

非線形振動（その3）

KENZOU

2008年10月13日

♣ 快晴な秋晴れのある日、コニーとユナはアリスを連れ立ち、朝靄のたつ早朝の宇治川の畔を楽しく談笑しながら、K氏宅へ向かっていた。

- コニー：おはようございま〜っす。
- K氏：おお！〜おはよう。なんとアリスもきたのかい。
- アリス：おはようございます。そうなの、面白いお話が聞けると聞いたので是非とも参加したくてきました。よろしくお願いま〜す。
- K氏：久しぶりだ、アリス、大歓迎するよ、3人寄れば文殊の知恵というから、さぞかし今日はホットな議論が楽しみだね。
- ユナ：おはようございます、Kさん。今日はすがすがしい朝ですね。宇治川の畔も朝靄がかかってなかなか風情を感じさせたわ。
- K氏：そうだね、早朝散歩をされている人も多いね。
（全員それぞれ思い思いのところに座ってから）さてと、本日の話は、**自励振動**（self-excited vibration）の話を中心に進めようと思うんだ。たとえば、乾燥した綺麗に洗ったお皿を指で擦ると「キュッキュッ」と音がするだろう、また、バイオリンは弓を一定方向に擦ると音がでるね。音がでるのは振動しているからで、これらの振動は自励振動の例なんだね。そこで一体何を言いたいのかということだけど、みんなも知っているように強制振動は”周期的”な外力を加えることで一定の振動が起こるよね。ところが例えばバイオリンの場合、弓を”一定の方向”に擦るだけで弦は振動するだろう。つまり、**周期的な外力でなく一方向の外力**で弦は振動するね。そして、弦で擦るのを止めれば音はでなくなる。これは自励振動の例でよく引き合いにだされる例だけど、そのような振動系を調べようというわけだ。それと非線形振動論の発展の端緒となったといわれる**ファン・デル・ポールの方程式**の話題を取り上げ、これを摂動法の「**多時間尺度法**」という方法で近似解を求めてみよう。この方法は1960年代以降に発達した方法で、弱非線形問題の解明に威力を発揮してきたといわれている。
- 全員：どんなお話が聞けるか楽しみだわ。
- K氏：OK、それではボチボチはじめようか。

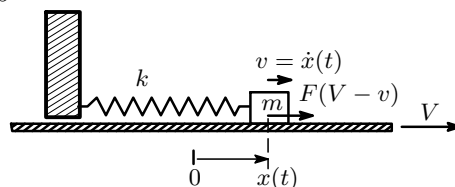
6 非線形振動（3話目）

6.1 自励振動

6.1.1 スティック・スリッパ

- K氏：粗い水平な板の上に Fig.9 のように質量 m の物体を置き、一方が壁の固定点とバネで結ばれているモデルを考えよう。

Fig.9



板を一定の速さ V で x 軸の正の方向に動かすと、物体と板との間の摩擦力により物体もある程度まで板とともに動くけど、バネの伸びによる復元力も大きくなり、摩擦力と復元力がバランスした位置で物体は静止するね。しかし、板は動いているので次の瞬間には復元力が摩擦力に打ち勝ち、物体は x 軸の負の方向に動き出す。この運動¹を調べようというわけだ。

先にこの運動のアウトラインを概観しておく、物体と板の固着 (Stick) とすべり (Slip) の反復によって振動が発生するんだが、それは最大静止摩擦力と動摩擦力の差に起因し、物体と板との相対速度が低い条件の場合にこの振動が発生するんだね。この動摩擦を**乾性摩擦**とも呼んだりするけど。

バネの復元力を $-kx$ ($k > 0$) とし、**運動摩擦力の大きさは板との相対速度 u によって変化する** と考え、それを $F(u)$ とおく²。次に運動方程式だが、物体の速度を \dot{x} とすると板に対する相対的速度 u は

$$u = V - \dot{x} \quad (6.1)$$

で与えられる。そして \dot{x} はあまり大きくならないと考えると、 V を十分大きくしておけば、物体の運動はそれ自体の運動の向き対しては常に左向きに滑ることになるね。だから摩擦力は常に右方向、つまり x 軸の正の方向に働くことになるので、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx + F(u) \quad (6.2)$$

となる。摩擦力 $F(u)$ は \dot{x} が V に対して十分小さいとすれば

$$F(u) = F(V - \dot{x}) \simeq F(V) - \dot{x} (dF/du)_{u=V} \quad (6.3)$$

とテイラー展開でき、これを (6.2) に入れると

$$m\ddot{x} = -kx + F(V) - (dF/du) \dot{x} \quad (6.4)$$

となるね。右辺第3項を無視すると、運動方程式はよく見慣れた単振動の方程式になる。つまり、第3項が自励振動を起こす要因ということになるんだ。もう少し詳しく見ると $dF/du < 0$ だから

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} > 0 \text{ のとき: } -\left(\frac{dF}{du}\right) \dot{x} > 0 \\ \dot{x} < 0 \text{ のとき: } -\left(\frac{dF}{du}\right) \dot{x} < 0 \end{array} \right\} \quad (6.5)$$

となり、第3項は速度の向きと同じ方向に働く、つまり、常に運動を助長するように働くことがわかる。これは通常の場合と逆の作用をするので**負性抵抗**とよんでいる。

さて、**自励振動の方程式** (6.4) を $m = 1$ とおいて見やすく整理してみよう。 $k = \sqrt{\omega}$ をバネ復元力の比例定数として、(6.4) は $x = X + F(V)/k$ とおいてやると

$$\ddot{X} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u=V} \dot{x} + kX = 0 \longrightarrow \ddot{x} - 2\beta \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\beta = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u=V}, \beta > 0\right) \quad (6.6)$$

と書ける。この解は減衰振動の解でお馴染みと思うけど

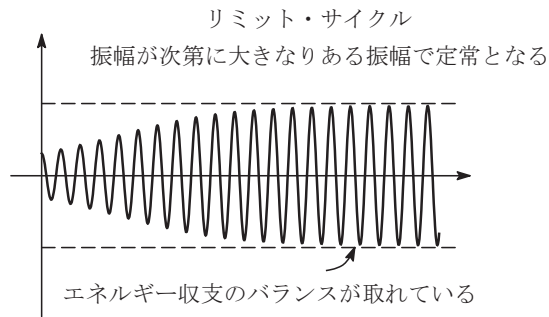
$$x(t) = Ae^{\beta t} \cos(\omega' t + \alpha), \quad \omega'^2 = \omega^2 - k^2 \quad (6.7)$$

となる。重要なポイントは指数関数の肩が正のパラメーターとなっており、振幅は時間の経過とともに大きくなる (増幅される)という点で、これが”自励”のネーミングの由来だね。ところでどんどん振幅が大きくなるかという、そういうわけにはいかない。振幅がある程度大きくなると物体の速度 \dot{x} が板の速度 V より大きくなり、摩擦力は(順当に?) 運動を阻止する方向に働くことになる。つまりアクセルからブレーキに変わるといわけだね。だから振動はそれ以上には成長しなくなり定常的になる。この状態を**リミット・サイクル**と呼んでいる。当然だけど、板の動きを止めると物体の振動も消滅していくね。

¹ Stick Slip 運動とも呼ばれる。

² 運動摩擦力は一般に運動の速度には関係ないとされているが、厳密には速度に対するわずかな依存性があり、速度が速くなれば運動摩擦力は小さくなると言われている。

Fig.10



- アリス：なるほど。。バイオリンの音が自励振動によるものだとは知らなかったわ。同じ弦楽器でもギターは弦を爪弾いて音をだすしね。
- コニー：そうねえ、私はお皿のキュッキュツという音が自励振動ということを知ってびっくりしたわ。
- ユナ：私たちの身の回りをその気になってみれば物理的にホットな話題がワンサカあるということね。
- K氏：そうだね、かのニュートンも

「もし私が価値ある発見をしたのであれば、それは才能ではなく
忍耐強く注意を払っていたことによるものだ。」

とっているしね。しかしまあ、僕等凡人にはなかなか難しいことだ。しかし、君等は大いに注意と忍耐力でがんばってもらわないといかんけど。。ちょっと口がすべったかな（笑い）。ついでにこんなことも言っているね。

「私が遠くを見ることができたのは巨人達の肩に乗っていたからです。」

まあ、謙虚というか、偉大な人物はやはり謙虚になるものなんですね。僕等も多くの先人達が苦勞して築いてきた学問の体系を今では効率よく勉強できる機会に恵まれているんだから、大いに活用しなくっちゃネ。。ちょっと説教臭くなってしまったが（笑い）。

- アリス：ところでもとのお話に戻るけど、物体の振動の振幅がだんだん大きくなっていくというのは物体の持つ力学的エネルギーが増えていくわけで、無から有は生じないというようにこのエネルギーはどこからくるはずね。
- ユナ：そうね、やはり Stick-Slip が原因で自励振動が起こるのだから、摩擦による仕事がどう関係してくるかということね。
- コニー：え〜っと、物体が x 軸の正の方向に動く場合、つまり右側ね、その時には摩擦力は負抵抗となって同じ方向に働く、しかも板との相対速度は小さくなるから摩擦力は大きいわね。つまり、摩擦力のした仕事は正の仕事で物体にエネルギーを貯めることになるわ。一方、物体が x 軸の負のほうに動く場合は摩擦力は反対方向に、しかも相対速度が大きいので摩擦力は小さい力となって負の仕事、つまり熱エネルギーとしてエネルギーを逸散させるのね。振動の振幅をいま A とし、それぞれの仕事を W_R, W_L とすると1周期で摩擦力のするトータルの仕事 W は

$$\begin{cases} \text{右移動} & W_R = F \cdot A \\ \text{左移動} & W_L = -F' \cdot A \end{cases} \implies F > F' : W = W_R + W_L = (F - F') \cdot d > 0$$

となって、結果的には正の仕事をするから、この分のエネルギーが物体に注入されると考えられないかしら。

- アリス：摩擦力といったらすぐ熱エネルギーになって逸散すると思っていたけど、負抵抗となる場合は逆にエネルギーを溜めることになるわね。動摩擦力が相対速度 u の大きさに依存するというのもポイントね！

- ユナ：そうか、動摩擦係数の相対速度依存性が効くのね。もっともこれが Stick-Slip 運動の源ということだものね。
- K氏：う～ん、なかなか活発な議論、やはり3人寄ればホットになるね。ここの説明はコニーの説明でいいと思うよ。あと、この振動を説明するのに静止摩擦係数の接触時間依存性を考慮したモデルなどがあるらしいけど、僕は殆ど詳しいことは知らないのここで説明することはできないけど、なにかの機会にでも目に留まったら調べてみるのもいいね。
- アリス：ところで、Stick Slip の方程式の解を減衰振動の解から類推したのはいいのだけど、減衰振動の場合は3つの解があったと思うの。整理して書くと次のようね。

$$\dot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \begin{cases} (1) k^2 - \omega^2 < 0 & \text{減衰振動: } x(t) = Ae^{-kt}(\omega t + \alpha) \\ (2) k^2 - \omega^2 > 0 & \text{過減衰: } x(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} \\ (3) k^2 - \omega^2 = 0 & \text{臨界減衰: } x(t) = e^{-kt}(C_1 t + C_2) \end{cases} \quad (6.8)$$

ただし、 $\lambda_1 = k - \sqrt{k^2 - \omega^2}$, $\lambda_2 = k + \sqrt{k^2 - \omega^2}$

いまの場合は(1)の解に相当しているわけで、(2)と(3)の解はないのかしら。

- ユナ：Stick-Slip の運動方程式で上の k に相当するものは $-\beta$ ($\beta > 0$) で $\beta = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u}$ だったわね。そして $\omega = \sqrt{k}$ ね。とすると β^2 と ω^2 の比較になるわけだけど、バネの復元力が摩擦力より大きくないと振動しないことになるでしょう。だから(2)と(3)のケースは考えなくていいと思うの。
- アリス：そういうことね。
- K氏：さて、自励振動の方程式は今述べたものだけかとなるとそうではないんだね。いろいろ複雑な形の方程式があるらしい。有名なものに van der Pol の方程式というのがあるんだ。これはドイツの電気技師で物理学者である Balthasar van der Pol によって1927年に見いだされたんだね。彼は3極真空管（←懐かしいねえ）の発振の研究をしている時、ある特定の周波数の時に必ず不規則なノイズが載ることを見いだした。この研究はその後の非線形振動論発展の端緒となったといわれているね。先ほどのニュートンじゃないけど、見過ごしてしまいそうな点に注目するというのはやはり偉いもんだね。

6.1.2 ファン・デル・ポールの方程式

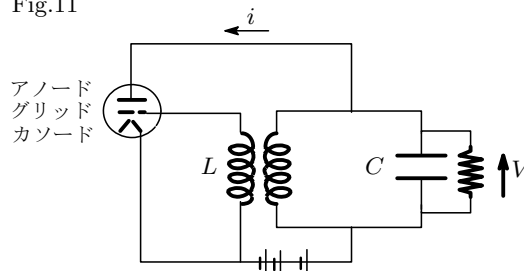
- K氏：天下りのけど、次の非線形2階微分方程式をファン・デル・ポールの方程式という。

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (6.9)$$

3極真空管の発振回路を例にとってファン・デル・ポールの方程式を導出しよう。3極真空管の発振回路を Fig.11 に示す。C はコンデンサーの容量で L はコイルのインダクタンスだね。陽極電流を i とすると i は次の方程式で表される。ここで α, γ は定数だけど、ここではその内容に立ち入らない（←詳しいことは忘れた：笑い）。詳しくは適当な電気回路のテキストを参照して頂戴。

$$i \simeq -\alpha V + \gamma V^3, \quad -i = \frac{V}{R} + C\dot{V} + \frac{1}{L} \int V dt \quad (6.10)$$

Fig.11



(6.10) を整理すると

$$\dot{V} = \left(\frac{\alpha}{C} - \frac{1}{RC} \right) V - \frac{\gamma}{C} V^3 - \frac{1}{LC} \int V dt$$

を得る。これを t で微分すると

$$\ddot{V} - \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\alpha}{C} - \frac{1}{RC} \right) V - \frac{\gamma}{C} V^3 \right\} + \frac{1}{LC} V = 0 \quad (6.11)$$

となる。ここで次の変数変換をおこない、

$$V \rightarrow \sqrt{\frac{C}{3\gamma} \left(\frac{\alpha}{C} - \frac{1}{RC} \right)} V, \quad t \rightarrow \sqrt{LC} t$$

さらに

$$\epsilon = \sqrt{LC} \left(\frac{\alpha}{C} - \frac{1}{RC} \right) V$$

とおくと

$$\ddot{V} \rightarrow \frac{1}{LC} \sqrt{\frac{C}{3\gamma} \left(\frac{\alpha}{C} - \frac{1}{RC} \right)} \ddot{V}, \quad \dot{V} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{C}{3\gamma} \left(\frac{\alpha}{C} - \frac{1}{RC} \right)} \dot{V}$$

となるので (6.11) は

$$\ddot{V} + \epsilon(V^2 - 1)\dot{V} + V = 0 \quad (6.12)$$

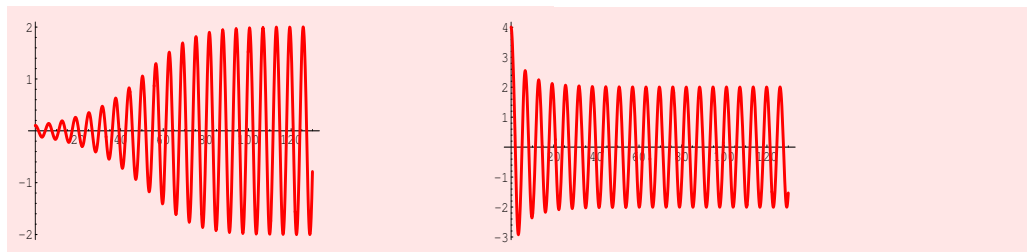
となり、これはファン・デル・ポールの方程式だ。

先刻承知のことと思うけど、 ϵ の符号で 3 つのケースに分かれるよね。無論ここでは (1) のケースを問題にしている。

$$\left. \begin{array}{l} (1) \epsilon > 0 \quad \text{リミットサイクル} \\ (2) \epsilon = 0 \quad \text{単振動 (調和振動)} \\ (3) \epsilon < 0 \quad \text{減衰振動} \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

この方程式の近似解を摂動法で求めていくんだけど、その前に解の振る舞いについて $\epsilon = 0.1$ とし、初期値として $x(0) = 0.1, \dot{x}(0) = 0$ の場合 (左図) と $x(0) = 4, \dot{x}(0) = 0$ の場合 (右図) の 2 つのケースの数値解を載せておくよ。これは Mathematica で計算した結果なんだ。

```
sol=NDSolve[{x''[t]+0.1 x'[t] (x[t]^2-1)+x[t]==0,x[0]==0.1,x'[0]==0},
x[t],{t,0,130}]; Plot[x[t] /.sol,{t,0,130},PlotStyle->Thickness[0.01]]
```



この図を見るとリミットサイクルの振幅は "2" となっている。そしてこの状態ではエネルギーの収支バランスが取れているんだね。先ほど コニー が摩擦力による仕事の議論をしたけど、いまの場合に当てはめるとどうなるか考えてみよう。摩擦力は $f_M = -\epsilon(x^2 - 1)\dot{x}$ だね。ここで $x^2 - 1$ に注目して欲しいんだけど $x < 1$ では (6.5) と同じような関係になることがわかる。

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} > 0 \text{ のとき: } -\epsilon(x^2 - 1)\dot{x} > 0 \\ \dot{x} < 0 \text{ のとき: } -\epsilon(x^2 - 1)\dot{x} < 0 \end{array} \right\} \quad (6.14)$$

つまり、初期振幅 $|x| \simeq 0$ からスタートした場合、振幅の小さいうちは上で議論したように **負抵抗の摩擦力** によりどんどんエネルギーを吸収し、振幅が増幅されていくことになるよね。ちょっとこれを計算する

と、質点が dx だけ変位する間に摩擦力のなす仕事は $-\epsilon(1-x^2)\dot{x}dx$ となるだろう。したがって 1 周期あたりの仕事の平均 \overline{W} は $dx = \dot{x}dt$ となるから

$$\overline{W} = -\frac{\epsilon}{T} \int_0^T (1-x^2)\dot{x}^2 dt \quad (6.15)$$

と表される。ところでリミットサイクルに到達するとエネルギーの収支バランスがとれ、いい換えると摩擦力の影響はなくなると考えられる。つまりその項がゼロとなって 単振動状態となる わけだね。ここでは $x(t) = a \cos(t + \phi)$ ($a > 0$) とおけ、周期 $T = 2\pi$ であるから、これを上の式に入れて $\overline{W} = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} \overline{W} &= -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{1 - A^2 \cos^2(t + \phi)\} \sin^2(t + \phi) dt \\ &= -\frac{\epsilon}{2\pi} \left[-\frac{1}{8}a^2 t - \frac{a^2}{32}(\sin 4(t + \phi) + \frac{\phi + t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(t + \phi)) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\epsilon}{8}(a^2 - 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

つまり、エネルギー収支の計算からリミットサイクルでは振幅が "2" となることがでてくるね。

- (全員) : なるほど～、よくわかったわ。
- アリス : 痒いところに手が届いたっていう感じね (笑い)。ところで、初期振幅が大きい場合は減衰してからリミットサイクルに入るわけね。その場合も上の考察と同様に考えればいいか。。あとでチェックしてみよう。
- K氏 : そろそろ腹が空いてきたなあ～、どうだい、次のステップにいく前に昼飯でも食いにいかないかい？
- コニー : 夢中になっていたからわからなかったけど、いわれてみればおなか空いたわね。
- アリス : 私も空いたわ～、きょうは頭の巡りのことを考えて朝ご飯を少し控えめにしてきたの。そろそろね。
- ユナ : ちょうどお話も一区切りついたので、気分転換をかねていきましょう !!。私も先ほどからグググ～なのよ。

昼食休憩

■ ファン・デル・ポール方程式の近似解

- K氏 : さて、いよいよファン・デル・ポール方程式の近似解を求める番だけど、ここでは ϵ が非常に小さい場合を摂動法で求めていく。「多時間尺度法」とか「多重尺度法」と呼ばれる方法³で求めてみよう。振幅が小さい場合は、摩擦項の x^2 は 1 に比べて無視できるので解は先ほどアリスがまとめてくれた (6.8) から

$$x(t) \simeq ae^{\frac{1}{2}\epsilon t} \cos(t + \phi) \quad (6.16)$$

と書けるね。 $\epsilon \ll 1$ なので $e^{\frac{1}{2}\epsilon t} \sim 1 + \frac{1}{2}\epsilon t$ 、だから 1 周期 $T = 2\pi$ の間は振幅は殆ど変わらない。つまり時間尺度 T では振幅は一定とみなせることだね。しかし、実際は振幅は増幅されていくわけだ。つまり、非常に短い時間では振幅の変化は殆どないが、長い時間では振幅は大きく変化する。つまり 2 つの時間ス

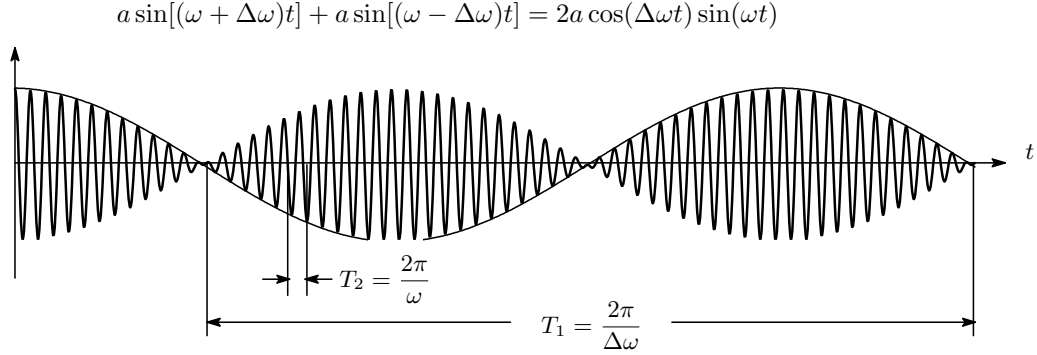
³ <http://physics.gep.kansai-u.ac.jp/~physics/jugyo/kuriyama/mathphys-1/chap-00.pdf>, <http://www2.denshi.numazu-ct.ac.jp/funada/ht96-1/subject/applmath.html> 参照

ケールがあるというわけだね。この点をもう少し具体的にイメージするために、”うなり”の現象を考えてみよう。一定の振幅 a を持つ、角振動数がわずかに異なる 2 つの振動 を重ね合わせると

$$a \sin[(\omega + \Delta\omega)t] + a \sin[(\omega - \Delta\omega)t] = 2a \cos(\Delta\omega t) \sin(\omega t) \quad (6.17)$$

となって、重ね合わせた振動は Fig.12 のように周期 $T_1 = 2\pi/\Delta\omega$ と非常にゆっくりした時間スケールのものと $T_2 = 2\pi/\omega$ の非常に短いものの時間スケールの振動で表されるね。

Fig.12



角振動数の差 $\Delta\omega$ は近似的に $\Delta\omega \sim \epsilon\omega$ とおけるので

$$\Delta\omega t \sim \omega \cdot \epsilon t$$

と書ける。ここで時間のスケールを、 ϵt を改めて $t_1 \equiv \epsilon t$ としてやり、 ωt の時間スケール ($t_0 \equiv t$) と分離して扱う (t_0 と t_1 は独立変数とみなす) ことにするんだ。そうすると (6.17) は

$$2a \cos(\Delta\omega t) \sin(\omega t) \doteq A(t_1) \sin(\omega t_0) \quad (6.18)$$

と表すことができる。したがって、2つの時間スケールの現象を記述する独立変数 t の常微分方程式は、独立変数 t_0, t_1 の偏微分方程式に変換される。これが**多時間尺度法**という名前の由来だね。

話を元に戻して、多時間尺度変換は次のように定義される。

$t_0 \equiv t, t_1 \equiv \epsilon t, t_2 \equiv \epsilon^2 t, t_3 \equiv \epsilon^3 t, \dots, \Rightarrow t_n \equiv \epsilon^n t \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

(6.19)

したがって、時間微分の演算子を多時間尺度で展開すると

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots = \sum_{n=0} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}$

(6.20)

となる。微分演算子を多時間尺度で展開するので、この手法を微分展開法 (Method of derivative expansion) とか呼んでいる。また、 $x(t)$ を ϵ でベキ展開して

$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots$

(6.21)

とおく。 $x(t_0, t_1, t_2, \dots), x_i(t_0, t_1, t_2, \dots)$ は独立変数 (t_0, t_1, t_2, \dots) の関数であるのでこの時間微分は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_0 &= \frac{\partial x_0}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial x_0}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial x_0}{\partial t_2} + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} x_0 &= \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2} + \dots \\ \frac{d}{dt} x_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} x_1 &= \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0 \partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

となる。(6.21) を (6.9) に入れ、 ϵ の 1 次の項までとると

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0^2} + x_0 + \epsilon \left\{ \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + x_1 + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} - (1 - x_0)^2 \frac{\partial x_0}{\partial t_0} \right\} = 0$$

これから

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0^2} + x_0 = 0 \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} + (1 - x_0)^2 \frac{\partial x_0}{\partial t_0} \quad (6.24)$$

を得る。そして x_0 は、 t_0, t_1 の関数であるから、(6.23) より **0 次の近似解**

$$\boxed{x_0(t_0, t_1) = a(t_1) \cos(t_0 + \phi(t_1))} \quad (6.25)$$

を得る⁴。

$$\left. \begin{aligned} 1 - x_0^2 &= 1 - a(t_1)^2 \cos^2(t_0 + \phi(t_1)) \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_0} &= -a(t_1) \sin(t_0 + \phi(t_1)) \\ \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} &= -\frac{\partial a(t_1)}{\partial t_1} \sin(t_0 + \phi(t_1)) - a(t_1) \cos(t_0 + \phi(t_1)) \frac{\partial \phi(t_1)}{\partial t_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

であるので、(6.25) を (6.24) に入れて整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + x_1 &= 2 \frac{\partial a}{\partial t_1} \sin(t_0 + \phi) - a \cos(t_0 + \phi) \frac{\partial \phi}{\partial t_1} - a(1 - a^2) \cos^2(t_0 + \phi) \sin(t_0 + \phi) \\ &= \left\{ 2 \frac{\partial a}{\partial t_1} - a \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) \right\} \sin(t_0 + \phi) + 2a \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \cos(t_0 + \phi) + \frac{1}{4} a^3 \sin 3(t_0 + \phi) \end{aligned} \quad (6.27)$$

が得られるね。ここで例の 擬似共鳴項 となる $\sin(t_0 + \phi)$ と $\cos(t_0 + \phi)$ の項を消去しなければならないので、その条件として

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial a}{\partial t_1} &= a \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t_1} &= 0 \longrightarrow \phi = \phi_0 (= \text{一定}) \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

が得られる。この非線形微分方程式はいわゆる **ベルヌイ型** といわれるもので、その解法はどんな微分方程式のテキストに必ず載っている⁵。ついでだからその解法を紹介しておくとして $u = a^2$ と変数変換すると

$$\frac{\partial a}{\partial t_1} - \frac{1}{2} a = -\frac{1}{8} a^3 \longrightarrow u' + \frac{1}{2} u = \frac{1}{8}$$

と線形微分方程式になる。これは公式

$$y' + P(x)y = Q(x) \rightarrow y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right), \quad C: \text{積分定数}$$

よりすぐ解けて

$$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{1}{4} + C e^{-\frac{1}{2} t_1}} \quad (6.29)$$

を得る。 $t_1 = 0$ での初期値を $a = a_0$ として (6.29) を整理すると

$$\boxed{a = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-t_1}}}, \quad (a \geq 0)} \quad (6.30)$$

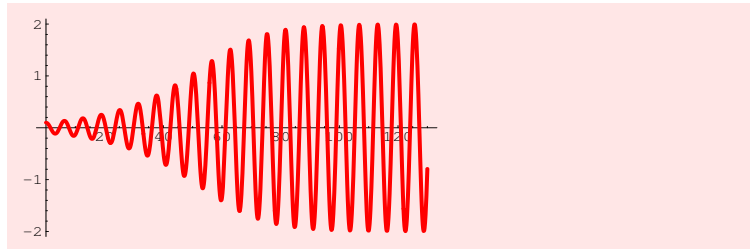
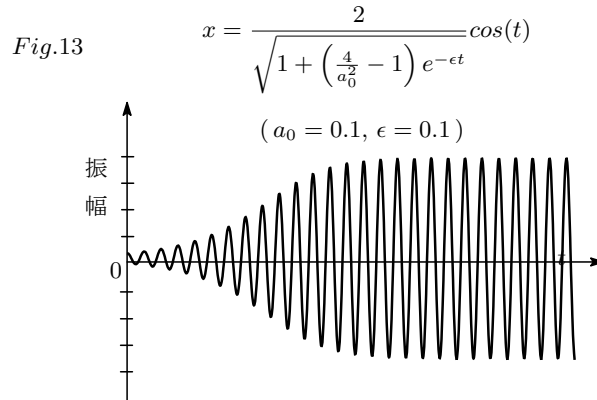
⁴ $x_0 = x_0(t_0, t_1, t_2, \dots)$ であるが ϵ の 2 次以上の項を無視したので $x_0 = x_0(t_0, t_1)$ となる。

⁵ <http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/d-eq/bibun0.htm>, 小寺平治「なっとくする微分方程式」等。

が得られるね。 $t_1 \rightarrow \infty$ とすると振幅 $a = 2$ となっており、これはリミットサイクルでの振幅だね。
 $t_0 = t_1$, $t_1 = \epsilon t$ なので (6.25) は

$$x = a(t_1)\cos(t_0 + \phi(t_1)) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}}} \cos(t + \phi_0) \quad (6.31)$$

となる。この0次の近似解をグラフ化したものが Fig.13 だ。0次近似の解でも Mathematica で計算した数値解との差は殆どないことがわかる。



1次の近似解 x_1 は (6.27) より

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + x_1 = \frac{1}{4} a^3 \sin 3(t_0 + \phi) \quad (6.32)$$

を解いて得られる。面倒なので解だけ載せておきます (汗;;)。

$$x_1 = -\frac{a^3}{16} \{\cos 3(t + \phi_0) - \cos(t + 3\phi_0)\} + \frac{a^3}{32} \{\cos 3(t - \phi_0) - \cos(t - 3\phi_0)\} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= x_0 + \epsilon x_1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + (4/a_0^2 - 1)e^{-\epsilon t}}} \cos(t + \phi_0) \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2(1 + (4/a_0^2 - 1)e^{-\epsilon t})^{3/2}} \{\cos 3(t + \phi_0) - \cos(t + 3\phi_0)\} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{4(1 + (4/a_0^2 - 1)e^{-\epsilon t})^{3/2}} \{\cos 3(t - \phi_0) - \cos(t - 3\phi_0)\} \end{aligned} \quad (6.34)$$

- ユナ：多時間尺度法というのは、長いスパンというかゆっくりしたスケールでの変化を記述するために時間を多重尺度に変換し、近似の精度はそのスパンをより長くして ($t_n = \epsilon^n t$) 変化をより大局的に掴もうとすることに相当するのね。
- K氏：そうだね。解の振幅や位相の変化は先ほどの”うなり”の例に見たように振動の周期スケールに比べて非常にゆっくりしているよね。このため一定値に見えてしまうのだが、実際の厳密解では振幅が指数関数的に増加(減少)したりしているわけだね。そこで振動を表すための時間スケール t の他に、振幅や

位相の変化を表すための大きい時間スケールを用意して振幅や位相に時間変化の自由度を与えようというのが多時間尺度法の基本的な考えなんだ。ちょうど (6.18) で $A(t_1)\sin(\omega t_0)$ として時間 t_1 と t_0 を導入しただろう、あの感覚だね。

- アリス：いわれてみたらなるほどと思うんだけど、コニーから借りた第1回、第2回のノートを読むといわゆる通常の摂動展開で議論されていたわね。この多時間尺度法というを今までの非線形振動系に適用して同じ答えが得られるのかしら？
- コニー：そうね、私もその辺に興味があるわ。
- K氏：おっしゃることはよく理解できます。そこでだ、今回は**摂動論の話題**を取り上げてそのあたりをチェックしようと思う。まあ、今回の話の総集編みたいなものだね。それで一応「非線形振動」のお話を終えたいと思うんだ。摂動計算はここでとりあげた多時間尺度法以外に平均化法とかなんとか法とかいろいろあるようだね。このサイトにはいろいろな例が載っているから興味があれば一度覗いてみたらどうかな。(補助教材 1996 年度・工学数理)
<http://www2.denshi.numazu-ct.ac.jp/funada/ht96-1/subject/subject.html>
- コニー：ところで、非線形波動の話題はどうなるのかしら？
- K氏：アイタ！鋭く突いてくるね（笑い）。まっ、少し準備期間をおいてからということはどうだい。
- コニー：わかりました。その際はよろしくお願いします。
- K氏：え〜っと、今日はこのあたりで終わろうと思っていたんだけど、まだ夕刻まで少し時間があるようだから最後に少し話題を変えて、おまけとして「単振動の合成とフーリエ級数」の話と「相平面」の話について少し触れておこう。
- ユナ：振動のお話ではフーリエ級数は大事ね。**相平面**というのは位置と速度の組 (x, \dot{x}) を座標軸とする平面ね。
- アリス：統計力学で位置と運動量を座標軸とする**位相空間**というのを習ったけど、物体が運動する時、この運動は位相空間の曲線（トラジェクトリ）として表される。相平面の場合は振動運動は相平面上の曲線で表されるということね。波の姿を追っていくよりコンパクトに運動の様子がわかるわね。
- コニー：ちょっと Coffee Break でもして一息ついてからではどうかしら。
- 全員：さんせ〜い！

COFFEE BREAK

●おまけーその1：多くの単振動の合成とフーリエ級数

- K氏：うなりのところで一定の振幅を持つ角振動数がわずかに異なる2つの単振動を合成したね。多くの単振動を合成していくといろいろな運動が得られるわけだけど、逆に与えられた運動は多くの単振動に分解できることをみてみよう。

いま、区間 $t = -\pi$ から $t = \pi$ の間で運動を表す関数 $f(t)$ が与えられているとする。これとは別に、 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ の $2n + 1$ 個の任意定数を使って

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + a_n \cos nt \\ & + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots + b_n \sin nt \end{aligned} \quad (6.35)$$

という関数を考える。 $t = -\pi$ から $t = \pi$ の区間を $t = t_1, t_2, \dots, t_{2n+1}$ の $2n + 1$ 個の時間間隔で区切り、それぞれの点で

$$\left. \begin{aligned} f(t_1) &= \varphi(t_1) \\ f(t_2) &= \varphi(t_2) \\ &\dots \\ f(t_{2n+1}) &= \varphi(t_{2n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

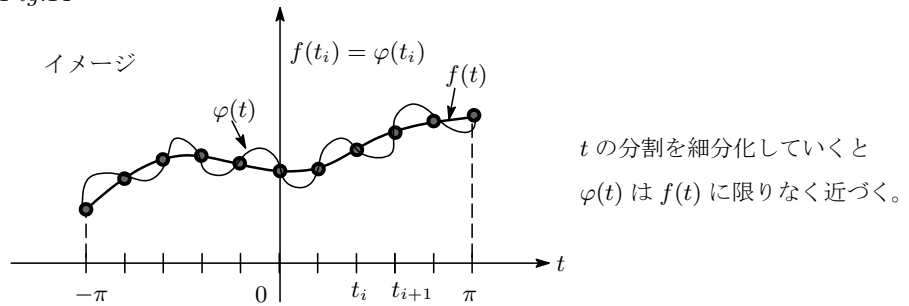
が成り立つように係数 $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ を決めることができれば、関数 $\varphi(t)$ は運動 $f(t)$ の近似関数となる。ここで n を大きくすればするほど多くの点で $f(t)$ と一致させることができるので、 n を無限大にした極限では結局区間 $[-\pi, \pi]$ で $f(t)$ は $\varphi(t)$ 、つまり三角関数の無限級数で表すことができる。そこでこのような係数を決めることができるのが次の課題となる。尚、級数の収束性等、数学的に厳密な議論は一切しないから、その点が気になるようなら適当なテキストをみつけてご自分でチェックしてね。。

いま、仮に $f(t)$ と $\varphi(t)$ とを一致できたとすると

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + a_n \cos nt + \dots \\ &\quad + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots + b_n \sin nt + \dots \end{aligned} \quad (6.37)$$

と書ける。

Fig.14



この式の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dt + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt + a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2t dt + \dots + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt + \dots \\ &\quad + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt + b_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t dt + \dots + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt + \dots \end{aligned}$$

となる。ここで三角関数の積分公式

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt dt &= 0 & (m, n : \text{任意の整数}) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt dt &= 0 & (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt dt &= \pi, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cos nt dt &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6.38)$$

を利用すると、(6.38) の右辺は第 1 項だけが残る、これから

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad (6.39)$$

が得られる。次に (6.37) の両辺に $\cos nt$ を掛け、 $t = -\pi$ から π まで積分すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt dt = a_n \pi \quad (6.40)$$

となって

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad (6.41)$$

を得る。全く同様にして (6.37) の両辺に $\sin nt$ を掛け、 $t = -\pi$ から π まで積分すると

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad (6.42)$$

が得られる。以上のことを整理すると、積分の時間変数を t' と書き換えて

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') dt' + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cos t' dt' \right) \cos t + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cos 2t' dt' \right) \cos 2t + \dots \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t') \sin t' dt' \right) \sin t + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t') \sin 2t' dt' \right) \sin 2t + \dots \end{aligned} \quad (6.43)$$

が得られるね。これで $f(t)$ を目出度く三角関数の無限級数で表すことができた (バンザーイ!!)。この級数を **フーリエ級数** と呼んでいる (ことはよく知っていることと思うけど)。つまり、運動を表す $f(t)$ は振幅、周期の異なる無数の単振動に分解することができたということだね。

(6.43) をみやすく整理すると

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (6.44)$$

と書ける。ここで、上式を単振動と関連付けると、 n は基本となる角振動数だね。これは基本周期 T_0 、基本周波数 f_0 とすると、 $n = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ の関係で結ばれている。また、 a_n 、 b_n という係数は、それぞれ $f(t)$ に含まれる \cos 成分と \sin 成分の大きさを表しており、 $f(t)$ が定まればこれらの値は一義的に確定するんだね。

フーリエ展開は $f(t)$ が偶関数か奇関数のいずれかであればそれぞれコサイン展開、サイン展開で表せる。

$$\begin{cases} f(t) : \text{偶関数} \dots & f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt & \text{フーリエ・コサイン展開} \\ f(t) : \text{奇関数} \dots & f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt & \text{フーリエ・サイン展開} \end{cases} \quad (6.45)$$

また、フーリエ級数は指数関数で表すことができる。オイラーの公式

$$e^{\pm in\theta} = \cos n\theta \pm i \sin n\theta \longrightarrow \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}, \quad \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

を使って、

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{ (a_n - ib_n) e^{int} + (a_n + ib_n) e^{-int} \} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = (a_n - ib_n)/2 \\ c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.46)$$

とかくことができる。上式の両辺に $e^{-in't}$ をかけて $-\pi$ から π で積分すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-in't} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n e^{i(n-n')t} dt = c_n \delta(n - n') = 2\pi c_n'$$

これから係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (6.47)$$

で表されることがわかる。

●おまけーその2 : 相平面

- K氏: 単振動の方程式をとりあげよう。これは $\ddot{x} = -\omega^2 x$ で表された。これを次の連立方程式に見立てると

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x \end{cases} \quad (6.48)$$

この連立微分方程式の一般解は

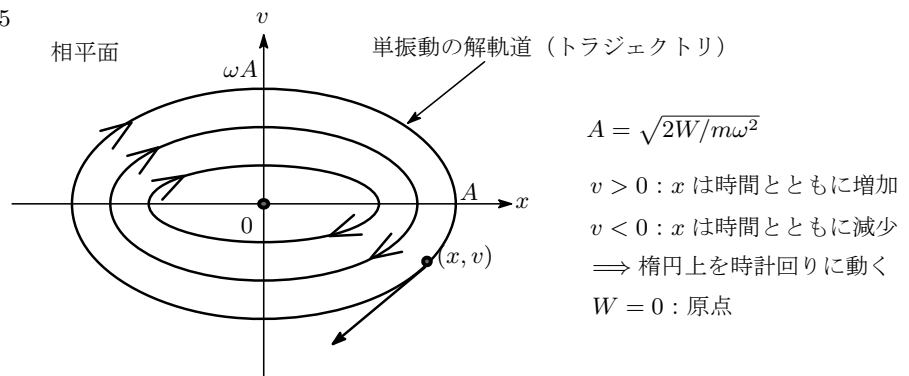
$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \phi) \\ v = A\omega \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (6.49)$$

これから t を消去すると

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1 \quad (6.50)$$

となって A の値によりいろいろな楕円を描く。これが解軌道 (トラジェクトリ) といわれるものなんだね。

Fig.15



ところで、ちょっとわき道にそれるけど、第1回目の話の §1.2 「エネルギー保存則」を思い出して欲しいんだ。全エネルギー W と振幅 A は $A = \sqrt{2W/m\omega^2}$ の関係があったね。上の楕円の面積は

$$\pi A \cdot A\omega = \frac{2\pi W}{\omega} = \frac{W}{\nu}, \quad (\nu = 2\pi/\omega)$$

となる。ここで運動量を振動の1周期について座標で積分してみると

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \longrightarrow dx = -A\omega \sin(\omega t + \alpha) dt$$

$$J = \oint p dx = mA^2\omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{W}{\nu}$$

となる。この量 J を作用積分と呼んで、古典論から量子論への移行で重要な物理量だったね。

余談はこれくらいにして、この相平面を眺めると、点 (x, v) はどこで、どんな速度で運動しているかが一目瞭然にわかる。この相平面上の運動方程式をとくに

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\omega^2 x \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

とベクトル成分で表し、位置と速度の時間的変化を示そうというわけだ。この考え方を n 次元空間に拡張して、次の連立方程式を考えよう。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

もっと簡潔にベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{b}$ を使って

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b} \quad (6.53)$$

この微分方程式の解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ は, t をパラメータとして n 次元空間内に一つの曲線を描く。この曲線を微分方程式の解軌道, この空間を相空間と呼ぶことは先ほどいった通りだね。そして関数 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ が t に依存しない関数のとき, 自励系とか自律系といい, 外力が加えられたときのように t を含んでいる時を強制系と呼んでいる。ここで重要な概念を整理しておく

(1) 周期解: $\mathbf{x}(t)$ が

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) \quad (T > 0)$$

を満たすとき $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ を周期解という。

(2) 閉軌道: 周期解の描く軌道を閉軌道またはサイクルという。

(3) 平衡点: 自励系において

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (6.54)$$

において,

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (6.55)$$

を満たす点 \mathbf{a} を微分方程式 (6.55) の平衡点という。これは時間が経過しても位置が変わらない点という意味で, 1 点 \mathbf{a} だけで解軌道になっている。

さて, 長さ l の振り子の棒が自由に回転する単振子の運動方程式は, 振れ角を θ とすると

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta = -\omega^2 \sin \theta, \quad (\omega^2 = g/l) \quad (6.56)$$

だね。いま, 回転角速度を $\Omega (= \dot{\theta})$ とすると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \\ -\omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

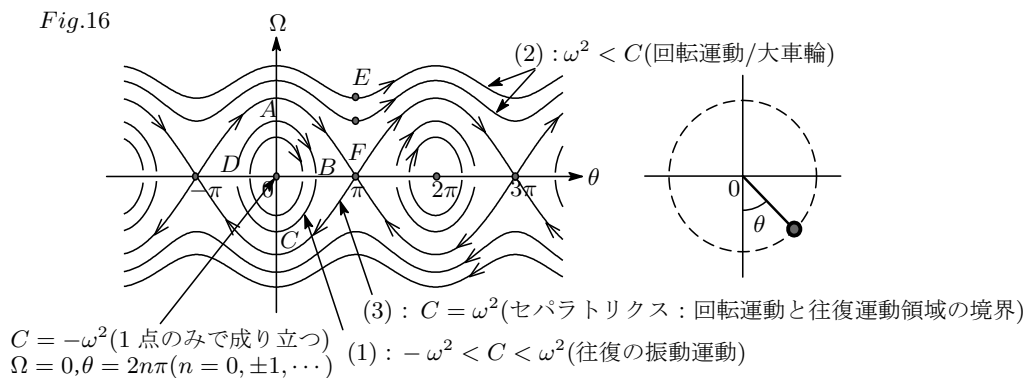
と表せる。これから解軌道は

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = \Omega \\ \frac{d\Omega}{dt} = -\omega^2 \sin \theta \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d\Omega}{d\theta} = -\frac{\omega^2 \sin \theta}{\Omega} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\Omega^2 - \omega^2 \cos \theta = C} \quad (C: \text{任意定数}/C = W - \omega^2) \quad (6.58)$$

と得られる。また, 平衡点は

$$\begin{bmatrix} \Omega \\ -\omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

より $(n\pi, 0)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) であることがわかる。解軌道を相平面上に描くと Fig.16 のようになるね。点 F は平衡点だ。振り子の解軌道は時間の経過とともにこの曲線上を時計回りに描かれる。質点の運動は $-\pi < \theta < \pi$ の範囲で往復運動する。



初速度の大きさでこの運動を整理すると

- (1) 初速度が小さいとき：往復運動する。点 B 、点 D が振り子の最大振れ点に対応し、そこで速度は一瞬ゼロになる。点 C は振り子が通過する支点直下の点に対応するね。
- (2) 初速度が大きいつき：振り子は最高点（支点直上）に達しても速度はゼロ（点 E ）にならず、鉄棒の大車輪のように回転運動を続ける。
- (3) 初速度がその中間のとき：最高点を目指して振動するが次第に速度を落とし有限時間内には最高点（支点直上）に達しない。

おまけ・その2の話は自由振動の「相平面上での安定解析」という分野の話になるのでこれ以上深入りするのはやめておくけど、興味があれば各自フォローしてください。きょうはここまでにしておこう。

- アリス：ちょっとその前に質問いいかしら？
- K氏：どうぞ、いいよ。
- アリス：(3)の初速度が中間のとき、**有限時間内**に最高点に達しないということだけど、もう少し説明していただけるかしら。
- K氏：そうだね。セパトリティクスのところだね。(6.58)の式を書くと

$$\frac{1}{2}\Omega^2 - \omega^2 \cos \theta = W - \omega^2 \rightarrow \dot{\theta}^2 = 4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow \dot{\theta} = 2\omega \cos \frac{\theta}{2} \quad (+\text{のケースを考える})$$

となるだろう。これを0から θ の範囲で積分すると

$$2\omega t = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\cos(\theta'/2)} = \ln \frac{1 + \sin(\theta/2)}{1 - \sin(\theta/2)}, \quad \therefore \sin(\theta/2) = \tanh \omega t$$

となって、ここで $t \rightarrow \pm\infty$ で $\theta \rightarrow \pm\pi$ となる。ということで、 $\theta = \pi$ の位置（最高点）には無限の時間をかけて近づいていくということだね。

- アリス：そういうことだねの。わかりました。
- 全員：お疲れ様でした。ありがとうございました。
- アリス：ちょうどいい時間になったわ。私たちこれからちょっと行くところがあるのでこれで失礼しますが、次回にでも打ち上げの飲み会をしたいわね。
- ユナ：そうね、アリス計画してくれる。
- アリス：わかったわ、安くておいしい居酒屋があるのよ。
- コニー：それじゃKさん、次回楽しみにしていますから。
- K氏：了解。気をつけてお帰り、またねえ〜。

(了)

またお会いできる機会を楽しみに,,,

GOOD LUCK !
SEE YOU AGAIN !