0 \int_A y_1 dA + y_0^2 \int_A dA$$

ところで断面の 1 次モーメント $\int_A y_1 dA$ は図心を通り 0 になるので

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y_1^2 dA + y_0^2 \int_A dA = I_X + y_0^2 A \quad //$$

平行軸の定理から, 図心を通る軸に関する断面の 2 次モーメントは最小になることが分かる。

(ex.1) 図 8.3 の長方形断面の 2 次モーメント I_x, I_X は

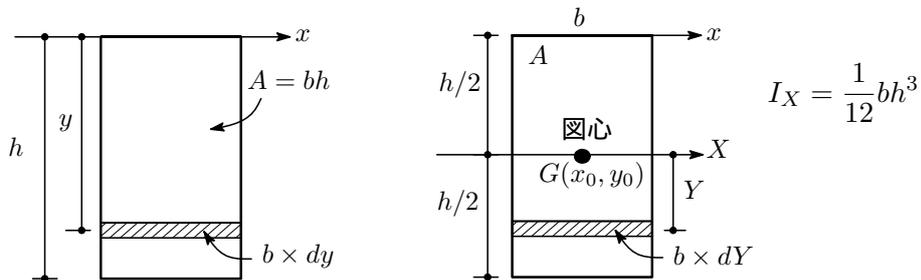


図 8.3: 断面 2 次モーメント

$$I_x = \int_0^h y^2 b dy = \frac{1}{3} b h^3, \quad I_X = 2 \int_0^{h/2} Y^2 b dY = \frac{1}{12} b h^3$$

$y_0^2 A = (h/2)^2 b h = b h^3 / 4$ なので

$$I_x = I_X + y_0^2 A$$

(ex.2) 図 8.2 の右のはりの断面の 2 次モーメント I_x を求める。2 つの四角形に分けて左の四角形の 2 次モーメントを I_x^1 , 右の四角形のを I_x^2 とすると

$$I_x = I_x^1 + I_x^2, \quad I_x^1 = I_X^1 + y_0^2 A, \quad I_x^2 = I_X^2 + y_0^2 A$$

²¹力学でお馴染みの慣性モーメントと同じ形。

I_x^1 の方は

$$I_X^1 = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{2 \times 10^3}{12} = 166.7, \quad y_0^2 A = 5^2 \times 10 \times 2 = 500$$

から

$$I_x^1 = I_X^1 + y_0^2 A = 666.7 \text{ cm}^4$$

I_x^2 の方は

$$I_X^2 = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{6 \times 2^3}{12} = 3, \quad y_0^2 A = 1^2 \times 6 \times 2 = 12, \quad I_x^2 = 15$$

したがって

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 = 515 \text{ cm}^4$$

(ex.3) 図 8.4 の単純ばりの断面係数と曲げ応力の最大値を求めてみよう。支点 A, B の反力を V_A, V_B

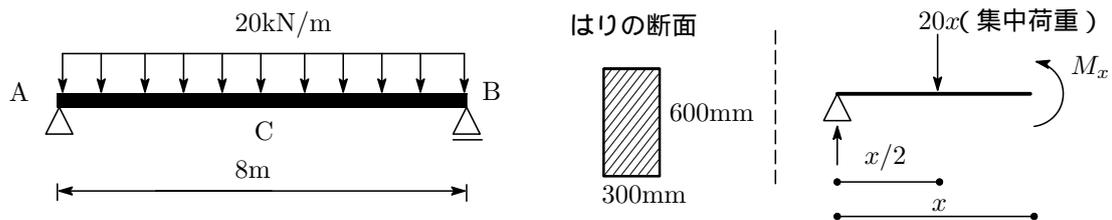


図 8.4: 均一分布荷重・単純ばりの断面係数と最大曲げ応力

とすると力のつり合いから

$$V_A + V_B = 20 \times 8, \quad 4 \times V_A = 4 \times V_B \quad \therefore V_A = V_B = 80 \text{ kN}$$

支点 A から距離 x の位置でのモーメントは

$$M_x = x \times V_A - \frac{x}{2} \times 20x = -10x^2 + 80x = -10(x-4)^2 + 160$$

と得られるので, M_x は $x = 4$ の中点 C で最大値 $M_{max} = 160 \text{ kNm}$ をとる。断面係数 Z は

$$Z = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{300 \times 600^2}{6} = 108 \times 10^6 \text{ mm}^3 \quad (I = \frac{1}{12}bh^3)$$

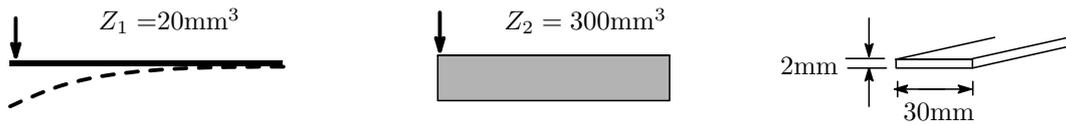
したがって最大曲げ応力 σ_{max} は

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{160 \times 10^6}{108 \times 10^6} = 1.5 \text{ N/mm}^2$$

8 - 3 . 断面係数

断面係数 Z が大きいと部材内で発生する曲げ応力は小さくなり, その意味で丈夫な部材ということになる。“その意味で”といった意味は, 同じ一つのはりでも平べったい側を上向きにした場合と縦向きにした場合とでは, 上向きにセットした方が断然曲がりやすい。つまり, 同じはりでも前者の場合は脆弱(?)で, 後者の方は丈夫なはりということになる。

例えば, 長さ 300mm, 厚み 2mm, 幅 30mm のプラスチックの物差しのケースで考えてみよう。



物差しの平べったい面が水平になるように一端を固定し、自由端を少し押しと物差しは簡単に曲がる。一方、垂直になるようにセットした場合は簡単には曲がらない。前者の場合の断面係数は $Z_1 = bh^2/6 = 30 \times 2^2/6 = 20\text{mm}^3$ 、一方、後者は $Z_2 = 2 \times 30^2/6 = 300\text{mm}^3$ で約 15 倍大きい。要するに、同じ部材を使っても断面係数が大きくなるようにセットすれば部材の耐荷重性能がアップすることになる（経験的知恵と一致）。

各種断面形状の断面 2 次係数と断面係数

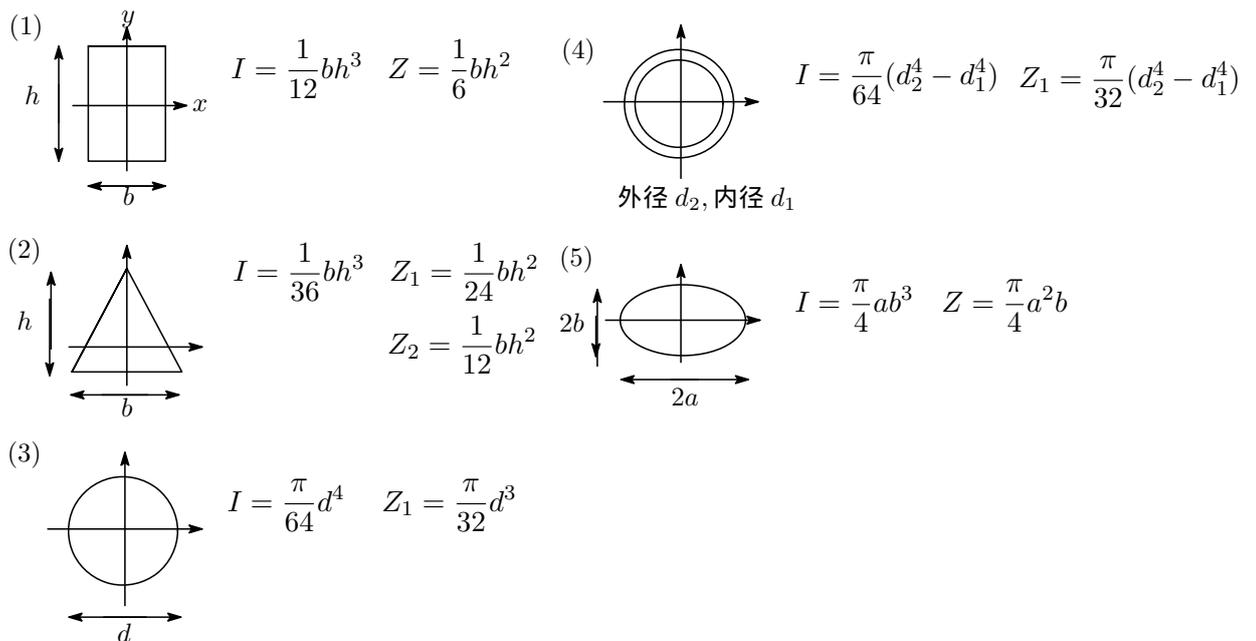


図 8.5: 断面 2 次モーメントと断面係数

ちなみに (2) の三角形面積の I と Z の導出してみよう。

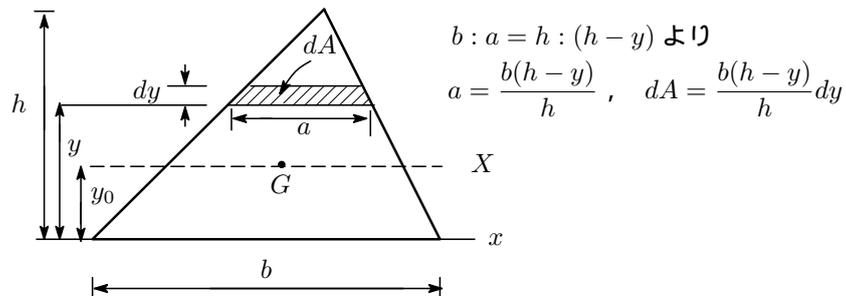


図 8.6: 三角形の断面 2 次モーメントと断面係数

重心 G を通る水平軸を X 軸、それと平行に底辺に沿った軸を x 軸とする。 X 軸に関する断面の 2 次

モーメントは x 軸に関する断面の 2 次モーメント I_x を求めて平行軸の定理を使えば求められる。

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{bh^3}{12}$$

なので、平行軸の定理より

$$I_X = I_x - y_0^2 A = \int_A y^2 dA = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

頂点に対する断面係数を Z_1 ，底辺に対するのを Z_2 とすると，(8.6) より

$$Z_1 = \frac{I_X}{2h/3} = \frac{bh^2}{24} \quad Z_2 = \frac{I_X}{h/3} = \frac{bh^2}{12}$$

せん断応力と曲げモーメント

A. 共役せん断応力

せん断力 Q をはりの断面積 A で割ったものをせん断応力といい， τ で表す。

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad (8.11)$$

せん断応力は断面内で一様ではなく (8.11) はその平均値である。

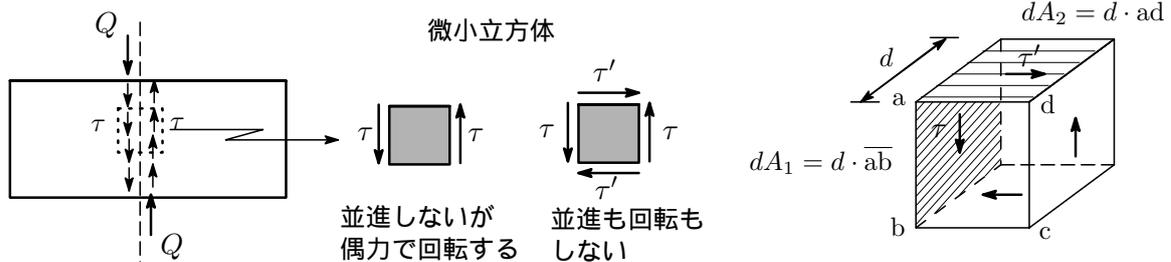
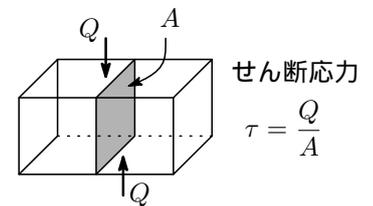


図 8.7: 共役せん断応力

せん断力が作用しているはり内部の微小立方体に注目しよう。この立方体は並進も回転もしない。立方体の面に働くせん断応力は一対の力，つまり偶力になっているので，上下の並進運動は互いに力が打ち消し合うため起こらないことは分かる。しかし，偶力による回転運動は生じてもいいはずだが，現実には起こらない。ということは，直交する上下の面には向きが反対の偶力が発生し全体のモーメントがつり合っているためと考えなければならない（補足参照）。これをせん断応力の共役性といい，上下の面に生じるせん断応力を共役せん断応力（conjugate shearing stress）と呼んでいる。

補足：微小直六面体のモーメントのつり合いの式より

$$\overline{ab} \times (\tau' \cdot dA_2) - \overline{ad} \times (\tau \cdot dA_1) = 0, \quad \text{ただし } dA_1 = d \cdot \overline{ab}, \quad dA_2 = d \cdot \overline{ad}, \quad \therefore \tau = \tau'$$

B. 曲げによるせん断応力

曲げモーメント M の変化率はせん断力 Q に等しく

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (8.12)$$

M が位置変化するところでは Q によるせん断応力 τ が発生する。はりの幅を b 、中立軸に関する断面 2 次モーメントを I 、中立軸から距離 y における断面 1 次モーメントを S とすると、中立軸から距離 y に生じるせん断応力 τ は

$$\tau = \frac{Q_x \cdot S}{b \cdot I} \quad (8.13)$$

与えられる。この式を以下の導出しよう。

図 8.8 で距離 dx 離れた 2 つの断面 AB, CD を考え、各面に働くせん断力と曲げモーメントをそれぞれ $Q_x, Q_x + dQ_x$ および $M_x, M_x + dM_x$ とする。次に中立軸から y_1 の距離で中立面に平行な面 EF を

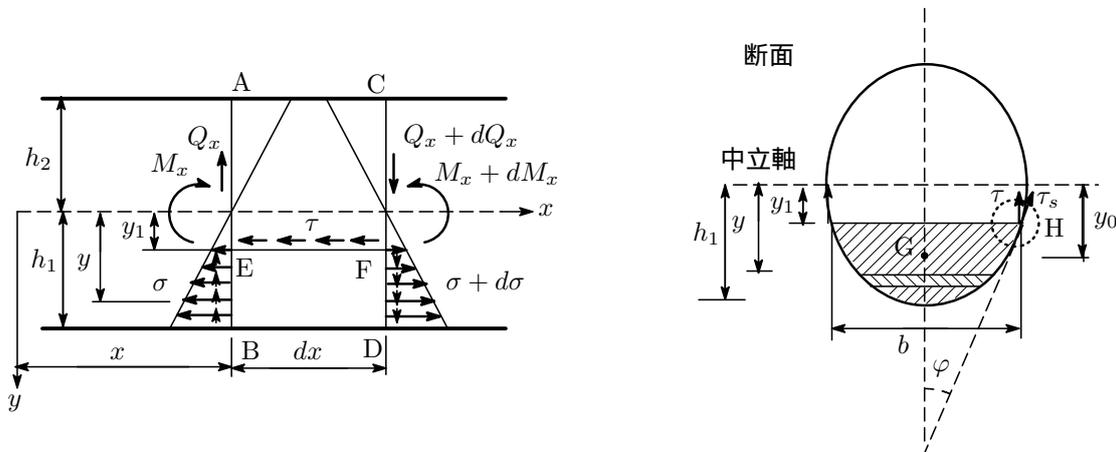


図 8.8: はりのせん断応力

とり、微小部分 EBDF について x 方向の力のつり合いを考える。EB 面にはせん断力 Q_x によるせん断応力 τ が作用しているので、EF 面には大きさが等しく向きが逆の共役せん断応力 τ が働く。EB 面には曲げモーメント M_x による垂直応力 σ 、FD 面には $M_x + dM_x$ による $\sigma + d\sigma$ が作用するので、 x 方向の力のつり合いの式は垂直応力と共役せん断力のつり合いから

$$\sum X = \int_{y_1}^{h_1} \{(\sigma + d\sigma) - \sigma\} dA - \tau b dx = 0$$

また、(8.4) より $\sigma = \frac{M_x}{I} y$ 、 $d\sigma = \frac{dM_x}{I} y$ なので、これを上式に入れて τ を求めると

$$\tau = \frac{1}{b \cdot I} \frac{dM_x}{dx} \int_{y_1}^{h_1} y dA = \frac{Q_x}{b \cdot I} \int_{y_1}^{h_1} y dA \quad (8.14)$$

となる。 $\int_{y_1}^{h_1} y dA$ は中立軸から $y = y_1$ と $y = h_1$ との間にある部分の中立軸に関する断面 1 次モーメントなので S と表すと (8.13) が得られる。(以上) //

さて，はりの表面に注目しよう。はり断面の周縁が長方形ではなく一般性を持たせて曲線とする。曲線上の点 H に作用するせん断応力を考える。はりの表面を含む小さな直方体を考え，その直方体に作用する応力を描くと図 8.9 のようになる。このうち，表面付近で，表面に垂直な点線で示したせん断応

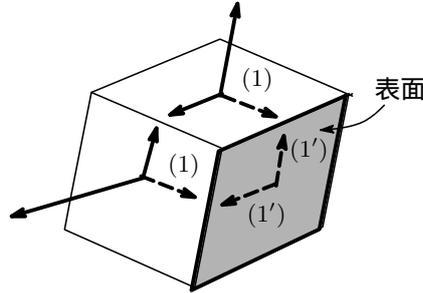
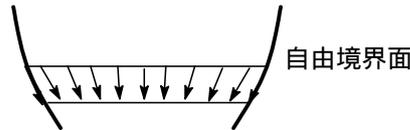


図 8.9: はりの表面付近におけるせん断応力

力の成分 (1) が仮にゼロでないとする，表面にも点線で示すような共役せん断応力 (1') が作用する。ところで，はりの表面ではせん断応力は作用していないと考えられる²²ので，表面の点線で示した応力は 0 のはずである。したがって，表面と直交する断面上のせん断応力は，表面のすぐ近くでは表面と平行（接線方向）でなければならない。 τ_s の垂直成分が (8.13) の τ となるので

$$\tau = \tau_s \cos \varphi, \quad \tau_s = \frac{\tau}{\cos \varphi} = \frac{QS}{bI \cos \varphi} \tag{8.15}$$

中立軸から離れた箇所の x 軸に沿ったせん断応力の分布は下図のようになっている。



長方形断面はりのせん断応力

$b \times h$ の長方形断面にせん断力 Q が作用しているとき，せん断応力 τ を求めよう。(8.14) より

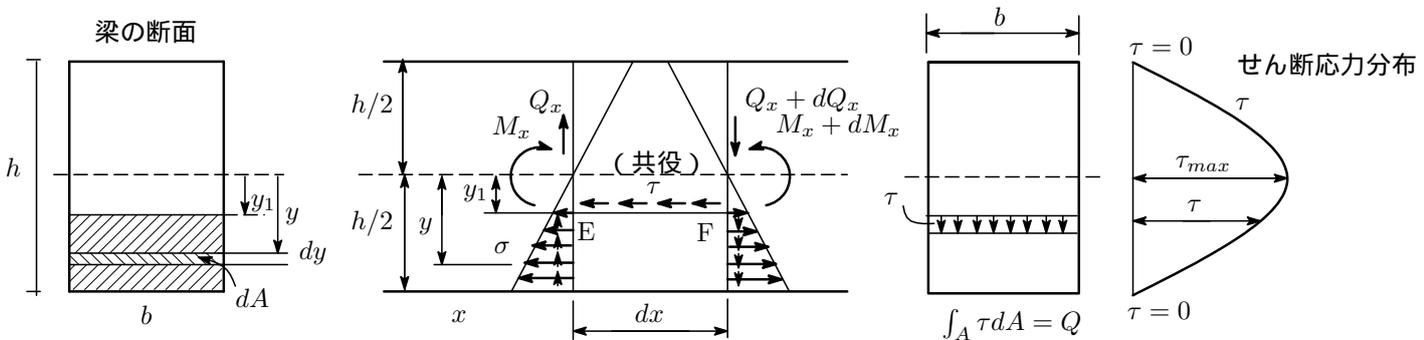


図 8.10: 長方形断面のせん断応力

$$\tau = \frac{Q}{b \cdot I} \int_{y_1}^{h/2} y dA = \frac{QS}{bI}, \quad S = \int_{y_1}^{h/2} y dA = \int_{y_1}^{h/2} y b dy = \frac{b}{8} (h^2 - 4y_1^2)$$

²²例えば断面が長方形の梁を考えると，曲げ応力の絶対値は梁の上下表面で最大値をとる。いいかえると上下表面ではせん断力は 0。 $dM/dx = Q_x = 0$

断面 2 次モーメントは (8.11) より

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

したがって、せん断応力は

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh^3} (h^2 - 4y_1^2) \quad (8.16)$$

と表され、中立軸 ($y = 0$) の位置で最大値となる距離 y についての 2 次曲線となる。せん断力 Q を断面積 bh で割った平均せん断応力を $\bar{\tau} = \frac{Q}{bh}$ とすれば、(8.16) は

$$\tau = \frac{3}{2} \bar{\tau} \left(1 - \frac{4y_1^2}{h^2} \right) \quad (8.17)$$

となる。せん断応力は中立軸 $y_1 = 0$ で最大値 $\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = 1.5 \bar{\tau}$ をとり、上下面 ($y_1 = \pm h/2$) では $\tau = 0$ となる。

補足：断面に分布している τ をすべて足し合わせるとせん断力 Q になる。 $dA = bdy$ だから

$$\int_A \tau dA = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh^3} \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) bdy = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh^3} \cdot \frac{2bh^3}{3} = Q$$

(ex.4) 半径 r の円形断面におけるせん断応力を求めてみよう。

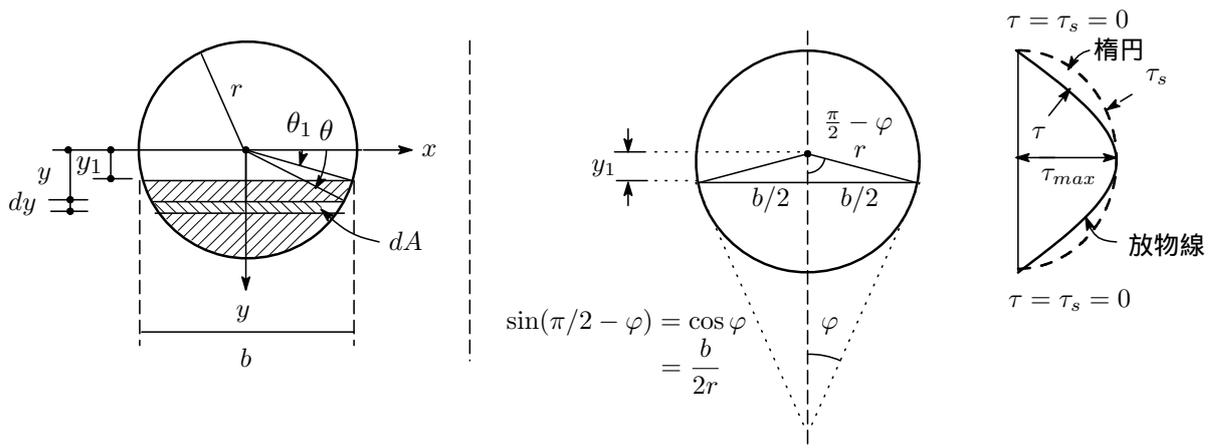


図 8.11: 円形断面のせん断応力

まず、断面 2 次モーメントだが、 $y = r \sin \theta$, $dy = r \cos \theta d\theta$, $dA = 2r \cos \theta dy = 2r^2 \cos^2 \theta d\theta$ となるので、中立軸 x に関する断面 2 次モーメントは

$$I_x = \int_A y^2 dA = 2 \times \left(2r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \right) = 4r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

$b = 2r \cos \theta_1$ なので (8.14) より

$$\tau = \frac{Q}{bI} \int_y^r y dA = \frac{Q}{2r \cos \theta_1 \cdot \frac{\pi r^4}{4}} \cdot 2r^3 \int_{\theta_1}^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{4Q}{\pi r^2 \cos \theta_1} \int_{\theta_1}^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$\cos \theta = t$ とおくと $-\sin \theta d\theta = dt$, $\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\int t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3}\cos^3 \theta$ となるので

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi r^2} \cos^2 \theta_1 = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) \quad (8.18)$$

平均せん断応力を $\bar{\tau} = Q/\pi r^2$ とすると

$$\tau = \frac{4}{3}\bar{\tau} \left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) \quad (8.19)$$

となって, せん断応力 τ は中立軸からの距離 y に関する 2 次曲線となる。最大せん断応力は $y_1 = 0$ の中立軸上に生じて

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\bar{\tau} \quad (8.20)$$

と得られる。円形はりの外周上のせん断応力分布は (8.15) より

$$\tau_s = \frac{\tau}{\cos \phi} = \frac{24}{b3} \bar{\tau} \left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) = \frac{4}{3} \bar{\tau} \left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right)^{1/2} \quad (8.21)$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$\frac{\tau_s^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = 1, \quad \text{ただし } 1/A = 3\bar{\tau}/4, 1/B = 1/r$$

となり, 楕円を表す式となる, τ の分布は 2 次曲線の放物線となったが, 断面周辺の τ_s の分布は同じ 2 次曲線でも楕円となる。 τ と τ_s の最大値はともに中立軸上 $y_1 = 0$ で

$$\tau_{max} = \tau_{s-max} = \frac{4}{3}\bar{\tau} \quad (8.22)$$

となる。

(ex.5) 最後に H 型断面ばりにせん断力 $Q = 10^4 \text{N}$ が作用するときの断面のせん断応力を求めよう。

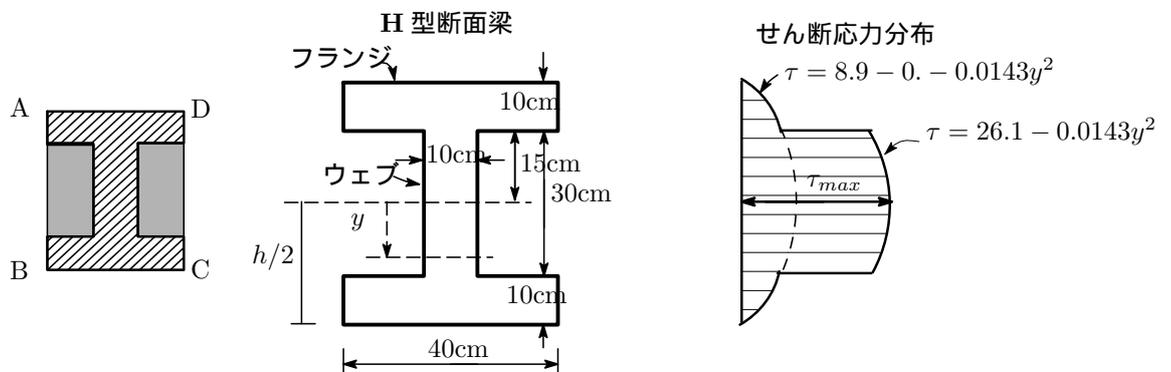


図 8.12: H 型断面梁のせん断応力分布

断面 2 次モーメント I は図の左に示すように四角形 ABCD の 2 次モーメントから塗部の小さな四角形の 2 次モーメントを差し引いたものになるので

$$I = \frac{40 \times 50^3}{12} - 2 \times \frac{15 \times 30^3}{12} = 3.492 \times 10^5$$

次に (8.14) より

$$\tau = \frac{Q}{bI} \int_y^{h/2} y dA$$

断面の 1 次モーメントは y がウェブ内にある場合とフランジ内にある場合とに分けて計算しなければならない。

1) y がウェブ内にある場合

$$\int_y^{h/2} y dA = \int_y^{15} 10y dy + \int_{15}^{25} 40y dy = 9125 - 5y^2$$

$$\therefore \tau = \frac{Q}{bI} \int_y^{h/2} y dA = \frac{10^4}{10 \times 3.492 \times 10^5} \times (9125 - 5y^2) = 26.1 - 0.0143y^2$$

2) y がフランジ内にある場合

$$\int_y^{h/2} y dA = \int_y^{25} 40y dy = 12500 - 20y^2$$

$$\therefore \tau = \frac{Q}{bI} \int_y^{h/2} y dA = \frac{10^4}{40 \times 3.492 \times 10^5} \times (12500 - 20y^2) = 8.9 - 0.0143y^2$$

となる。 τ_{max} は $y = 0$ のところで $\tau_{max} = 26.1 \text{N/cm}^2$ となる。 は放物線状に分布するが、フランジとウェブの継ぎ目で不連続になる。

第9話.

静定構造物の変形 (3)

第6話, 第7話では仮想仕事法や弾性曲線法, モールの定理で「はり」の変形を求めた。第9話はこの続きで, カステリアーノの定理をとりあげる。定理に冠されるカステリアーノはイタリアの数学者、物理学者でカルロ・アルベルト・カステリアーノ (Carlo Alberto Castigliano, 1847-1884) といい, 1873年にこの定理を発見したとのことである。ポイントは変形により溜まるひずみのエネルギーに注目してたわみなどを求めていく。

9 - 1 . 構造物の弾性変形

9 - 1 - 1 . モーメントのなす仕事

第6話でモーメントのなす仕事量 W はモーメント M と回転角 θ の積 $W = M\theta$ として定義されることを説明した²³。いま, M とそれによって引き起こされる回転角 θ との間に $M = k\theta$ という比例関係

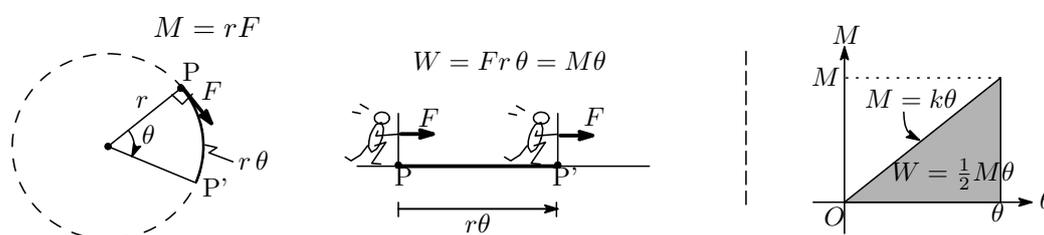


図 9.1: モーメントのなす仕事

があれば, 仕事量は図 9.1 の塗りつぶした三角形の面積に等しく

$$W = \frac{1}{2} M \theta \quad (9.1)$$

で与えられる。

例えばねじりバネに力のモーメントを作用させた場合, 力のモーメント M でねじりバネを $d\theta$ 回転させる仕事は

$$dW = M d\theta = k \theta d\theta$$

で表されるが, これは (6.7) の「曲げモーメントによる仕事量」の式を微分

形式で表したもので, θ を 0 から θ まで積分するとねじりバネに蓄えられるひずみのエネルギーが得られる。

$$W = k \int_0^{\theta} \theta d\theta = \frac{1}{2} k \theta^2 = \frac{1}{2} M \theta$$



²³モーメントの次元は仕事の次元と同じ。 θ は無次元量。

9 - 1 - 2 . ひずみエネルギー

A . 軸方向力によるひずみエネルギー

断面積 A , 長さが ℓ の均質真直棒にかかる荷重が $P = 0$ から P まで増加し棒の長さが ℓ から $\ell + \lambda$ へと伸長したとき , フックの法則に従う弾性範囲で外力がなした仕事量を U_N としよう。縦ひずみを ε ,

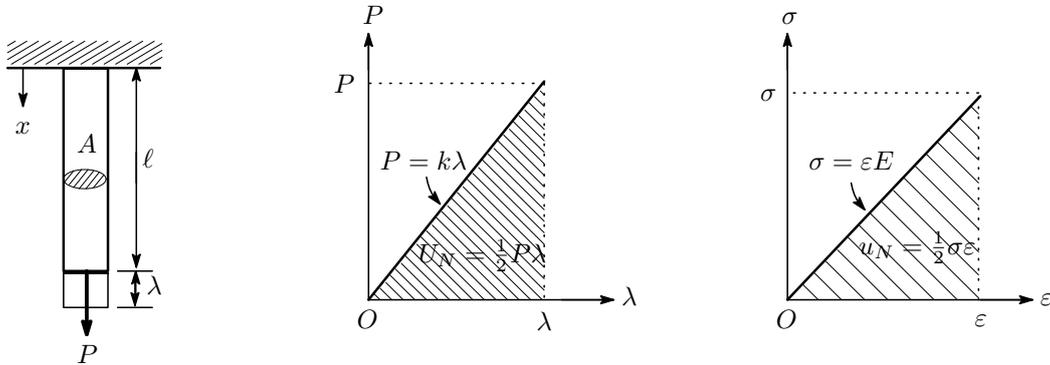


図 9.2: 荷重 - 伸び図

垂直応力を σ とすると

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\ell}, \quad \sigma = \varepsilon E = \frac{P}{A}, \quad \therefore P = \frac{EA}{\ell} \lambda = k \lambda \quad (k = EA/\ell) \quad (9.2)$$

したがって棒の内部に溜まるひずみエネルギーは

$$U_N = \int_0^\lambda P d\lambda = k \int_0^\lambda \lambda d\lambda = \frac{1}{2} k \lambda^2 = \frac{P^2 \ell}{2AE} \quad (9.3)$$

と得られる。なお , ひずみエネルギーを変位で微分するとその変位に対応する P となるが

$$\frac{\partial U_N}{\partial \lambda} = P \quad (9.4)$$

これはカステリアーノの第 1 定理の帰結で詳しい話はまた後で触れる。先に話を進めよう。 $d\lambda = \ell d\varepsilon$ を (9.3) に入れると

$$U_N = \int_0^\lambda P d\lambda = \int_0^\varepsilon EA \ell \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon V \quad (V = A\ell: \text{真直棒の体積}) \quad (9.5)$$

したがって単位体積当たりのひずみのエネルギー u_N は全体積 V で割って

$$u_N = \frac{U_N}{V} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2E} \sigma^2 \quad (9.6)$$

u_N を ε で微分すると

$$\frac{\partial u_N}{\partial \varepsilon} = \sigma \quad (9.7)$$

で , (9.4) と同様の関係式が得られる。

B . トラスのひずみエネルギー

荷重 P が作用している断面積 A , 長さ L の部材からなる正三角形トラスの全ひずみエネルギーを求

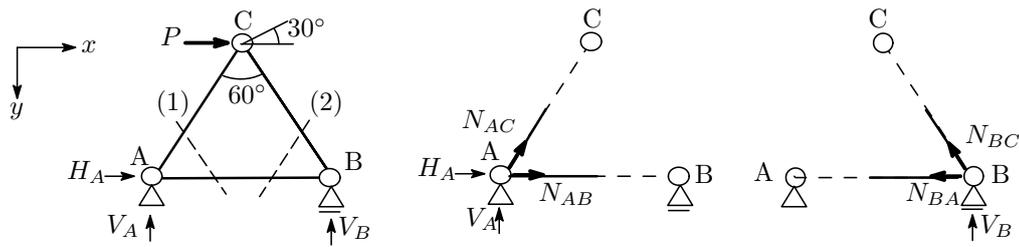


図 9.3: トラス構造

めよう。(9.3)の P に相当するのがトラスの軸方向力になるので、各部材軸方向力を求めれば、全ひずみエネルギーが計算できる。まず反力を求める。ローラー支点である B 点には鉛直方向の反力 V_B しか生じない。したがって

$$\sum X = H_A + P = 0, \quad \sum Y = -(V_A + V_B) = 0, \quad \sum M = L \times V_A + L \times P \cos 30^\circ = 0$$

$$\therefore H_A = -P, \quad V_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}P, \quad V_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

次に各部材の軸方向力を求める。(1)のように仮想切断し節点 A での軸方向力を N_{AB} 、 N_{AC} として力のつり合の式を立てると

$$\begin{cases} \sum X = H_A + N_{AB} + N_{AC} \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y = -(V_A + N_{AC} \sin 60^\circ) = 0 \end{cases} \quad \therefore N_{AB} = \frac{P}{2}, \quad N_{AC} = P \quad (\text{圧縮力})$$

トラスの全ひずみエネルギーは各部材のひずみエネルギーの和なので、(9.3)より

$$U_N = \frac{L}{2AE} (N_{AB}^2 + N_{AC}^2 + N_{BC}^2) = \frac{9P^2L}{8AE} \quad (9.8)$$

と得られる。一般的に n 本の部材からなるトラスの i 番目の軸方向力を N_i 、断面積を A_i 、長さを L_i 、ヤング率を E_i とするとトラスの中に蓄えられる全ひずみエネルギーは

$$U_N = \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{2A_i E_i} N_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i N_i^2 \quad \left(\text{ただし } \rho_i = \frac{L_i}{A_i E_i} \right) \quad (9.9)$$

で与えられる。

C. せん断力によるひずみエネルギー

面積 A の断面にせん断力 Q が作用してせん断ひずみ γ が生じているとする。せん断ひずみエネルギーを U_Q とする。せん断応力 τ とせん断ひずみ γ の間には γ が小さい範囲でフックの法則が成立し、

$$\tau = G\gamma, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (9.10)$$

比例定数 G をせん断弾性係数という²⁴。(9.10)より

$$\tau = \frac{Q}{A} = G \frac{\lambda}{\Delta x} \longrightarrow \lambda = \frac{\Delta x}{GA} Q, \quad \therefore d\lambda = \frac{\Delta x}{GA} dQ$$

²⁴ γ の単位は[rad]、 G の単位は[N/mm²]。

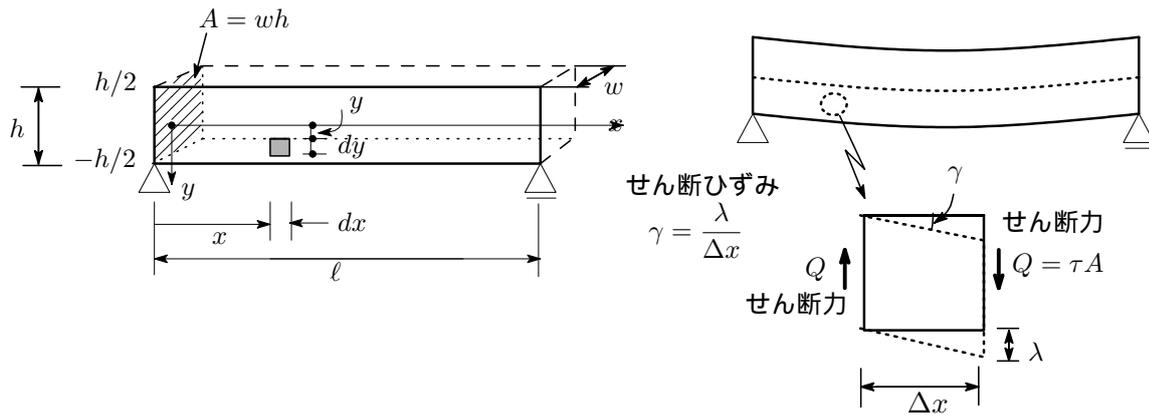


図 9.4: せん断力による歪エネルギー

となるので、せん断力によるひずみエネルギー U_Q は

$$U_Q = \int_0^{\lambda} Q d\lambda = \frac{\Delta x}{GA} \int_0^Q Q dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \Delta x}{GA} \quad (9.11)$$

で与えられる。単位体積当たりのひずみエネルギーを u_Q とすると

$$u_Q = \frac{U_Q}{A\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{GA^2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau\gamma = \frac{1}{2G} \tau^2 \quad (9.12)$$

となる。この式は (9.6) と同じ形をしている。

D. 曲げによるひずみエネルギー

はりの曲げによって蓄えられるひずみエネルギー U_M を求める。

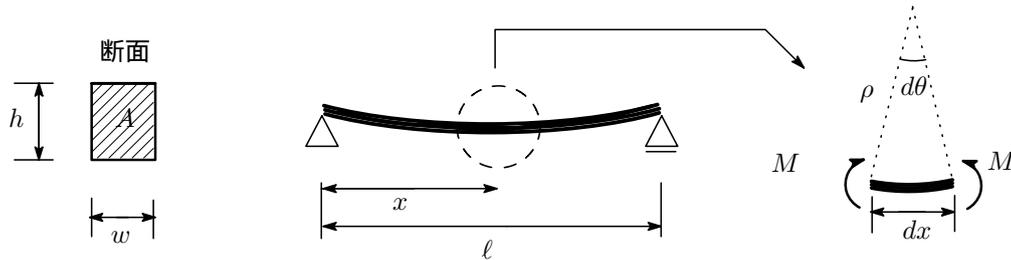


図 9.5: 曲げによる歪エネルギー

長さが l のはりの微小部分 dx について考える。微小部分に作用する曲げモーメントを M とする。部材の曲げ角を $d\theta$ とすると $dx = \rho d\theta$ より

$$d\theta = \frac{1}{\rho} dx = \frac{M}{EI} dx$$

このとき、微小部分に蓄えられるひずみエネルギー U_M は (9.1) より

$$dU_M = \frac{1}{2} M d\theta = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx$$

はり全体に蓄えられるエネルギーは、これを全長にわたって積分して

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \quad (9.13)$$

9 - 1 - 3 . 単純ばりのひずみエネルギー

図 9.6 に示す 1 点に荷重が作用している単純ばりのひずみのエネルギーを求めよう。

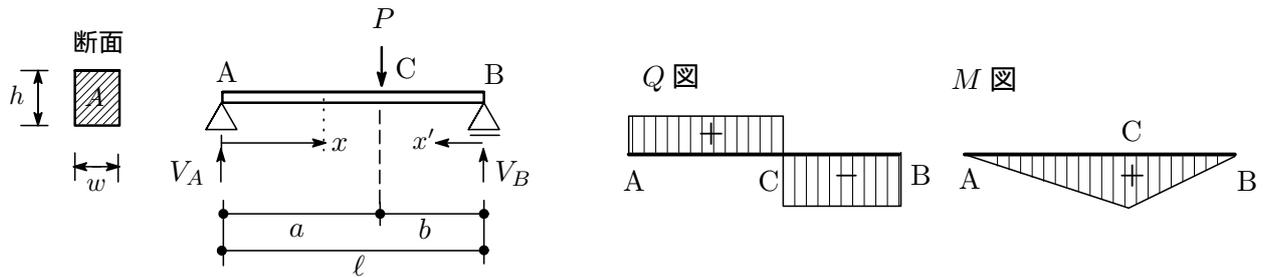


図 9.6: 単純ばりの歪エネルギー

支点 A からの距離 x における位置でのせん断力と曲げモーメントは

$$\text{AC 間 } Q(x) = \frac{b}{\ell}P \quad M(x) = \frac{b}{\ell}Px \quad (0 \leq x \leq a)$$

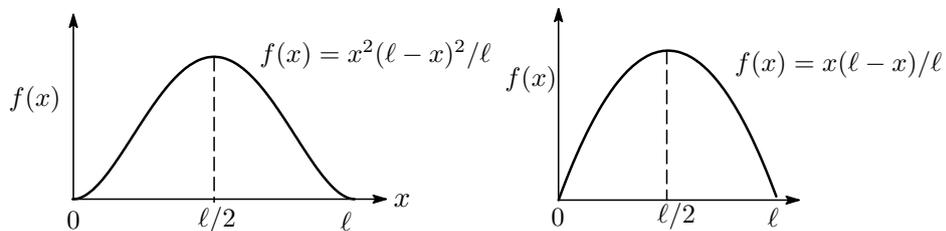
$$\text{BC 間 } Q(x) = -\frac{a}{\ell}P \quad M(x) = \frac{a}{\ell}P(\ell - x) \quad (a \leq x \leq \ell)$$

(1) 曲げモーメントによるひずみエネルギー

M_x は C 点を境に変わるので積分は $0 \leq x \leq a$ と $a \leq x \leq \ell$ の 2 つの範囲に分けて実行すると

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{EI} \left(\frac{b}{\ell}Px \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^\ell \frac{1}{EI} \left(\frac{a}{\ell}P(\ell - x) \right)^2 dx = \frac{a^2 b^2 P^2}{6EI\ell} = \frac{P^2}{6EI} \frac{a^2(\ell - a)^2}{\ell} \quad (9.14)$$

となる。関数 $f(x) = x^2(\ell - x)^2/\ell$ ($0 \leq x \leq \ell$) は $x = \ell/2$ の中央で最大値をとるので、曲げモーメントによる歪エネルギーが最大となるのは荷重 P がはりの中央に作用したときである。



(9.14) に $a = b = \ell/2$ を代入すると

$$U_M^{\max} = \frac{P^2 \ell^3}{96EI} \quad (9.15)$$

が得られる

(2) せん断力によるひずみエネルギー

微小体積 $dA \cdot dx$ のひずみエネルギーは (9.12) より

$$dU_Q = \frac{1}{2} \tau \gamma dA dx = \frac{1}{2G} \tau^2 dA dx$$

したがって全体のひずみエネルギーは

$$U_Q = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_A \frac{\tau^2}{G} dA dx \quad (9.16)$$

となる。せん断応力 τ は (8.16) より

$$\tau = \frac{1}{Ah^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot \frac{Q(x)}{A}$$

で与えられた。これを (9.16) に入れると

$$U_Q = \frac{1}{2GA^2} \int_0^\ell Q(x) dx \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dA$$

$dA = w dy$ なので変数 y についての積分を先に計算すると

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dA = w \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{6}{h^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right\}^2 dy = \frac{6}{5} wh = \frac{6}{5} A$$

となるので、 U_Q は

$$U_Q = \frac{3}{5GA} \int_0^\ell Q(x) dx \quad (9.17)$$

で表される。せん断力 $Q(x)$ は AC 間で $Q(x) = bP/\ell$, BC 間で $Q(x) = -aP/\ell$ なので

$$U_Q = \frac{3}{5GA} \left\{ \int_0^a \left(\frac{bP}{\ell} \right)^2 dx + \int_0^b \left(-\frac{aP}{\ell} \right)^2 dx' \right\} = \frac{3abP^2}{5GA\ell} = \frac{3P^2}{5GA} \frac{a(\ell-a)}{\ell} \quad (9.18)$$

関数 $f(x) = x(\ell-x)/\ell$ は $x = \ell/2$ の中央で最大値をとる。(9.18) に $a = b = \ell/2$ を代入すると

$$U_Q^{max} = \frac{3\ell P^2}{20AG} \quad (9.19)$$

と得られる

補足：“ 曲げモーメントのなす仕事はせん断力のなす仕事よりはるかに大きい” (第6話) の検証。

曲げモーメントとせん断力によるひずみエネルギーを U_M , U_Q とする。ヤング率 E とせん断弾性係数 G の間には次式が成立する。 ν はポアソン比。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\nu = -\varepsilon'/\varepsilon, \quad \varepsilon': \text{横ひずみ度} \quad \varepsilon: \text{縦ひずみ度}) \quad (9.20)$$

ν は弾性限界内では材料固有の定数となり $0 \sim 0.5$ の範囲をとる。これから G は E の $1/3 \sim 1/2$ の大きさとなることが分かる。いま、材料のポアソン比が $\nu = 0.3$ とすると $G = (5/13)E$ 。また、このはりの断面 2 次モーメントは $I = wh^3/12 = Ah^2/12$ なので U_Q は

$$U_Q = \frac{13}{100} \cdot \frac{abh^2P^2}{EI\ell} \quad (9.21)$$

U_Q と U_M の比をとると

$$\frac{U_Q}{U_M} = \frac{39h^2}{50ab}$$

とくに $a = b = \ell/2$ のときは

$$\frac{U_Q}{U_M} = 3.12 \left(\frac{h}{\ell} \right)^2$$

ここで、はりの高さ h とはりの全長 ℓ との比を $h/\ell = 1/10$ とすれば $U_Q/U_M \doteq 0.03$ となる。通常のはりでは $h/\ell < 1/10$ であるから、はりのひずみエネルギーを計算するときはせん断力の影響は無視できることが分かる。

9 - 2 . カステリアーノの定理

お待たせしました，カステリアーノの定理の登場です。この定理には第 1 定理と第 2 定理があって

・カステリアーノの第 1 定理

ひずみエネルギー U を変位 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i$ の関数として表すとき， i 点での外力 P_i は

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (9.22)$$

で表される。

・カステリアーノの第 2 定理

ひずみエネルギー U を外力 P_1, P_2, \dots, P_i の関数として表すとき， i 点での変位 δ_i は

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (9.23)$$

で表される。

定理の適用例として，長さが ℓ の単純ばりの中央に荷重 P が作用しているケースを見てみよう。ひずみエネルギーとたわみは (9.15)，(7.27) で与えられていて

$$U = \frac{P^2 \ell^3}{96EI}, \quad \delta_C = \frac{P \ell^3}{48EI} \rightarrow U = \frac{24EI}{\ell^3} \delta_C^2$$

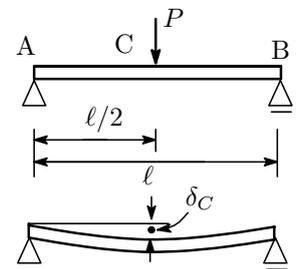
U を δ_C で微分すると

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_C} = \frac{48EI}{\ell^3} \delta_C = P$$

となって，荷重 P が得られる。 U を P で微分すると

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P \ell^3}{48EI} = \delta_C$$

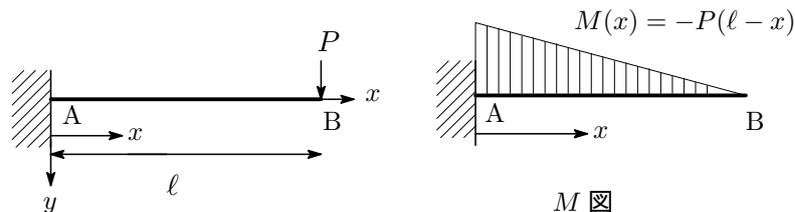
となって変位 δ_C が得られる。



第 2 定理の導出は本話の最後で行うので，さっそく具体的な問題に当たってこよう。

(1) 片持ちばり

自由端 B に荷重 P が作用している片持ちのばりの B 点でのたわみ y_B を求める。ひずみエネルギー



は曲げモーメントによるものだけを考える。 x の距離での曲げモーメントは $M(x) = -P(\ell - x)$ なので (9.13) より

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{P^2(\ell - x)^2}{EI} dx = \frac{\ell^3 P^2}{6EI}$$

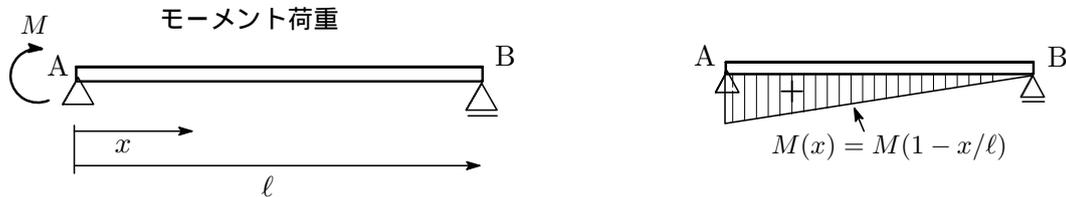
B 点のたわみ δ_B はカステリアーノの第 2 定理から

$$\delta_B = \frac{\partial U_M}{\partial P} = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (9.24)$$

これは (7.19) と一致する。

(2) 単純ばり

支点 A にモーメント荷重 M が作用している単純ばりの A 点におけるたわみ角 θ_A を求める。



支点 A から距離 x の位置の曲げモーメントは (??) より

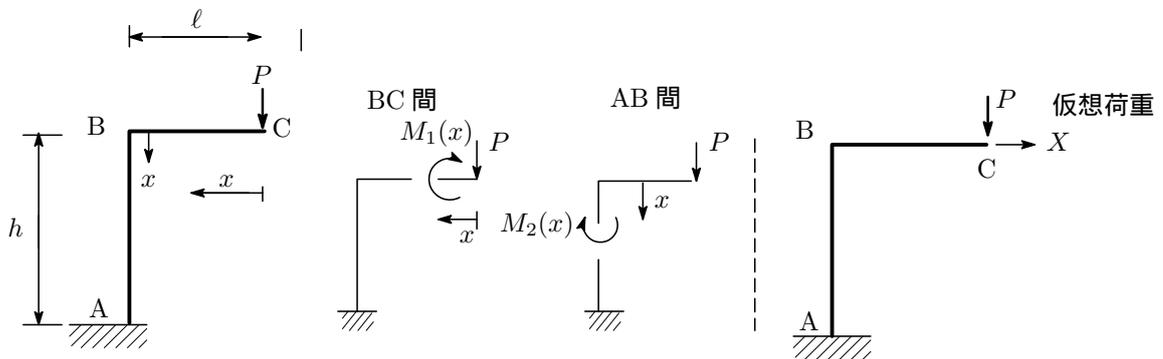
$$M(x) = M \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

したがってたわみ角 θ_A はカステリアーノの第 2 定理より

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{\partial U_M}{\partial M} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{M(x)^2}{EI} \right) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial M} \left\{ M^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^\ell M \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{M\ell}{3EI} \end{aligned}$$

(3) 片持ちばりラーメン

片持ちばりラーメンの曲げによるひずみエネルギー U_M と荷重点 C の鉛直変位 δ_{CV} , 水平変位 δ_{CH} を求める。ただし, 軸方向力の影響は無視する。



曲げモーメントは

$$\text{CB 間 } (0 \leq x \leq \ell) \quad Px + M_1(x) = 0 \quad \therefore M_1(x) = -Px$$

$$\text{BA 間 } (0 \leq x \leq h) \quad P\ell + M_2(x) = 0 \quad \therefore M_2(x) = -P\ell$$

曲げによる片持ちラーメン全体のひずみエネルギーを U とすると

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_1(x)^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^h \frac{M_2(x)^2}{EI} dx = \frac{(3h + \ell)P^2\ell^2}{6EI} \end{aligned}$$

したがって C 点のひずみ δ_{CV} はカステリアーノの第 2 定理より

$$\delta_{CV} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{(3h + \ell)P\ell^2}{3EI}$$

次に水平変位 δ_{CH} を求める。この場合、水平方向の変位を求めるので荷重 P に加えて水平右向きに仮想荷重 X を作用させ、最後に $X \rightarrow 0$ とする。仮想荷重を作用させたときの曲げモーメントは

$$\text{CB 間 } M_1(x) = -Px$$

$$\text{BA 間 } M_2(x) = -P\ell - Xx$$

これから

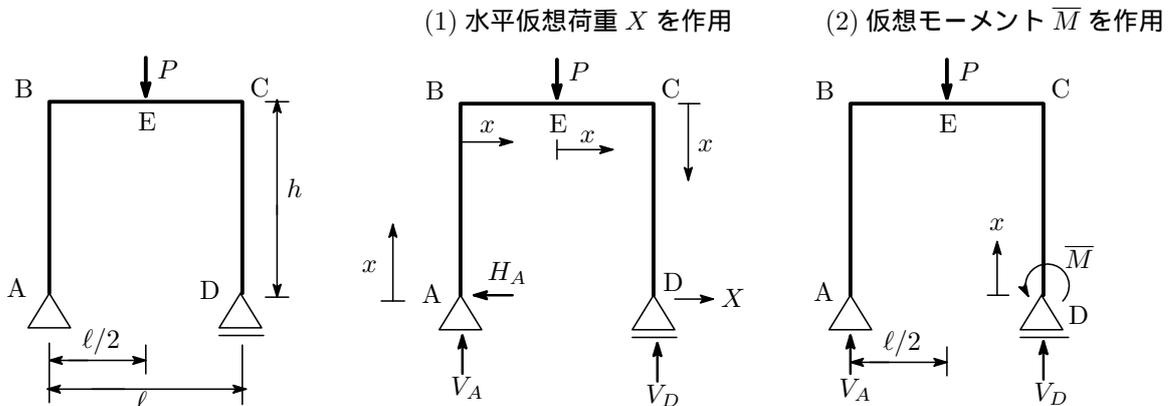
$$U = \frac{(\ell^3 + 3h\ell^2)P^2 + 3h^2\ell PX + h^3X^2}{6EI} \quad (9.25)$$

したがって、C 点の水平変位 δ_{CH} はカステリアーノの第 2 定理より

$$\delta_{CH} = \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X \rightarrow 0} = \frac{(3P\ell h^2 + 2h^3X)}{6EI} \Big|_{X \rightarrow 0} = \frac{P\ell h^2}{2EI}$$

(4) ラーメン

ラーメン構造の部材 BC の中点に鉛直荷重 P が作用しているとき、D 点における水平変位 δ_{DH} とたわみ角 θ_D を求める。



D 点の水平変位を求めるために D 点に水平方向右向きに仮想荷重 X を作用させる。このときピン支点 A には水平反力 H_A が生じる。支点 A, D での反力を V_A, H_A, V_D とすると

$$\sum X = -H_A + X = 0 \quad \therefore H_A = X$$

$$\sum Y = P - (V_A + V_D) = 0 \quad \therefore V_A + V_D = P$$

$$\sum M_A = -\ell V_D + \frac{\ell}{2}P = 0 \quad \therefore V_D = V_A = \frac{P}{2}$$

各部材に生じる曲げモーメントは

$$\text{AB 間 } (0 \leq x \leq h) \quad M_1(x) = xH_A = Xx$$

$$\text{BE 間 } (0 \leq x \leq \ell) \quad M_2(x) = xV_A + hH_A = \frac{P}{2}x + hX$$

$$\text{EC 間 } (0 \leq x \leq \ell/2) \quad M_3(x) = -xP + \left(\frac{\ell}{2} + x\right)V_A + hH_A = -Px + \left(\frac{\ell}{2} + x\right)\frac{P}{2} + hX$$

$$\text{CD 間 } (0 \leq x \leq h) \quad M_4(x) = (h - x)X$$

ラーメンのひずみエネルギーは各部材のひずみエネルギーの総和になるので

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^h \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell/2} \frac{M_2^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell/2} \frac{M_3^2}{2EI} dx + \int_0^h \frac{M_4^2}{2EI} dx \\
 &= \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_i^2}{2EI} dx
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

カステリアーノの第2定理よりD点の水平変位 δ_{DH} は $\frac{\partial U}{\partial X}$ を計算すれば求められるが、直接計算するのではなく次の合成関数の微分法を活用すれば計算が容易になる。

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial U}{\partial M_i} \frac{\partial M_i}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial M_1} \frac{\partial M_1}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial M_2} \frac{\partial M_2}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial M_3} \frac{\partial M_3}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial M_4} \frac{\partial M_4}{\partial X}$$

(9.26)の各項は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial M_1} \frac{\partial M_1}{\partial X} &= \int_0^h \frac{M_1}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial X} dx = \int_0^h \frac{X}{EI} x^2 dx = \frac{h^3 X}{3EI} \\
 \frac{\partial U}{\partial M_2} \frac{\partial M_2}{\partial X} &= \int_0^{\ell/2} \frac{M_2}{EI} \frac{\partial M_2}{\partial X} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{2} x + hX \right) h dx = \frac{h\ell(\ell + 8hX)}{16EI} \\
 \frac{\partial U}{\partial M_3} \frac{\partial M_3}{\partial X} &= \int_0^{\ell/2} \frac{M_3}{EI} \frac{\partial M_3}{\partial X} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left\{ -Px + \left(\frac{\ell}{2} + x \right) \frac{P}{2} + Xh \right\} h dx = \frac{h\ell(P\ell + 8hX)}{16EI} \\
 \frac{\partial U}{\partial M_4} \frac{\partial M_4}{\partial X} &= \int_0^h \frac{M_4}{EI} \frac{\partial M_4}{\partial X} dx = \int_0^h \frac{1}{EI} X(h-x)(h-x) dx = \frac{h^3 X}{3EI}
 \end{aligned}$$

となり、D点の水平変位は

$$\delta_{DH} = \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=0} = \frac{h\ell^2 P}{8EI} \tag{9.27}$$

と求められる。

次にD点のたわみ角 θ_D を求める。仮想水平荷重 X の代わりに仮想モーメント \bar{M} をD点に作用させればよい。このときの反力は

$$\begin{aligned}
 \sum Y &= P - (V_A + V_D) = 0 \quad \therefore V_A + V_D = P \\
 \sum M_A &= \frac{\ell}{2} P - \bar{M} - \ell V_D = 0 \quad \therefore V_D = \frac{P}{2} - \frac{\bar{M}}{\ell}, \quad V_A = \frac{P}{2} + \frac{\bar{M}}{\ell}
 \end{aligned}$$

各部材に生じる曲げモーメントは

$$\begin{aligned}
 \text{AB間 } (0 \leq x \leq h) \quad M_1(x) &= 0 \\
 \text{BE間 } (0 \leq x \leq \ell) \quad M_2(x) &= xV_A = \left(\frac{P}{2} + \frac{\bar{M}}{\ell} \right) x \\
 \text{EC間 } (0 \leq x \leq \ell/2) \quad M_3(x) &= -xP + \left(\frac{\ell}{2} + x \right) V_A = \left(\frac{\bar{M}}{\ell} - \frac{P}{2} \right) x + \frac{\bar{M}}{2} + \frac{P\ell}{4} \\
 \text{DC間 } (0 \leq x \leq h) \quad M_4(x) &= \bar{M}
 \end{aligned}$$

したがって、カステリアーノの第2定理より

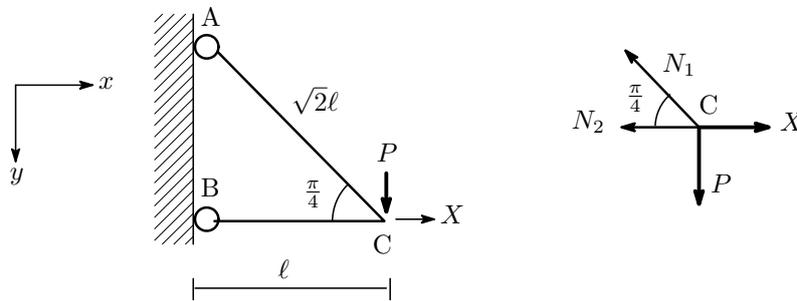
$$\begin{aligned}\theta_D &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left(\frac{\bar{M}}{\ell} + \frac{P}{2} \right) x \left(\frac{x}{\ell} \right) dx \\ &\quad + \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{2}x + \frac{\bar{M}}{\ell}x + \frac{\bar{M}}{2} + \frac{P\ell}{4} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\ell} \right) dx + \int_0^h \frac{1}{EI} \bar{M} dx \\ &= \frac{(2\bar{M} + P\ell)\ell}{48EI} + \frac{(7\bar{M} + P\ell)\ell}{24EI} + \frac{h\bar{M}}{EI}\end{aligned}$$

ここで $\bar{M} \rightarrow 0$ とすると

$$\theta_D = \frac{P\ell^2}{16EI} \quad (9.28)$$

(5) トラス

点A, Bがピン接合で壁に固定された2本の部材からなるトラスがあり, 点Cに荷重Pが作用している。点Cの鉛直方向の変位 δ_{CV} と水平方向の変位 δ_{CH} を求める。



点Cに仮想荷重Xを作用させ, 各部材の軸方向力 N_1, N_2 を求める。点Cでの力のつり合いより

$$X - N_2 - N_1 \cos 45^\circ = 0$$

$$P - N_1 \sin 45^\circ = 0 \quad \therefore N_1 = \sqrt{2}P, N_2 = X - P$$

トラス全体のひずみエネルギーは(9.9)より

$$U_N = \frac{\sqrt{2}\ell N_1^2}{2AE} + \frac{\ell N_2^2}{2AE} = \frac{\ell}{2AE} \left\{ 2\sqrt{2}P^2 + (X - P)^2 \right\}$$

したがってカステリアーノの第2定理より

$$\delta_{CV} = \frac{\partial U_N}{\partial P} \Big|_{X=0} = \frac{(1 + 2\sqrt{2})P\ell}{AE}$$

$$\delta_{CH} = \frac{\partial U_N}{\partial X} \Big|_{X=0} = -\frac{P\ell}{AE}$$

これから点Cは下向きに δ_{CV} , 左向きに δ_{CH} 変位することが分かる。

9 - 3 . カステリアーノの第 2 定理の導出

カステリアーノの第 2 定理を導出する。最初にマクスウェルの相反定理の話を決ませ、第 2 定理の導出という段取りとなる。

(1) マクスウェルの相反定理

弾性体の 2 点 A_1, A_2 を考える。いま、点 A_1 に荷重 P_1 が作用して点 A_1 は A'_1 に変位したとし、 P_1 方向の変位成分を $a_{11}P_1$ とする。この状態において点 A_2 に荷重 P_2 を作用させ、その結果、点 A_1 が荷重 P_1 の方向へ $a_{12}P_2$ だけ変位したとしよう。

- ・ 点 A_1 において荷重 P_1 により P_1 の方向へ $a_{11}P_1$ だけ移動
- ・ 点 A_1 において荷重 P_2 により P_1 の方向へ $a_{12}P_2$ だけ移動

比例係数 a_{ij} の最初の添え字 i は変位点の位置、あとの添え字 j は荷重点の位置を表すものとする。荷重 P_1, P_2 による点 A_1 の変位を δ_1 とすると、 δ_1 は $a_{11}P_1$ と $a_{12}P_2$ との重ね合わせになる。

$$\delta_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 \quad (9.29)$$

点 A_2 においてもまったく同じことがいえるので、点 A_2 における P_2 方向の変位を δ_2 とすると

$$\delta_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 \quad (9.30)$$

となる。変位が δ_1, δ_2 から $d\delta_1, d\delta_2$ だけ増加するときのひずみエネルギーの増加 dU は

$$dU = P_1d\delta_1 + P_2d\delta_2 \quad (9.31)$$

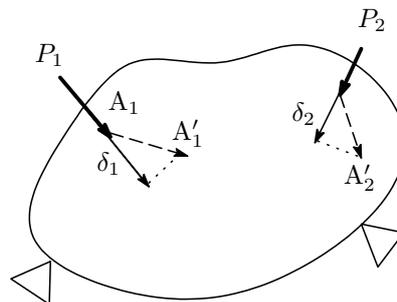


図 9.7: 荷重と変位

(9.29), (9.30) より

$$d\delta_1 = a_{11}dP_1 + a_{12}dP_2, \quad d\delta_2 = a_{21}dP_1 + a_{22}dP_2$$

これを (9.31) に入れて整理すると

$$dU = (a_{11}P_1 + a_{21}P_2)dP_1 + (a_{12}P_1 + a_{22}P_2)dP_2 \quad (9.32)$$

ひずみエネルギーは P_1, P_2 の連続関数 $U = U(P_1, P_2)$ なので、 U の全微分は

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2}dP_2$$

と表され, (9.32) との比較より

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = a_{11}P_1 + a_{21}P_2, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 \quad (9.33)$$

を得る。(9.33) の第 1 式を P_2 で, 第 2 式を P_1 で偏微分すると

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_1 \partial P_2} = a_{21}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial P_2 \partial P_1} = a_{12} \quad (9.34)$$

U は連続関数なので微分の順序に無関係であることから

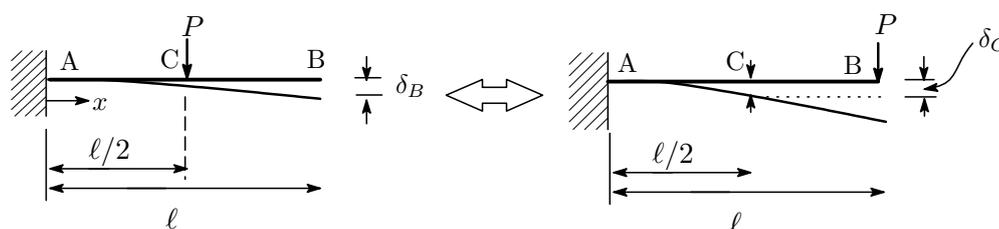
$$a_{21} = a_{12} \quad (9.35)$$

の関係が得られる。これをマクスウェルの相反定理という。一般に n 個の荷重が作用した場合にも同様の関係 ($a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, \dots$) が成立する。

荷重としてモーメント荷重が作用すれば変位は回転角になる。力やモーメント荷重をあわせて一般化力, 作用方向の移動量 (距離や回転角) を一般化変位といっている。

補足: マクスウェルの相反定理の意味するところを具体的説明すると, a_{12} は A_2 点に単位荷重 $P_2 = 1$ が作用したために点 A_1 に生じる P_1 方向の変位, a_{21} は点 A_1 に単位荷重 $P_1 = 1$ が作用したために点 A_2 に生じる P_2 方向の変位で, これが相等しいということを行っている。つまり点 A_2 に単位荷重 $P_2 = 1$ が作用したために点 A_1 に生じる P_1 方向の変位は, 点 A_1 に単位荷重 $P_1 = 1$ が作用したために点 A_2 に生じる P_2 方向の変位に等しいということ。

次の例題を考えてみよう。長さ ℓ の片持ちばり AB の中点 C に荷重 P が作用する場合, 点 B におけるたわみ δ_B を求めるという問題で, 自由端 B に荷重 P が作用する場合, 中点 C におけるたわみ δ_C は



(7.11) より

$$\delta_C = \frac{P}{6EI} (3\ell - x)x^2 \Big|_{x=\ell/2} = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

マクスウェルの相反定理より, このたわみ δ_C は点 C に荷重 P が作用するために点 B のたわみ δ_B に等しいことになる。//

さて, ここまでくればカステリアーノの第 2 定理の導出は容易にできる。

(2) カステリアーノの第 2 定理の導出

(9.33) に (9.35) を入れて整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P_1} &= a_{11}P_1 + a_{21}P_2 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 = \delta_1 \\ \frac{\partial U}{\partial P_2} &= a_{12}P_1 + a_{22}P_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 = \delta_2 \end{aligned}$$

の関係式が得られる。これを一般化力と一般化変位に拡張して表すと

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i, \quad \frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i \quad (9.36)$$

となる。これはカステリアーノの第2定理である。

第 10 話は不静定構造物の話題をとりあげる。

10 - 1 . 1 次不静定ばり (1 端固定・他端単純支持ばり)

A. 集中荷重

V_A, V_B, H_B, M_B の 4 つの反力をもつ 1 次不静定性の 1 端固定・他端単純支持ばり²⁵を考えよう。

1 次不静定ばり

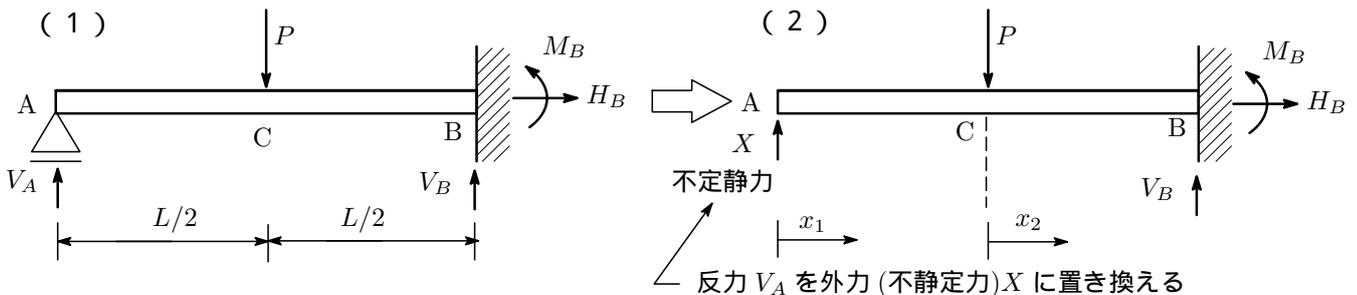


図 10.1: 1 次不静定ばり

上図 (1) でローラー支点 A がなければこれは片持ち静定ばりである。そこで、支点 A に働く反力 V_A を、片持ち支持ばりの自由端 A に作用する「外力 X 」とみなせば、1 次不静定ばりの問題を静定ばりの問題にすり替えることができ、そうなる力のつり合いの式だけで対処が可能になる！ 外力として置き換えた反力を「不静定力」といい、不静定問題を静定問題と不静定力に置き換えた形を基本静定形と呼んでいる。それでは 1 次不静定ばりの問題を解いていこう。

(1) 反力と断面力を求める

・最小作用の原理

最小作用の原理を使って解こう。最小仕事の原理というのはカステリアーノの第 2 定理のいいかえにあたるが、「構造物を支える支点反力は構造物に生じるひずみエネルギーが最小になるように働く」というもの。ひずみエネルギー U を X の関数として求め、 $\partial U / \partial X = 0$ より不静定力 X を確定する。

さて、図 10.1 (2) の基本静定形片持ちばりでの各反力は、力のつり合いの式より

$$\begin{aligned} X + V_B - P &= 0, & LX - \frac{L}{2}P - M_B &= 0, & H_B &= 0 \\ \therefore V_B &= P - X, & M_B &= \left(X - \frac{P}{2}\right)L, & H_B &= 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

と表せる。荷重 P に加え外力 X が作用したときの曲げモーメント M は²⁶

$$M: \begin{cases} \text{AC 間 } (0 \leq x_1 \leq L/2) & M_{AC} = Xx_1 \\ \text{CB 間 } (0 \leq x_2 \leq L/2) & M_{CB} = (X - P)x_2 + \frac{L}{2}X \end{cases} \quad (10.2)$$

²⁵(5.2) の判別式 $m = n + j - 3s$ を使えば $n = 4, j = 0, s = 1$ で $m = 1$ となる。

²⁶第 1 話・片持ちばり 2 点荷重参照

したがって、ひずみエネルギー U は (9.13) より

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^{L/2} M_{AC}^2 dx_1 + \frac{1}{2EI} \int_0^{L/2} M_{CB}^2 dx_2 \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^{L/2} (Xx_1)^2 dx_1 + \frac{1}{2EI} \int_0^{L/2} \left\{ (X-P)x_2 + \frac{L}{2}X \right\}^2 dx_2 \end{aligned} \quad (10.3)$$

となる。ひずみエネルギーが最小となる X は $\partial U / \partial X = 0$ を満たす²⁷ことから

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} &= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} Xx_1^2 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left\{ (X-P)x_2 + \frac{L}{2}X \right\} \cdot \left(x_2 + \frac{L}{2} \right) dx_2 \\ &= \frac{XL^3}{24EI} + \frac{(14X-5P)L^3}{48EI} = \frac{L^3}{48EI} (16X-5P) = 0 \\ \therefore X &= \frac{5}{16}P \end{aligned} \quad (10.4)$$

と得られる。これを (10.1) に代入すれば各反力は

$$\begin{cases} V_A = X = \frac{5}{16}P, & V_B = P - X = \frac{11}{16}P \\ M_B = \left(X - \frac{P}{2} \right) = -\frac{3}{16}PL, & H_B = 0 \end{cases} \quad (10.5)$$

と求められ、また、断面力は

$$Q: \begin{cases} \text{AC 間 } (0 \leq x_1 \leq L/2) & Q_{AC} = \frac{\partial M_{AC}}{\partial x_1} = X = \frac{5}{16}P \\ \text{CB 間 } (0 \leq x_2 \leq L/2) & Q_{CB} = \frac{\partial M_{CB}}{\partial x_2} = X - P = -\frac{11}{16}P \end{cases} \quad (10.6)$$

$$M: \begin{cases} \text{AC 間 } (0 \leq x_1 \leq L/2) & M_{AC} = \frac{5}{16}Px_1 \\ \text{CB 間 } (0 \leq x_2 \leq L/2) & M_{CB} = -\frac{11}{16}Px_2 + \frac{5}{32}PL \end{cases} \quad (10.7)$$

と求められる。

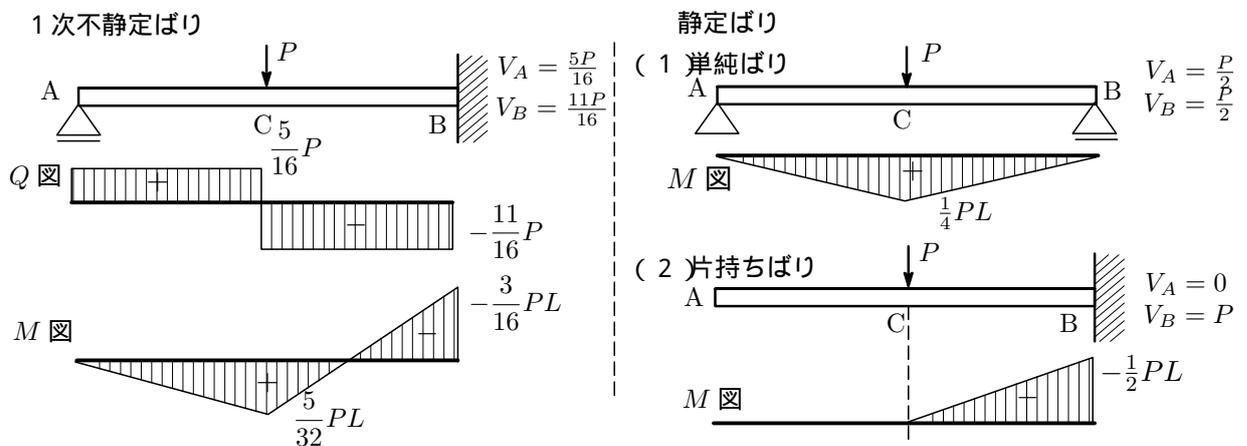


図 10.2: 1 次不静定ばりと静定ばりの比較

²⁷カステリアーノの第2定理によれば点 A のたわみ δ_A は $\delta_A = \partial U / \partial X$ で与えられる。ところで A は支点なのでたわみはゼロである。最小仕事の原理とカステリアーノの第2定理は同じ結果を与える。

補足：図 10.2 に示す静定ばりのケースと比較してみよう。同じ長さの単純ばり (1) の中央に荷重 P が作用すれば最大曲げモーメントは $M_{max} = PL/4 = 0.25PL$, 片持ちばり (2) では $M_{max} = PL/2 = 0.5PL$ となる。一方, 1 次不静定ばりの最大曲げモーメントは $M_{max} = -3PL/16 = -0.19PL$ である。両者を絶対値で比較すれば, 1 次不静定ばりの方が値が一番小さく, はりの応力が一番小さいことになる。支点反力を較べてみても不静定ばりの方が小さい。ということで, 不静定構造にすることでのはりの安全性を高めることができるということがわかる。実際の構造物のほとんどが不静定構造物である理由がここにある。

・ 仮想仕事の原理

次に仮想仕事の原理²⁸を使って解こう。この要点は支点 A のたわみ δ_A を X の関数として求め, 支点 A は撓まないことから $\delta_A = 0$ として X を確定するということになる。C 点に単位仮想荷重 $\bar{P} = 1$ を作用させたときの仮想曲げモーメント \bar{M} は

曲げモーメント	仮想系	実体系	
・ AC 間 ($0 \leq x_1 \leq L/2$)	$\bar{M} = x_1,$	$M = Xx_1,$	(10.8)
・ CB 間 ($0 \leq x_2 \leq L/2$)	$\bar{M} = x_2 + \frac{L}{2},$	$M = (X - P)x_2 + \frac{L}{2}X,$	

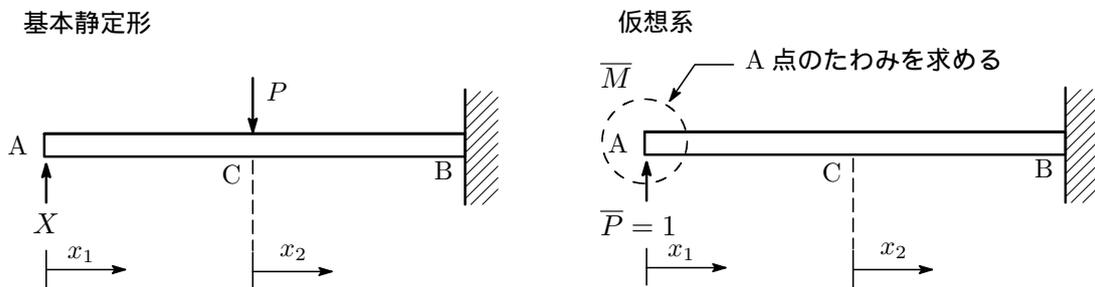


図 10.3: 仮想仕事の原理

仮想仕事の原理 (6.11) より δ_A は

$$\begin{aligned}
 \delta_A &= \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \bar{M} M dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \bar{M} M dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} X x_1^2 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(x_2 + \frac{L}{2} \right) \cdot \left\{ (X - P)x_2 + \frac{L}{2}X \right\} dx_2 \\
 &= \frac{L^3}{48EI} (16X - 5P)
 \end{aligned}
 \tag{10.9}$$

ところで支点 A の変位はゼロなので $\delta_A = 0$ でなければならない。これから

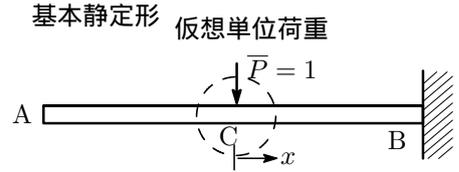
$$X = \frac{5}{16}P
 \tag{10.10}$$

となる。これは最小仕事の原理から求めた (10.4) と一致する。

²⁸仮想仕事の原理を忘れた方は第 6 話を再読されたし。

たわみ δ_C を求める

ついでに C 点の鉛直たわみ δ_C を求めよう。右図の基本静定形で C 点に仮想単位荷重を掛ける。実曲げモーメントと仮想曲げモーメント \bar{M} は



$$M_{AC} = Xx_1, \quad M_{CB} = \frac{5}{32}PL - \frac{11}{16}Px$$

$$\bar{M}_{AC} = 0, \quad \bar{M}_{CB} = -x$$

これから C 点のたわみは

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \int M\bar{M}dx = \int_0^{L/2} \left(\frac{5}{32}PL - \frac{11}{16}Px \right) (-x)dx = \frac{7PL^3}{768EI}$$

と求められる。

B. 等分布荷重

(1) 最小作用の原理

等分布荷重 w の 1 次不静定ばりの問題を最小作用の原理を使って解こう。図 10.4 を参照いただきたい。

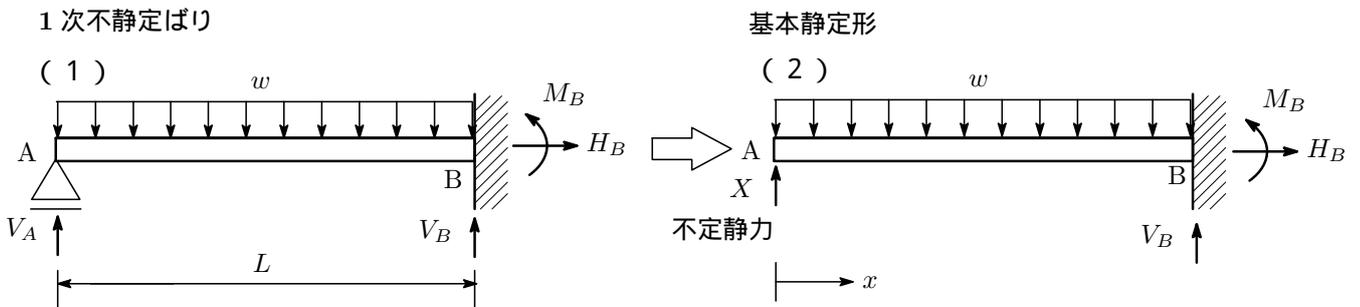


図 10.4: 等分布荷重

図(2)に示す反力 V_A を不静定力 X に置き換えた基本静定形を考える。曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = Xx - \frac{wx^2}{2} \tag{10.11}$$

であたえられるのでひずみエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(Xx - \frac{wx^2}{2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{L^3}{120EI} (3L^2w^2 - 15LwX + 20X^2) \tag{10.12}$$

U を最小にする X は

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{L^3}{120EI} (-15LwX + 40X) = 0, \quad X = \frac{3}{8}wL \tag{10.13}$$

したがって反力 V_A, V_B は

$$V_A = X = \frac{5}{8}wL, \quad V_B = wL - X = wL - V_A = \frac{3}{8}wL \quad (10.14)$$

となる。断面力は

$$\begin{cases} M(x) = Xx - \frac{wx^2}{2} = \frac{3}{8}wLx - \frac{1}{2}wx^2 \\ Q(x) = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{3}{8}wL - wx \end{cases} \quad (10.15)$$

Q 図, M 図を図 10.5 に示す。

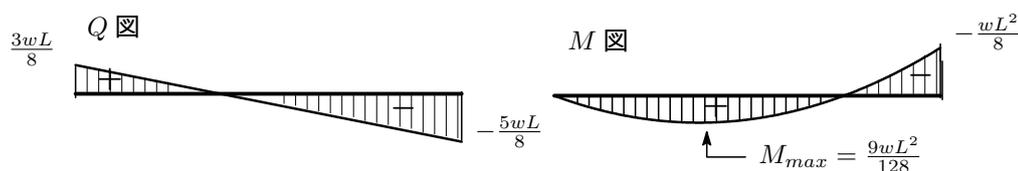


図 10.5: 1 次不静定ばり・等分布荷重の Q, M 図

10 - 2 . 1 次不静定ラーメン

A . 水平荷重

水平荷重 P が作用している 1 次不静定ラーメン²⁹ の支点 B での水平変位を求める。反力は V_A, V_B, H_A, H_B の 4 つ。B 点の水平変位を求めるために B 点のピン支点をローラ支点に変え, 反力 H_B を外力 X に置き換えた基本静定形を考える。

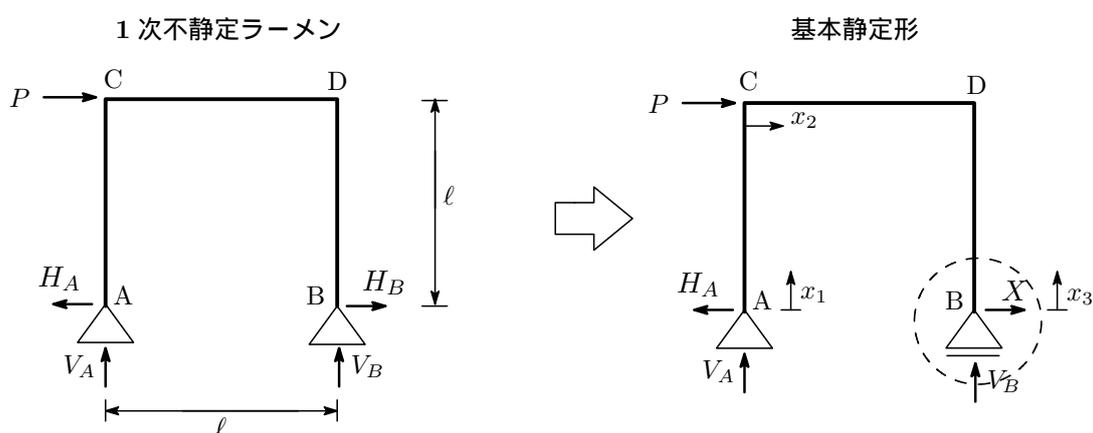


図 10.6: 水平荷重ラーメン

反力は力のつり合いの式より

$$\begin{aligned} \sum X_{\text{水平}} = P - H_A + X = 0, \quad \sum Y = V_A + V_B = 0, \quad \sum M_B = V_A \ell + P \ell = 0 \\ \therefore H_A = P + X, \quad V_A = -P, \quad V_B = P \end{aligned} \quad (10.16)$$

²⁹ $m = n + j - 3S = 4 + 3 \times 2 - 3 \times 3 = 1$

曲げモーメントは

$$\begin{cases} \text{AC間 } (0 \leq x_1 \leq h) & M_{AC} = H_A x_1 = (P + X)x_1 \\ \text{CD間 } (0 \leq x_2 \leq \ell) & M_{CD} = V_A x_2 + H_A \ell = P(\ell - x_2) + X\ell \\ \text{BD間 } (0 \leq x_3 \leq h) & M_{BD} = X x_3 \end{cases} \quad (10.17)$$

したがって、ひずみエネルギー U は (9.13) より

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left(\int_0^\ell M_{AC}^2 dx_1 + \int_0^\ell M_{CD}^2 dx_2 + \int_0^\ell M_{BD}^2 dx_3 \right) \\ &= \frac{(2P^2 + 5PX + 5X^2)\ell^3}{6EI} \end{aligned} \quad (10.18)$$

と得られる。B 点の水平変位 δ_{BH} は

$$\delta_{BH} = \frac{\partial U}{\partial X} /_{X=0} = \frac{5P\ell^3}{6EI} \quad (10.19)$$

最小作用の原理 $\partial U / \partial X = 0$ より

$$X = -\frac{P}{2} \quad (10.20)$$

したがって反力は

$$V_A = -P, V_B = P, H_A = \frac{P}{2}, H_B = -\frac{P}{2} \quad (10.21)$$

曲げモーメントは

$$\begin{cases} \text{AC間 } (0 \leq x_1 \leq \ell) & M_{AC} = \frac{P}{2} x_1 \\ \text{CD間 } (0 \leq x_2 \leq \ell) & M_{CD} = P \left(\frac{\ell}{2} - x_2 \right) \\ \text{BD間 } (0 \leq x_3 \leq \ell) & M_{BD} = -\frac{P}{2} x_3 \end{cases} \quad (10.22)$$

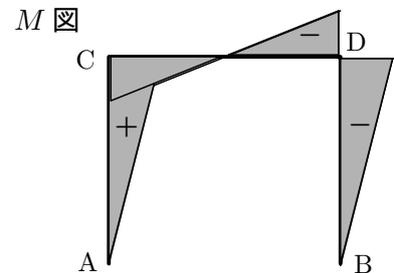


図 10.7: 水平荷重 1 次不静定ラーメンの M 図

B. 等分布荷重

等分布荷重が作用している 1 次不静定ラーメンを考えよう。反

力は V_A, V_B, H_A, H_B の 4 つ。B 点の水平変位を求めるため B 点のピン支点をローラ支点に変え、反力 H_B を外力 X に置き換えた基本静定形を考える。

反力は力のつり合いの式より

$$\begin{aligned} \sum X_{\text{水平}} = H_A - X = 0, \quad \sum Y = V_A + V_B - w\ell = 0, \quad \sum M_B = V_A \cdot \ell - \frac{w\ell^2}{2} = 0 \\ \therefore H_A = X, \quad V_A = V_B = \frac{w\ell}{2} \end{aligned} \quad (10.23)$$

曲げモーメントは

$$\begin{cases} \text{AC間 } (0 \leq x_1 \leq h) & M_{AC} = -H_A x_1 = -X x_1 \\ \text{CD間 } (0 \leq x_2 \leq \ell) & M_{CD} = -H_A h + \frac{wl}{2} x_2 - \frac{w}{2} x_2^2 = -X h + \frac{wl}{2} x_2 - \frac{w}{2} x_2^2 \\ \text{BD間 } (0 \leq x_3 \leq h) & M_{BD} = X x_3 \end{cases} \quad (10.24)$$

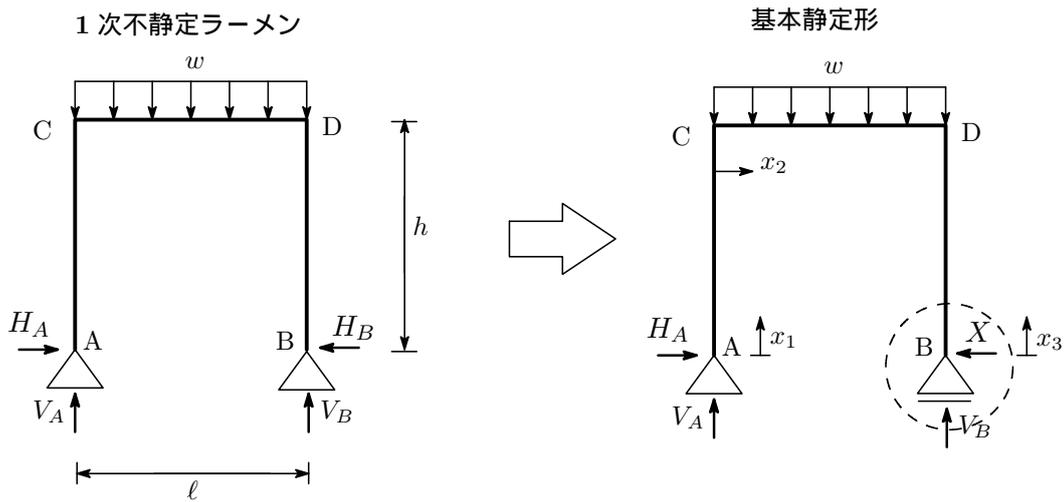


図 10.8: 等分布荷重ラーメン

ひずみエネルギー U は (9.13) より

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left(\int_0^h M_{AC}^2 dx_1 + \int_0^\ell M_{CD}^2 dx_2 + \int_0^h M_{BD}^2 dx_3 \right) \\
 &= \frac{80h^3 + 120h^2\ell}{240EI} X^2 - \frac{h\ell^3 w}{12EI} X + \frac{\ell^5 w^2}{240EI}
 \end{aligned} \tag{10.25}$$

B 点の水平変位 δ_{BH} は

$$\delta_{BH} = \frac{\partial U}{\partial X} /_{X \rightarrow 0} = -\frac{h\ell^3 w}{12EI} \tag{10.26}$$

最小作用の原理 $\partial U / \partial X = 0$ より

$$X = -\frac{w\ell^3}{4h(2h + 3\ell)} \tag{10.27}$$

したがって反力は

$$V_A = B_B = \frac{w\ell}{2}, \quad H_A = -\frac{w\ell^3}{4h(2h + 3\ell)} \tag{10.28}$$

曲げモーメントは

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{AC} = -\frac{w\ell^3}{4h(2h + 3\ell)} x_1 \\ M_{CD} = -\frac{w\ell^3}{4(2h + 3\ell)} + \frac{w\ell}{2} x_2 - \frac{w}{2} x_2^2 \\ M_{BD} = \frac{w\ell^3}{4h(2h + 3\ell)} x_3 \end{array} \right. \tag{10.29}$$

参考文献

- 1) 浅野清昭：図説・優しい構造力学，学芸出版，2008年.
- 2) 阪口理，須賀好富，窪田敏行：テキスト建築構造力学1，学芸出版，1994年.
- 3) 太田和彦・藤井大地：はじめて学ぶ建築構造力学，森北出版，2008年.
- 4) 望月重，濱本卓司：改訂版・建築構造のための力学演習，鹿島出版会，2003年.
- 5) 平修二：現代材料力学，オーム社，昭和52年.
- 6) 有光隆：図解でわかるはじめての材料力学，技術評論社，2012年.