非線形振動（その２）

KENZOU

2008 年 10 月 4 日
2012 年 3 月 8 日 (加筆修正[*])

♣いよいよ初秋を感じさせる少し涼しくなってきたある日，コニーがユナを連れて K氏 を訪れてきた。

- コニー：こんにちわ〜K さん。朝早くから 2 人揃って押しかけてきたけど，季節はいよいよ秋という感じになってきたわね。
- K氏：こんにちは，コニー。オ〜ッ，ユナも一緒かい。随分久しぶりだね。
- ユナ：こんにちは，K さん。ご無沙汰しています。今日は非線形振動その２のお話が聞けるということで，いろいろ都合をつけてコニーと一緒にきたの。その１のお話はコニーからノートを借りて一通り読んだわ。今日はどんなお話が聞けるのか楽しみにしているの。
- K氏：そうかい。それじゃ少し気張らなくっちゃ。え〜っと前回は変位 x と x^3 に比例した復元力が働くダフィング方程式 $\ddot{x}+\omega^2x+\beta x^3=0$ を，楕円積分を使って厳密解を求めるやり方と，非線形パラメーター β が大変小さいということにして摂動法によるやり方を説明したね。今回は，x^3 の代わりに速さの 2 乗に比例する抵抗が働く振動を摂動法でやっていくことから話を始めようと思うんだけど。
- コニー：摂動法は，前回，振幅が発散してしまう擬似共鳴項がでてきてびっくりしたけど，その対処法も学んだし，どういうお話になるのか楽しみだわ。
- ユナ：そうね，私も気を引き締めてお話をお伺いするわ。よろしくお願いします。
- K氏：了解。それではじめようか。

5 非線形振動（２話目）

5.1 速さの 2 乗に比例した抵抗が作用する場合の振動

5.1.1 数値解

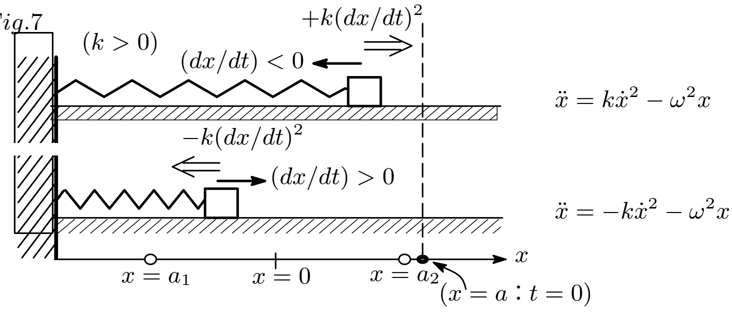
- K氏：問題とする振動系の方程式は，パラメータ $k>0$ として

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{x}>0\text{ の場合} & \cdots & \ddot{x}+k\dot{x}^2+\omega^2x=0 \\ \dot{x}<0\text{ の場合} & \cdots & \ddot{x}-k\dot{x}^2+\omega^2x=0 \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

となる。なぜ 2 つの方程式を考えるかということは，質点 $(m=1)$ が x 軸の正の方向に進んでいるとき $(dx/dt>0)$ は x 軸の負の方向に速度に比例した抵抗（力）が働き，逆に質点が x 軸の負の方向に進んでいる $(dx/dt<0)$ ときは x 軸の正の方向に抵抗（力）が働くということを表しているんだね。

[*]12.3.8：冷泉院さんから，誤植と速度の 2 乗に比例した抵抗を受ける振動摂動計算の誤りのご指摘を受ける。Thank's 冷泉院さん。

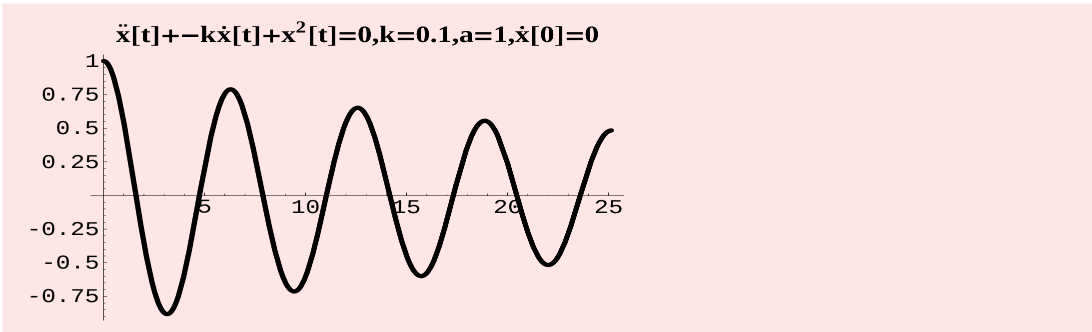
Fig.7



初期条件は

$$t=0 \quad : \quad x=a\ (a>0), \quad \dot{x}=0 \tag{5.2}$$

としよう。バネが伸びる場合と縮む場合の方程式がそれぞれ異なるから，解は 2 つ存在する ことになる。まずは，Mathematica で計算した（5.1）の数値解の結果をグラフで示しておこう。




```
(*Mathemataica*)
 L1=StyleForm["x''[t]+-kx'[t]^2+x[t]^2=0, a=1, k=0.1, x'[0]=0",
 FontFamily->"Times", FontWeight->Bold,FontSize->12];
 Sol=NDSolve[{x''[t]+0.1*x'[t]^2*Sign[x'[t]]+x[t]==0,x[0]==1,x'[0]==0},x[t],{t,0,8 π}];
 Plot[x[t]/.Sol,{t,0,8 π},PlotStyle->Thickness[0.01],PlotLabel->L1]
```

5.1.2 摂動計算による近似解

最初はバネを展ばしたところからスタートするので $dx/dt<0$ だ。方程式は

$$\boxed{\ddot{x}-k\dot{x}^2+\omega^2 x=0} \tag{5.3}$$

となる。この初期条件は $t=0,\ x=a$ だね。次に，時刻 $t=t_1,\ x=x_1$ でバネが十分縮みきったときは $dx/dt=0$ となり，それから後の方程式は

$$\boxed{\ddot{x}+k\dot{x}^2+\omega^2 x=0} \tag{5.4}$$

で記述される。この方程式の初期条件は $t=t_1,\ x=x_1,\ \dot{x}=0$ ということになるね。k は非常に小さいということで，先ず（5.3）を**摂動法**で解いていこう。前回やったように非線形パラメータ k のベキで展開して

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_0+k\varphi_1+k^2\varphi_2+\cdots \\ \omega^2 &= p^2+C_1k+C_2k^2+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

とおくんだったね。これから先は コニー 復習をかねてやってみるかい。

- ユナ：頑張ってね，コニー。
- コニー：まかせておいて。(5.5）を（5.3）に代入して，k^2 までの項をとるわけね。まず材料を調理しなくては。。。

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{\varphi}_0 + k\dot{\varphi}_1 + k^2\dot{\varphi}_2 \\
\dot{x}^2 &= \dot{\varphi_0}^2 + k^2\dot{\varphi_1}^2 + k^4\dot{\varphi_2}^2 + 2k\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 + 2k^3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 2k^2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_2 \\
&\simeq \dot{\varphi_0}^2 + 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 k + (\dot{\varphi_1}^2 + 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_2)k^2 \\
\omega^2 x &= (p^2 + C_1 k + C_2 k^2)(\varphi_0 + k\varphi_1 + k^2\varphi_2) \\
&\simeq p^2\varphi_0 + (C_1\varphi_0 + p^2\varphi_1)k + (C_2\varphi_0 + C_1\varphi_1 + p^2\varphi_2)k^2
\end{aligned}
$$

となるので，方程式は

$$
\ddot{\varphi}_0 + p^2\varphi_0 + (\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 - \dot{\varphi_0}^2 + C_1\varphi_0)k + (\ddot{\varphi}_2 + p^2\varphi_2 - 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 + C_2\varphi_0 + C_1\varphi_1)k^2 = 0
$$

となる。この方程式が任意の k に対して成り立つためには k のそれぞれの係数がゼロでなければならないから，整理すると

$$
\left.
\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}_0 + p^2\varphi_0 = 0 \\
&\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = \dot{\varphi_0}^2 - C_1\varphi_0 \\
&\ddot{\varphi}_2 + p^2\varphi_2 = 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 - C_2\varphi_0 - C_1\varphi_1
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.6}
$$

そして，初期条件から

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varphi_0(0) = a \quad (\dot{\varphi}_0)_{t=0} = 0 \\
&\varphi_1(0) = 0 \quad (\dot{\varphi}_1)_{t=0} = 0 \\
&\varphi_2(0) = 0 \quad (\dot{\varphi}_2)_{t=0} = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.7}
$$

でなくてはならないわけね。そして，まず（5.6）の第 1 式から

$$
\boxed{\varphi_0 = a\cos pt}
\tag{5.8}
$$

が得られるわ。これが**第 0 次の近似解**ね。この解を第 2 式に入れると

$$
\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = a^2p^2\sin^2 pt - C_1 a\cos pt
$$

が得られるわ。ここで $\cos pt$ の項は ”悪名高い（？）”共鳴項となるので，$C_1 = 0$ として消すわけね。そうすると

$$
\boxed{\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = a^2p^2\sin^2 pt}
\tag{5.9}
$$

が得られる。続いてこの微分方程式の特解を求めていくわけだけど，少し手ごわい感じねぇ〜。。。。

- K氏：OK，結構面倒な計算なのでミスをしやすいけど，いままではバッチリだね。ひとまずそこで手を止めてくれる。特解を見つけるのに苦戦しているわけだね。ただ，この微分方程式の場合，2 階線形だけど $\dot{\varphi}_1$ がない簡単な形をしているだろ。その特長を掴むと意外と簡単に特解が見つかるんだ。右辺を三角関数の公式を使って

$$
\boxed{\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = \frac{1}{2}a^2p^2(1 - \cos 2pt)}
\tag{5.10}
$$

と変形してやる。$\cos 2pt$ は 2 階微分してももとに戻るね。そこで特解を

$$
\varphi_1 = \xi + \eta\cos 2pt
$$

とおいてこれを上の方程式に入れ，両辺を比較して係数 ξ, η を決めてやるんだ。やってみると

$$-4\eta p^2 \cos 2pt + \xi p^2 + \eta p^2 \cos 2pt = \frac{1}{2}a^2 p^2 - \frac{1}{2}a^2 p^2 \cos 2pt$$

$$\therefore \quad \xi = \frac{1}{2}a^2, \quad \eta = \frac{1}{6}a^2$$

と求まる。だから特解は

$$\boxed{\varphi_1 = \tfrac{1}{2}a^2\left(1 + \tfrac{1}{3}\cos 2pt\right)} \tag{5.11}$$

が得られる。OK，それじゃコニー 一般解を求めてくれる。

- コニー：なるほどねぇ〜，あの程度の微分方程式でビクビクしていてはダメね。さてと，一般解は

$$\varphi_1 = A_1 \sin pt + B_1 \cos pt + \frac{1}{2}a^2\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2pt\right)$$

とおいて，初期条件（5.7) の第 2 式より係数 A_1, B_1 を決めると

$$\varphi_1(0) = 0 \longrightarrow B_1 = -\frac{2}{3}a^2, \quad (\dot{\varphi}_1)_{t=0} \longrightarrow A_1 = 0$$

となるので，

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}a^2 \cos pt + \frac{1}{6}a^2 \cos 2pt \tag{5.12}$$

となったわ。ということで方程式（5.3）の**第 1 次近似解**は

$$\boxed{x(t) = \varphi_0(t) + k\varphi_1(t) = a\cos pt + k\frac{a^2}{6}\left(3 - 4\cos pt + \cos 2pt\right), \quad p^2 = \omega^2} \tag{5.13}$$

ということね。1 次の近似解とはいえ結構複雑な形ね。

- K氏：お見事！上出来だ。ところで，先ほど特解を求めるのに方程式の特長を活用したうまい手を使ったけど，一般の**定数係数・非同次 2 階線形微分方程式**の場合には解の公式があって，一応復習をしておこうか。詳しくはここのサイト（`http://rhodes.fuis.fukui-u.ac.jp/~yamada/edu/2nddeq.pdf`）を見ていただくとして，いまのケースの公式を書いておくよ。

＜解の公式＞

$y'' + qy = r(x) \longrightarrow$ 一般解：$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x)$

$y_1(x)$, $y_2(x)$ は同次方程式の基本解

$$Y(x) = -\frac{y_1(x)}{W_0}\int y_2 r(x)dx + \frac{y_2(x)}{W_0}\int y_1(x)r(x)dx$$

$$W_0 = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0)$$

この公式を使えば一気に一般解を求めることができるよね。ついでだ，コニー やってみる。

- コニー：わかりました。問題にしている方程式を解の公式のあてはめればいいのね。先ず同次方程式の解は $A_1 \sin pt + A_2 \cos pt$ となるから一般解は $\varphi_1(x) = A_1 \sin pt + A_2 \cos pt + Y(t)$ となるわね。そこで W_0 を計算すると $y_1(t) = A_1 \sin pt$, $y_2(t) = A_2 \cos pt$ とみなして

$$W_0 = y_1(0)\dot{y}_2(0) - \dot{y}_1(0)y_2(0) = -A_1 A_2 p$$

$Y(t)$ は Mathematica の Web 積分サービス (http://integrals.wolfram.com/index.jsp) を利用して

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= -\frac{A_1 \sin pt}{A_1 A_2 p} \int A_2 \cos pt \cdot a^2 p^2 \sin^2 pt dt + \frac{A_2 \cos pt}{A_1 A_2 p} \int A_1 \sin pt \cdot a^2 p^2 \sin^2 pt dt \\
&= a^2 p^2 \left\{ \sin pt \int \cos pt \sin^2 pt dt - \cos pt \int \sin^3 pt dt \right\} \\
&= \frac{a^2}{12} \left\{ 4 \sin^4 pt - \cos pt (\cos 3pt - 9 \cos pt) \right\} \text{ と得られるわ。続けて整理していくと} \\
&= \frac{a^2}{12} \left\{ 4(1 - \cos^2 pt)^2 - \cos pt (4 \cos^3 pt - 12 \cos pt) \right\} \\
&= \frac{a^2}{3} (1 + \cos^2 pt) \\
&= \frac{1}{2} a^2 (1 + \frac{1}{3} \cos 2pt)
\end{aligned}
$$

となったので,

$$\boxed{\varphi_1(t) = A_1 \sin pt + A_2 \cos pt + \tfrac{1}{2} a^2 \left(1 + \tfrac{1}{3} \cos 2pt\right)}$$

となるわ。なるほど先ほど求めた特解がちゃんと入っているわね。

- K氏：だろう。うまい手を使うか解の公式を使うかは方程式の形によりけりだね。先ず省エネ計算ができるかどうか，大事なポイントと思うんだ。さて，バネが縮みきった点の x の値はどうなる？

- コニー：そうね，そこでは $\dot{x} = 0$ となるから

$$\dot{x} = -ap \sin pt + k \frac{a^2 p}{3} (2 \sin pt - \sin 2pt) = 0$$

これを満たす t は $t = 0$ を除いて，$t = \pi/p = \pi/\omega$ となるので，これを（5.13）に入れると

$$x = -a + \frac{4}{3} k a^2$$

が得られるわね。これはバネが縮みきった位置だから，その位置を $x = a_1$ とすると

$$\boxed{a_1 = -a + \tfrac{4}{3} k a^2} \tag{5.14}$$

となるわ。

- K氏：そうだね。k が十分小さいと $|\, a_1 \,|$ は a より小さいよね。え〜っと，いまの場合はバネが縮む方向に動いた時の解だね。$x = a_1$ の位置から今度はバネが伸び始める，微分方程式が（5.4）に変わるわけだけど，その 1 次の近似解はどうなるかな？

- コニー：え〜っと，バネが縮みはじめる微分方程式は $\ddot{x} - k\dot{x}^2 + \omega^2 x = 0$ で，縮みきったところから今度は伸びはじめる微分方程式は $\ddot{x} + k\dot{x}^2 + \omega^2 x = 0$。この 2 つの方程式は k の符号が違うだけだから，$k' = -k$ として今までの得られた結果を利用できないかなぁ。。。あっ，ダメだ，k を任意の係数として摂動の各項の方程式をだしているところで k の符号は関係なくなるわね。ザンネン，この手は使えない。正攻法で攻めていくとして。。。バネの縮みきった点を初期条件として

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_0(0) = a_1, \quad (\dot{\varphi}_0)_{t=0} = 0 \\
\varphi_1(0) = 0, \quad (\dot{\varphi}_1)_{t=0} = 0 \\
\varphi_2(0) = 0, \quad (\dot{\varphi}_2)_{t=0} = 0
\end{aligned}
\right\} \tag{5.15}
$$

非線形パラメータ k のベキで展開して

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \varphi_0 + k\varphi_1 + k^2 \varphi_2 + \cdots \\
\omega^2 &= p^2 + C_1 k + C_2 k^2 + \cdots
\end{aligned}
\right\} \tag{5.16}
$$

これを $\ddot{x}+k\dot{x}^2+\omega^2x=0$ に入れて k の 2 次の項まで残して整理すると，摂動の各項の方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\varphi}_0+p^2\varphi_0=0\\&\ddot{\varphi}_1+p^2\varphi_1=-(\dot{\varphi}_0^2+C_1\varphi_0)\\&\ddot{\varphi}_2+p^2\varphi_2=-(2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1+C_2\varphi_0+C_1\varphi_1)\end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

となる。第 1 式より得られる $\varphi_0=a_1\cos pt$ を第 2 式に入れ，共鳴項を消して得られる式は

$$\ddot{\varphi}_1+p^2\varphi_1=-a_1^2p^2\sin^2 pt \tag{5.18}$$

先ほど習った処方箋通りにこの微分方程式の特解を求めていくと

$$\varphi_1(t)=-\frac{1}{2}a_1^2(1+\frac{1}{3}\cos 2pt) \tag{5.19}$$

したがって一般解は

$$\varphi_1(t)=A_1\sin pt+B_1\cos pt-\frac{1}{2}a_1^2(1+\frac{1}{3}\cos 2pt) \tag{5.20}$$

初期条件より

$$(\dot{\varphi}_1)_{t=0}=(A_1p\cos pt-B_1p\sin pt+(1/3)a_1^2p\sin 2pt)_{t=0}=0:A_1=0,\quad \varphi_1(0)=0:B_1=\frac{2}{3}a_1^2 \tag{5.21}$$

これから

$$\begin{aligned}&\varphi_1(t)=-\tfrac{1}{2}a_1^2+\tfrac{2}{3}a_1^2\cos pt-\tfrac{1}{6}a_1^2\cos 2pt\\&x(t)=\varphi_0(t)+k\varphi_1(t)=a_1\cos pt-k\tfrac{a_1^2}{6}(3-4\cos pt+\cos 2pt)\\&\dot{x}(t)=-a_1p\sin pt-k\tfrac{a_1^2p}{3}(2\sin pt-\sin 2pt)\end{aligned} \tag{5.22}$$

$\dot{x}=0$ になるのは $t=\pi/p$ のときだから，バネが伸びきった位置を a_2 とすると

$$(x)_{t=\pi/p}=a_2=-a_1-\frac{4}{3}ka_1^2 \tag{5.23}$$

となるわね。

- K氏：ご苦労さま，よくやったね。$a=1$, $k=0.1$ として 1 次摂動近似の具体的数値を求めると次のようになるね。

a	a_1	a_2
1.000	-0.876	0.767

ところで，正攻法ではなく，今までの結果を利用することができないか，ちょっと考えてみよう。k の項だけが符号が異なるので，$x'=-x$ と置いてやると。。。$\ddot{x}+k\dot{x}^2+\omega^2x=0\longrightarrow-\ddot{x}'+k\dot{x'}^2-\omega^2x'=0$ となって，これから最初に解いた微分方程式と同じ形にすることができるね。

$$\ddot{x}'-k\dot{x'}^2+\omega^2x'=0 \tag{5.24}$$

ここで注意しておかなければならない点は，$x'=-x$ としたことによって，x' で記述されるバネは x で記述されるバネの位置と正反対（伸びる運動 $\rightleftharpoons$ 縮む運動に対応）になっているという点だね。だから，この微分方程式の初期条件は

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(0)=-a_1,\quad(\dot{\varphi}_0)_{t=0}=0\\&\varphi_1(0)=0,\qquad(\dot{\varphi}_1)_{t=0}=0\\&\varphi_2(0)=0,\qquad(\dot{\varphi}_2)_{t=0}=0\end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

となるわけだ。a_1 に負号が付くことに注意してね。第 1 次の近似解はしたがって

$$x'(t)=-a_1\cos pt+k\frac{a^2}{6}(3-4\cos pt+cos2pt),\quad p^2=\omega^2 \tag{5.26}$$

これから“ バネが縮みきった位置 ”a_2 はは (5.14) の結果をが利用できるので

$$(x')_{t=\pi/p} = a_2 = a_1 + \frac{4}{3}ka_1^2 \tag{5.27}$$

となる。ここで元の変数 x に戻し，バネが伸びきった位置を改めて a_2 とすると，これは (5.27) の右辺に負号を付けたものになるから

$$a_2 = -a_1 - \frac{4}{3}ka_1^2 \tag{5.28}$$

となり，(5.23) と同じ結果が得られるというわけだね。以上の結果を総合してみよう。便宜上，バネが縮む場合を＋，伸びる場合を－と表わすとすると

$$\begin{cases} +: \quad a_1 = -a + \dfrac{4}{3}ka^2 \\ -: \quad a_2 = -a_1 - \dfrac{4}{3}ka_1^2 \\ +: \quad a_3 = -a_2 + \dfrac{4}{3}ka_2^2 \\ -: \quad a_4 = -a_3 - \dfrac{4}{3}ka_3^2 \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

これから

$$\boxed{a_n = -a_{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{4}{3}ka_{n-1}^2, \quad (a_0 = a,\, n = 1, 2, \cdots)} \tag{5.29}$$

と表わすことができるね。

さて，近似をさらに進めて **2 次摂動の解**を求めていこうか，ユナ どうだい。

- ユナ：まず，$t=0$ からバネが縮む運動の解を求めるわね。材料を整理すると 1 次摂動までの解は

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(t) &= a\cos pt \\ \varphi_1(t) &= \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{2}{3}a^2\cos pt + \tfrac{1}{6}a^2\cos 2pt \end{aligned}\right\}$$

これを（5.6）の第 3 式に入れて $C_1 = 0$ であることを考慮すると

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + p^2\varphi_2 &= 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 - C_2\varphi_0 \\ &= -C_2 a\cos pt - 2ap\sin pt\left(\frac{2}{3}a^2 p\sin pt - \frac{1}{3}a^2 p\sin 2pt\right) \\ &= -C_2 a\cos pt - \frac{4}{3}a^3p^2(1-\cos^2 pt) + \frac{4}{3}a^3p^2(1-\cos^2 pt)\cos pt \\ &= \frac{4}{3}a^3p^2(\cos^2 pt - 1) + \left(\frac{4}{3}a^3p^2 - C_2 a\right)\cos pt - \frac{4}{3}a^3p^2\cos^3 pt \\ &= \frac{2}{3}a^3p^2(2\cos^2 pt - 1) - \frac{2}{3}a^3p^2 + \left(\frac{4}{3}a^3p^2 - C_2 a\right)\cos pt - \frac{4}{3}a^3p^2\left(\frac{\cos 3pt + 3\cos pt}{4}\right) \\ &= -\frac{2}{3}a^3p^2 - \left(C_2 a - \frac{1}{3}a^3p^2\right)\cos pt + \frac{2}{3}a^3p^2\cos 2pt - \frac{1}{3}a^3p^2\cos 3pt \end{aligned}$$

となるので，ここで $\cos pt$ の**擬似共鳴項**を消すと

$$C_2 = \frac{1}{3}a^2p^2 \tag{5.30}$$

が得られるので，方程式は

$$\boxed{\ddot{\varphi}_2 + p^2\varphi_2 = -\tfrac{2}{3}a^3p^2 + \tfrac{2}{3}a^3p^2\cos 2pt - \tfrac{1}{3}a^3p^2\cos 3pt} \tag{5.31}$$

となるわね。この微分方程式の特解を求めるわけだけど，幸い右辺は定数項と三角関数だけだから，省エネ法が使えるので，特解を

$$\varphi_2 = \xi + \eta \cos 2pt + \zeta \cos 3pt \tag{5.32}$$

とおいて（5.31）に入れて係数 ξ, η, ζ を求めると

$$\xi p^2 - 3\eta p^2 \cos 2pt - 8\zeta p^2 \cos 3pt = -\frac{2}{3}a^3p^2 + \frac{2}{3}a^3p^2 \cos 2pt - \frac{1}{3}a^3p^2 \cos 3pt$$

$$\therefore \quad \xi = -\frac{2}{3}a^3, \quad \eta = -\frac{2}{9}a^3, \quad \zeta = \frac{1}{24}a^3$$

したがって特解は

$$\boxed{\varphi_2(t) = -\tfrac{2}{3}a^3 - \tfrac{2}{9}a^3 \cos 2pt + \tfrac{1}{24}a^3 \cos 3pt} \tag{5.33}$$

と得られる。一般解は

$$\varphi_2(t) = A_2 \sin pt + B_2 \cos pt - \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{9}a^2 \cos 2pt + \frac{1}{24}a^3 \cos 3pt$$

とおいて，初期条件（5.7) の第 3 式より係数 A_2, B_2 を決めると

$$A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{61}{72}a^3 \tag{5.34}$$

となるので，求める一般解は

$$\boxed{\varphi_2(t) = -\tfrac{2}{3}a^3 + \tfrac{a^3}{72}(61 \cos pt - 16 \cos 2pt + 3 \cos 3pt)} \tag{5.35}$$

となったわ。そこで **2 次の近似解**は

$$\boxed{x = a \cos pt + k\tfrac{a^2}{6}\,(3 - 4\cos pt + cos2pt) - k^2\tfrac{a^3}{72}(48 - 61 \cos pt + 16 \cos 2pt - 3 \cos 3pt)} \tag{5.36}$$

$$\boxed{\omega^2 = p^2 + C_1k + C_2k^2 = p^2 + \tfrac{1}{3}a^2p^2k^2} \tag{5.37}$$

となるという次第ね。

- K氏：ＯＫ！　次は振幅の計算だね。
- ユナ：やはりそうきたわね（笑い）。まず，バネが縮む方向で $\dot{x} = 0$ となるのは $t = \pi/p$ のときだから（5.42）より

$$\boxed{t = \tfrac{\pi}{p} = \tfrac{\pi}{\omega}\sqrt{1 + \tfrac{1}{3}a^2k^2} \simeq \tfrac{\pi}{\omega}\left(1 + \tfrac{1}{6}a^2k^2\right)} \tag{5.38}$$

となるので,（5.36）に $t = \pi/p$ を入れると

$$\boxed{x = a_1 = -a + \tfrac{4}{3}ka^2 - \tfrac{16}{9}k^2a^3} \tag{5.39}$$

が得られるわ。1 次の場合と比較して 2 次の補正項 $-\frac{16}{9}k^2a^3$ が入っているわね。ついでにバネが伸びる場合は，先ほどの コニー やKさんの計算結果を拝借して

$$\boxed{a_2 = -a_1 - \tfrac{4}{3}ka_1^2 + \tfrac{16}{9}k^2a_1^3} \tag{5.40}$$

a_1 から a_2 まで到達する所要時間は

$$\boxed{t \simeq \tfrac{\pi}{\omega}\left(1 + \tfrac{1}{6}a_1^2k^2\right)} \tag{5.41}$$

ということかしら。伸びたり縮んだりする最大振幅は

$$\boxed{a_n = -a_{n-1} + (-1)^{n-1}\left(\frac{4}{3}ka_{n-1}^2 - \frac{16}{9}k^2a_{n-1}^3\right), \quad (a_0 = a,\, n = 1, 2, \cdots)} \tag{5.42}$$

と表わせることになるわね。

- K氏：ＯＫ！　1 次摂動近似と 2 次摂動近似の具体的数値を求めてみると次のようになるね。

	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1 次摂動	1.000	-0.867	0.767	-0.686	0.625	-0.573
2 次摂動	1.000	-0.884	0.768	-0.697	0.626	-0.578

お疲れ様〜，2 人とも少し疲れただろう，*Coffee Break* にしよう。

—————— *Coffee Break* ——————

- コニー・ユナ：さんせい〜い !! 少し頭がカッカしているところよ，冷やさなくってはネ（笑い)。
- ユナ：モロゾフの少しお高い高級チョコレートと美味しそうなクッキーを買ってきてあるの。
- コニー：私は梨と葡萄とパパイアを買ってきたわ。
- K氏：そうれは大変なご馳走だね。それじゃ僕はとびっきりのうまいコーヒーでも淹れようか。
- コニー：いい香りねぇ〜。なんという名前のコーヒー？
- K氏：エッ，なまえ。。。(ポカンとして）名前はとくに知らない，いろいろあるようだけどね。いずれにしても豆やさんが進めてくれたのを気に入ったのでずっとそれを買っているという次第なんだ。コーヒーの淹れ方も凝っている人は凝っているようだね。僕はずぼらだからご覧のようにペーパーで漉すだけだけだけど（笑い)。ただ，カップは湯通しして暖めているよ。さぁ入った，どうぞ召し上がれ。
- コニー・ユナ：いただきまぁ〜す。
- ユナ：(コーヒーをすすりながら）いま解いた速度の 2 乗に比例する抵抗を受ける振動（A）は，テキストによくでてくる減衰振動の方程式（B）とよく似ているわね。方程式を並べて比べると

$$\begin{aligned} &A \quad \ddot{x} \pm k\dot{x}^2 + \omega^2 x = 0 \quad (\dot{x} > 0 : +k,\, \dot{x} < 0 : -k) \\ &B \quad \ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega^2 x = 0 \end{aligned}$$

  なんだけど，B のケースでは A のように速度の正負でいちいち符号を換えるようなことはしなかったけど，このあたりはどうなのかしら？
- コニー：そういえばそうね，いままであまり気にしなかったけど。。。
- K氏：(チョコレートをほおばりながら) そうだね，だた 2 乗と 1 乗の違いなんだ。というのは抵抗は常に進行方向に対して逆の方向に作用するだろう。質点が x の正の方向に進んでいるとき，つまり $\dot{x} > 0$ のときだね，このときには抵抗は x の負の向きに作用するからその力はマイナス符号が付くよね。抵抗の力を F とすると A の場合は $F = -k\dot{x}^2$ となって，B の場合は $F = -\mu\dot{x}$, これはいいよね。式で表すと

$$\dot{x} > 0 \quad \begin{cases} A & \ddot{x} = -k\dot{x}^2 - \omega^2 x \\ B & \ddot{x} = -\mu\dot{x} - \omega^2 x \end{cases}$$

次に，質点が x の負の方向に進んだ場合は $\dot{x} < 0$ だね。抵抗 F は x の正の方向に作用し，A の場合は $\dot{x}$ の 2 乗でこれは正だ。ということで $F = k\dot{x}^2$ となるけど，B の場合は $\dot{x}$ がすでに負だから $F = \mu\dot{x}$ だよね。式で書くと

$$\dot{x} < 0 \quad \begin{cases} A & \ddot{x} = k\dot{x}^2 - \omega^2 x \\ B & \ddot{x} = -\mu\dot{x} - \omega^2 x \end{cases}$$

で，B の場合の方程式は形の上では変わらない。このあたりの事情は変位に比例する復元力 $\omega^2 x$ についても同様で，質点が原点 $x = 0$ から正の方向（$x > 0$）に進んだときは復元力（f）は質点を原点に引き戻す力，つまり x の負の方向に働く力となるから $f = -\omega x$，一方，質点が原点からマイナスの方向に進んだときは復元力は x の正の方向に作用し，$x < 0$ なので $f = -\omega x$ となって，方程式の形は変わらない。いじょう,（パパイアをかぶりつきながら）そういう仕組みなんだ。

- ユナ：なるほど，なっとくしたわ。それにしてもこのコーヒー結構いけそうね。
- コニー：K さんのテイストもなかなかのものネ。
- K氏：うっッウ〜ん，いやいやそれほどでもないけど。。。あまり褒めるとすぐ調子にのるヨ〜。コーヒーのお替りいかがぁ〜？

… いろいろ雑談 …

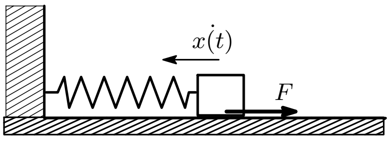
- コニー：そろそろお開きにして次に進みましょうか。
- K氏：ご馳走さま，おいしいおやつで大満足。さて，英気が戻ってきたところで次に進もうか。

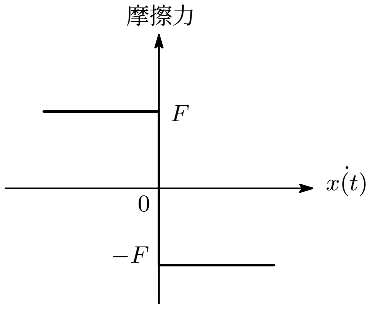
5.2 一定の摩擦力が作用する場合の振動

- K氏：次は速度の 2 乗に比例する空気抵抗に代わって一定の摩擦力が作用する場合の振動を調べてみよう。運動方程式は例によって $\dot{x}$ の正負で分けると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} > 0 \text{のとき：} \quad m\ddot{x} = -m\omega^2 x - F \\ &\dot{x} < 0 \text{のとき：} \quad m\ddot{x} = -m\omega^2 x + F \end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

Fig.8





この方程式は線形方程式だけど，摩擦力 F が介在するので振幅はだんだん減衰してくるんだね。そこで非線形振動という捉え方ができるというわけだね。上の式をまとめて書くと

$$\boxed{\ddot{x} + (x \pm r)\omega^2 = 0, \quad r = \frac{F}{m\omega^2} \quad (\text{複合符号は } \dot{x} > 0 : +,\ \dot{x} < 0 : -)} \tag{5.44}$$

と線形同次方程式の形に書けるね。ここで $X = x \pm r$ とおいてこの方程式を書き換えると，r は定数だから

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \tag{5.45}$$

となって，見慣れた奴がでてくる。この一般解はよくご存知のように C_1, C_2 を任意定数として

$$X = C_1 \sin\omega + C_2 \cos\omega t \tag{5.46}$$

と書けるね。ここで X からもとの x の戻して整理すると

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x} > 0 \text{ のとき} & x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t - r \\ \dot{x} < 0 \text{ のとき} & x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + r \end{array}\right\} \tag{5.47}$$

となって，この系の振動の様子は $\dot{x} = 0$ のところでこの 2 つの解を滑らかにつないだものとなるんだね。もう少し詳しく調べよう。初期条件を

$$t = 0 : x = a_0 \ (a_0 > 0),\ \dot{x} = 0 \tag{5.48}$$

とすると，つまりバネを $x = a_0$ まで伸ばして急に手を離したという状況だね。スタートは $\dot{x} < 0$ で，時間 $t = \pi/\omega$ 後に縮みきった点（$x = a_1$）に達するのでその間の解は

$$x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + r$$

で表される。係数は初期条件といまの条件より

$$\left.\begin{array}{llll} t = 0 & \dot{x} = 0 & : & C_1 = 0 \\ t = 0 & x = a_0 & : & C_2 = a_0 - r \\ t = \pi/\omega & x = a_1 & : & C_2 = -a_1 + r \end{array}\right\} \tag{5.49}$$

と得られるので**一般解**は

$$\boxed{x = (a_0 - r)\cos\omega t + r} \tag{5.50}$$

となる。また縮み点 $x = a_1$ は

$$\boxed{a_1 = -a + 2r = -a_0 + \tfrac{F}{m\omega^2}} \tag{5.51}$$

だね。次に反転してバネが伸び始めるわけだけど，このときの運動方程式の解は（5.47）の上段で

$$x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t - r \tag{5.52}$$

伸びきり点を $x = a_2$ とし，この方程式の初期条件を先ほどと同じように縮みきった時刻 $t = \pi/\omega$ を改めて $t = 0$ とすると（後で $t = t + \pi/\omega$ に戻す），この新しい時間スケールでは $t = \pi/\omega$ で伸びきり点 $x = a_2$ に達するから

$$\left.\begin{array}{llll} t = 0 & \dot{x} = 0 & : & C_1 = 0 \\ t = 0 & x = a_1 & : & C_2 = a_1 + r \\ t = \pi/\omega & x = a_2 & : & C_2 = -a_2 - r \end{array}\right\} \tag{5.53}$$

と得られる。これから a_2 は

$$a_2 = -a_1 - 2r = a_0 - 4r$$

が得られる。したがって変位は

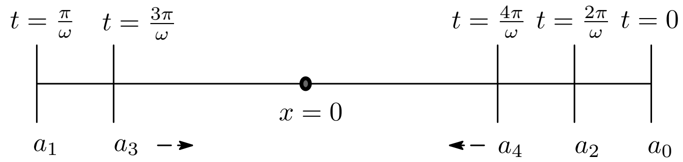
$$x = (a_1 + r)\cos\omega t = (-a_0 + 3r)\cos\omega t - r$$

で与えられるけど，t の原点をずらしているので初期からの経過時間 $t = t + \pi/\omega$ に戻すと**一般解**は

$$\boxed{x = (-a_0 + 3r)\cos\omega\left(t + \tfrac{\pi}{\omega}\right) = (a_0 - 3r)cos\omega t - r} \tag{5.54}$$

となる。以下，伸び縮みを繰り返していくわけだけど，コニー 解の状況を整理してくれる。

- コニー：えっ，整理ということは,,，時系列的に解がどのように表されるかをまとめるわけね。わかりました。（少し間おいて）え〜っと，機械的に整理していけばいいから。。。まとめるとこのようになるわね。



・$a_0 \to a_1$ ： $x_1=(a_0-r)\cos\omega t+r$ ， $a_1=-(a_0-2r)$

・$a_1 \to a_2$ ： $x_2=(a_1+r)\cos\omega t-r=(a_0-3r)\cos\omega t-r$ ， $a_2=a_0-4r$

・$a_2 \to a_3$ ： $x_3=(a_2-r)\cos\omega t+r=(a_0-5r)\cos\omega t+r$ ， $a_3=-(a_0-6r)$

・$a_3 \to a_4$ ： $x_4=(a_3+r)\cos\omega t-r=(a_0-7r)\cos\omega t-r$ ， $a_4=a_0-8r$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

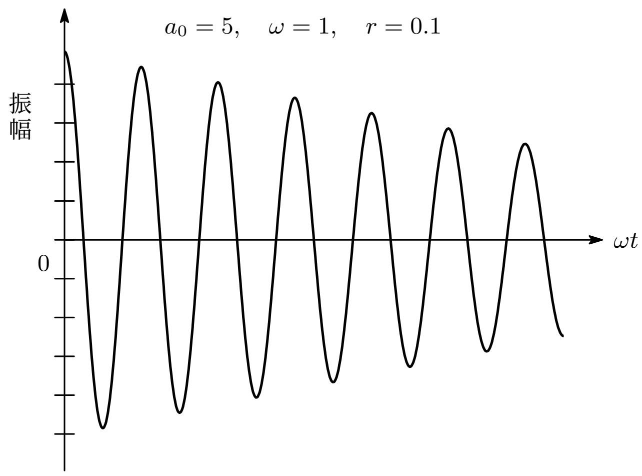
・$a_{n-1} \to a_n$ ： $x_n=(a_{n-1}+r)\cos\omega t-r=\{a_0-(2n-1)r\}\cos\omega t-r$ ， $a_n=(-1)^n(a_0-2nr)$

$\vdots$ $\vdots$ $\mid a_n \mid = a_0-2nr$

つまり，振幅は $t=\pi/\omega$（半周期）経過するたびに $2r=2F/m\omega^2$ だけ減少していくというわけね。

- K氏：そうだね，振幅が往復のたびに $2r$ 減少するというのは一定の摩擦力 F が働いているからだね。その減衰の状況をグラフで描くと Fig.9 のようになるね。

*Fig.*9



ところでこのように摩擦力の影響で振幅はだんだん小さくなっていき，しまいには質点の動きが止まるけど，この静止条件を ユナ 見つけてくれる。

- ユナ：はい，振幅が小さくなると復元力も小さくなり，復元力が摩擦力の大きさと同じになった時に質点に働く力はゼロとなる，それが静止条件ということね。その時の変位 x を x_n とすると運動方程式より

$$\ddot{x}=-\omega^2(x\pm\frac{F}{m\omega^2})=0$$

復元力と摩擦力のバランスだから，復元力の大きさが摩擦力の大きさ以下になると質点はそこで静止してしまうので

$$\mid m\omega^2 x_n \mid \leq \mid F \mid$$

となるわね。例えば簡単のために $a_0 = 5,\ m = 1,\ \omega = 1,\ F = 0.2$ として質点が停止するまで片道を 1 回として n 回振動したとすると，$t = n\pi/\omega$ とおいて

$$
\begin{aligned}
F &= m\omega^2 x_n = x_n \\
&= \{\, a_0 - (2n-1)r \,\} \cos n\pi + (-1)^{n+1} r \\
&= (\, 5.2 - 0.4n \,) \cos n\pi + (-1)^{n+1} \times 0.2 \\
&\begin{cases} n : \texttt{even} & n = 12.5\ \text{回} \\ n : \texttt{odd} & n = 12.5\ \text{回} \end{cases}
\end{aligned}
$$

となるから 12.5 回目で静止すると考えられるわ。

- K氏：うん，そうだね。この場合先ほど コニー が整理してくれた

$$
|\, a_n \,| = |\, a_0 - 2nr \,|
$$

という式を使ってもいけるよね。$a_n = 0$ とおくと $n = a_0/2r$ となるので $r = F = 0.2$ とおけば $n = 12.5$ がでてくるね。

- コニー：ちょっと気になるんだけど，いまは $t = n\pi/\omega$ の最大振幅のところで質点が静止すると仮定したわね。途中のところで止まることはあり得ないのかしら？

- K氏：うっ。。。(白板を睨みながら）そうだね。ただ，最大振幅点は運動の折り返し点で $\dot{x} = 0$ だね。その時，静止摩擦力が働くけど，これは動摩擦力より大きいので，こいつの力が効くからということでどうだろう。

- ユナ：K さんもいったように動摩擦力は静止摩擦力より小さいじゃない。質点が次第に復元力が小さくなって，動摩擦力に打ち勝ちながらもよろよろと動いくとするわね。そして最大振幅点に到達した時，最大静止摩擦力が働くのでそこで運動は止められてしまうと考えればいいんじゃない。

- コニー：そうね，そう考えられるんだけど，いまの場合摩擦力は ”一定 ”としているわね。質点が運動している場合と静止している場合で摩擦力が変わるとすると運動方程式も変わると思うけど。

- K氏：う〜っん,,,(唇をぐっとかみ締めながら）鋭い突っ込みだな。。。コニー が指摘した運動方程式も変わるという点だけど，ここに登場している摩擦力は動摩擦力なんだね。運動方程式は質点が ”動いている状態 ”を記述しているだけで，質点が止まっている時に最大静止摩擦力が働こうと運動方程式には関係ないということになるんだね。

- コニー：そうなんだ。。。わかってきたわ。ユナ のいう通りね。

- K氏：え〜っと，もう少し話を進めたかったんだけど，議論もホットになり，少し疲れてきたので今日はこのあたりでお開きということでどうだろう。

- コニー：大変お疲れ様でした。

- ユナ：今日は飛び込みで失礼したけど，面白いお話が聞けてよかったわ。次回も是非参加するわ。本当にお疲れ様でした。

- K氏：夕闇が濃くなってきたね。今日はなにか都合でもあるのかい？ よかったら近場の居酒屋でもどうだい。

- コニー：久しぶりにKさんに付き合いたいんだけど，今日は生憎都合が入っているのよ。また次回にお相伴するわ。

- ユナ：折角のKさんのお誘いだけど私もきょうはダメなのよ。

- K氏：みなさん，それぞれ忙しいんだね。いやいや結構なことだ。外は少し肌寒くなってきたようだけど風を引かないようにね。
- コニー・ユナ：ありがとう，それじゃこれで失礼します。また次回よろしくお願いします。
- K氏：ハイ，了解，気をつけてねぇ～。

(了)

またお会いできる機会を楽しみに,,,

GOOD LUCK！
SEE YOU AGAIN！

・2012 年 03 月 11 日：摂動計算の簡略版と 1 次，2 次摂動計算による最大／最小振幅の漸化式を追記。
・2012 年 03 月 08 日：誤植と摂動計算のミスを修正。Thank's 冷泉院さん。