非線形振動（その４）

KENZOU

2008 年 10 月 18 日

♣ 秋晴れのすがすがしい好天気のある日，コニー，ユナ，アリス，キャサリンの 4 人が，すれ違う早朝散歩の人たちと朝の挨拶を交わしながら宇治川の畔をゆっくりＫ氏宅へ向かっていた。

- コニー・ユナ・アリス・キャサリン：おはようございま〜す。
- Ｋ氏：おはよう〜 !! 大きな声だね〜，オッ，キャサリン も顔をだしたか。これはすごいなぁ〜
- キャサリン：おはようございますＫさん。ずいぶんご無沙汰しています。非線形振動のお話をお伺いできるということできました。今日はよろしくお願いします。
- Ｋ氏：いや，こちらの方こそ。非線形振動の話といってもけっこうストレートに突込みが厳しいからね，こっちも汗を掻き掻きだよ (笑い)。
- コニー：え〜っと，いままでの話題を総括すると第 1 回目は単振動とエネルギー保存則で振動の基本的な特性のお話から非線形振動のお話に入ったわ。振幅の大きな振り子と非線形のバネの例でダフィング方程式とその摂動法による近似解のお話ね。第 2 回目では速度の 2 乗に比例した抵抗が働くケースと一定の摩擦力が働く場合のお話。そして第 3 回目はリミットサイクルを伴う自励振動のお話で，特にファン・デル・ポールの方程式の解析で**「多時間尺度法」**という技法のお話を聞いたわ。そこで第 4 回目として，**多時間尺度法**をその効用も含めてもう少し説明していただこうということになったの。
- キャサリン：そうなんだ。このところ時間がなかったものだからコニーから借りたノートをまだ十分に見ていないんだけど，おおよその流れはわかったわ。
- ユナ：それではＫさん，お願いできます。
- Ｋ氏：了解。それではボチボチはじめるとして，ここでの話はあくまでサワリ程度だから，より深く勉強したい時は適当なテキストで各自フォローしてね。僕は 1 回目であげた参考テキストに加えて藪野浩司「工学のための非線形解析入門」（サイエンス社）が非常に役立ったよ。ということで始めようか。
- 全員：よろしくおねがいしま〜す。

7　非線形振動（４話目）

7.1　取り扱った非線形振動方程式

- Ｋ氏：え〜っと，摂動論の話に入る前にいままで取り扱った非線型方程式とその厳密解，近似を整理してみよう。

(1) 振幅の大きな振り子

●方程式

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta \to \ddot{\theta} \doteqdot -\omega^2\theta + \frac{1}{6}\omega^2\theta^3, \quad t=0:\theta=\theta_0,\, \dot{\theta}=0} \tag{7.1}$$

●厳密解

$$\boxed{T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2\phi}}d\phi, \quad a=\sin(\theta_0/2)} \tag{7.2}$$

●近似解（テイラー展開）

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}\left\{1+\frac{1}{4}a^2+\frac{9}{64}a^4+\frac{25}{256}a^6\right\},\quad a=\sin(\theta_0/2)} \tag{7.3}$$

(2) 非線形のバネ（ダフィング方程式）

●方程式

$$\boxed{\ddot{x}+\omega^2x+\beta x^3=0,\quad t=0:x=a,\,\dot{x}=0} \tag{7.4}$$

●厳密解

$$\boxed{T=4\sqrt{\frac{1}{\omega^2+\beta a^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin\phi}},\quad k^2=\frac{\beta a^2}{2(1+a^2)}} \tag{7.5}$$

●近似解（逐次近似）

・1 次近似解

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{p},\quad x=a\cos pt} \tag{7.6}$$

・2 次近似解

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{p},\quad x=\left(a-\frac{\beta a^3}{32p^2}\right)\cos pt+\frac{\beta a^3}{32p^2}\cos 3pt,\quad p^2=\omega^2+(3/4)a^2\beta} \tag{7.7}$$

(3) 速さの 2 乗に比例した抵抗

●方程式

$$\left.\begin{array}{lll}\dot{x}>0\text{ の場合} & \cdots & \ddot{x}+k\dot{x}^2+\omega^2x=0,\quad t=0:x=a\ (a>0),\quad \dot{x}=0\\ \dot{x}<0\text{ の場合} & \cdots & \ddot{x}-k\dot{x}^2+\omega^2x=0\end{array}\right\} \tag{7.8}$$

●近似解（逐次近似）

・1 次近似解

$$\boxed{\dot{x}>0:\quad x(t)=a\cos pt+\frac{1}{6}ka^2(3-4\cos pt+\cos 2pt),\quad p^2=\omega^2} \tag{7.9}$$

$$\boxed{\dot{x}<0:\quad x(t)=a_1\cos pt+\frac{1}{6}ka_1^2(3-4\cos pt+\cos 2pt),\quad a_1=-a+(4/3)ka^2} \tag{7.10}$$

(4) ファン・デル・ポール

●方程式

$$\boxed{\ddot{x}+\epsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0,\quad t=0:x=a_0,\,\dot{x}=0} \tag{7.11}$$

●近似解（多時間尺度法）

・1 次近似解

$$\boxed{x=\frac{2}{\sqrt{1+(4/{a_0}^2-1)\,e^{-\epsilon t}}},\quad x=a\cos pt} \tag{7.12}$$

7.2 多時間尺度近似の有効性

- K氏：3 回目の話でファン・デル・ポール方程式の近似解を求めるのに多時間尺度法の説明をやったけど，ここでその復習をかねて，厳密解がわかっている減衰振動系を例にとって普通の摂動法で求めた近似解と多時間尺度法で求めた近似解を比較し，多時間尺度法の有効性について少し触れてみることにしよう。

- ユナ：近似法の有効性ということね。
- K氏：そうなんだ。近似方は使い分けが大事ということだね。そしたらどんなケースのときにどんな近似を使えばいいかということになるんだけど，ここでは深入りはいないよ。ここではサワリだけを話しておくので，興味があれば各自でその辺りは勉強してね。
- コニー：先ずはサワリを理解してからね（笑い）。

7.2.1 減衰振動の摂動展開とその破碇

- K氏：ターゲットの方程式を

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 0} \tag{7.13}$$

とする。尚，減衰効果は小さいことを明示するために $\gamma = \epsilon\hat{\gamma},\ \hat{\gamma} = O(1)$ とおく[1]。この方程式の解を

$$\boxed{x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2} \tag{7.14}$$

で表されると仮定しよう。つまり，解の大まかな特長を右辺第 1 項の 1 次近似解 x_0 で表し，第 2 項以降はその解の修正だね，そして有限の項数で近似解を得ようとするわけだ。処方に従って（7.14）を（7.13）に入れて ϵ の各ベキでまとめ，それぞれの係数をゼロとおくと

$$\left.\begin{array}{lll} \epsilon^0 & : & \ddot{x_0} + x_0 = 0 \\ \epsilon & : & \ddot{x_1} + x_1 = -2\hat{\gamma}\dot{x_0} \end{array}\right\} \tag{7.15}$$

を得る。ϵ の 2 次以降の項はいまのところ無視する。第 1 式の解は

$$x_0 = Ae^{it} + A^* e^{-it} = Ae^{it} + c.c \qquad (c.c：複素共役)$$

で，複素振幅 A を $A = (1/2)ae^{-i\phi}$ とおくと (a：実数)

$$x_0 = \frac{1}{2}ae^{i(t-\phi)} + \frac{1}{2}ae^{-i(t-\phi)} = a\cos(t-\phi) \tag{7.16}$$

と表せる。これを（7.15）の第 2 式に入れると

$$\ddot{x_1} + x_1 = 2\hat{\gamma}\cos(t-\phi) \tag{7.17}$$

となり，この微分方程式の特解は例の「解の公式」より

$$x_1 = -\hat{\gamma}at\cos(t-\phi) \tag{7.18}$$

が得られる。したがって求める近似解は

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \cdots = a\cos(t-\phi) - \epsilon\hat{\gamma}at\cos(t-\phi) + \cdots$$

$$\therefore \quad \boxed{x = a\cos(t-\phi) - \gamma at\cos(t-\phi)\cdots} \tag{7.19}$$

と得られる。a と ϕ は初期値 $t = 0 : x = x(0),\ \dot{x}(0) = v(0)$ より

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = a\cos\phi \\ v(0) = a\sin\phi - \gamma a\cos\phi \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} a = \sqrt{x(0)^2 + (\gamma x(0) + v(0))^2} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{v(0) + \gamma x(0)}{x(0)} \end{array}$$

ところで，厳密解は

$$\boxed{x = ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{1-\gamma^2}\,t - \phi)} \tag{7.20}$$

[1] O はランダウ（ドイツの数学者 Edmunt George Hermann Landau 1877-1938) の記号と呼ばれるものでオーダーを評価するのに使われる。$O(1)$ は $\hat{\gamma}$ は ϵ^0 のオーダーという意味。また，無次元微小量 ϵ は bookkeeping device と呼ばれる。

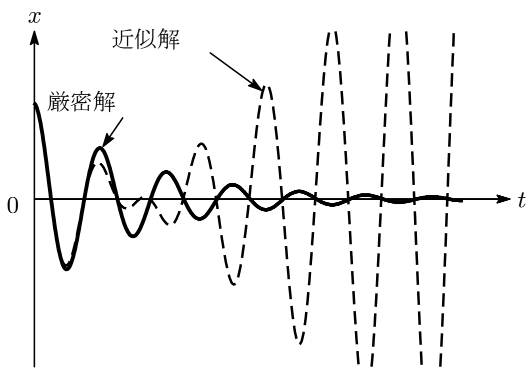
であったね。a と ϕ は次の通りだ

$$a=\sqrt{x(0)^2+\frac{(v(0)+\gamma x(0))^2}{1-\gamma^2}}, \quad \phi=tan^{-1}\frac{v(0)+\gamma x(0)}{\sqrt{1-\gamma^2}\,x(0)} \tag{7.21}$$

$1-\gamma^2\simeq 1$ とすると近似解の $a,\ \phi$ と一致するね。

さて，近似解 (7.19) は厳密解とは程遠い形をしているではないか! つまり，この摂動計算は誤った答えを導くということになるね。その様子は下図の通りだ。

*Fig.*17



時間の経過が短い時，摂動解は厳密解を反映しているが，ある時間の経過後には厳密解との乖離が非常に大きくなる。厳密解は振幅が収束していくが，摂動解は逆に振幅が発散してしていく。これはなぜか，摂動計算のどこかがマズイということになるね。

- コニー：かなり重症ね。例の擬似共鳴項，いまの場合 $\gamma at\cos(t-\phi)$ が時間の経過とともに厳密解から大きくズレる要因として働くということになるのね。

- K氏：そうなんだ。1 次近似解 x_0 の補正どころではない，1 次近似より大きな顔をしてくる。これは何がおかしいのか？ 確かにコニーの指摘するように擬似共鳴項の振る舞いが問題だ。だったらなぜそのような振る舞いをするのか。。。

- ユナ：いま得られた近似解と厳密解を比較すると

$$\begin{cases} \text{近似解} \quad x=a(1-\epsilon\,\hat{\gamma}t)\cos(t-\phi) \\ \text{厳密解} \quad x=ae^{-\epsilon\hat{\gamma}t}\cos(\sqrt{1-\epsilon^2\hat{\gamma}^2}\,t-\phi) \end{cases} \tag{7.22}$$

だわね。cos の中身はいまのところおいておくとして，t が小さいときは $e^{-\epsilon\hat{\gamma}t}\simeq 1-\hat{\gamma}(\epsilon t)+(1/2)\hat{\gamma}^2(\epsilon t)^2+\cdots$ とテイラー展開できるので，近似解の振幅はこの展開の第 2 項までを取っていることに相当するわね。だから，**経過時間が非常に短い間は厳密解を反映**しているということになるわ。

- キャサリン：ということは，経過時間が長くなれば $e^{-\epsilon\hat{\gamma}t}$ のテイラー展開も高次のベキまで考慮しなくてはならない。具体的に考えると $t=1/\epsilon$ 経過後は $e^{-\epsilon\hat{\gamma}t}\simeq 1-\hat{\gamma}+(1/2)\hat{\gamma}^2+\cdots$ となるし，$1/\epsilon^2$ 時間経過後は $e^{-\epsilon\hat{\gamma}t}\simeq 1-\hat{\gamma}/\epsilon+(1/2)\hat{\gamma}^2/\epsilon^2+\cdots$ となって，高次の項が無視できなくなってくる。つまり，現実にはベキの有限項での打ち切りはできない，丸ごと考えなくてはダメなんだということね。

- K氏：え〜っと，いままではっきりとは言わなかったけど，いまの議論にもあったように摂動論では各項の大まかな大きさ（オーダー）の評価が重要になってくるんだね。そこでわき道にそれるけど，オーダーをどのように記述すればよいのかを少し説明しよう。ちょっと一服の積もりで聞いてもらえばいいよ。いわゆる**ランダウの記号**というものを使うんだ。

- アリス：ランダウってあのランダウ・リフシッツのランダウのこと？

- K氏：そのランダウはレフ・ダヴィドヴィッチ・ランダウ（Lev Davidovich Landau : 1908-1968) でロシアの物理学者だね。ランダウの記号のランダウはドイツの数学者で E.G.H.Landau（1877-1938）のことなんだ。

- アリス：そうなんだ。

■ランダウの記号 $O(x)$

- K氏：まず，ランダウの記号の定義だけど，関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = b < \infty \tag{7.23}$$

が成立するとき，

$$f(x) = O(g(x)), \quad (x \to a) \tag{7.24}$$

と書く。例えば，$x = \epsilon \cos \omega t$ のオーダーは $x = O(\epsilon)$, $(\epsilon \to 0)$ と表せる。というのは

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{\epsilon \cos \omega t}{\epsilon} \right| = \mid \cos \omega t \mid$$

$$\therefore \ x = O(\epsilon), \quad (\epsilon \to 0)$$

で，<u>x の大まかな大きさは $O(\epsilon)$ 程度</u> だという意味だね。

また，

$$\gamma = O(\epsilon), \quad (\epsilon \to 0)$$

のオーダをもった γ と x の掛け算のオーダは

$$\gamma x = O(\epsilon^2), \quad (\epsilon \to 0)$$

となることはわかるよね。そこで，次の例を考えてみよう。$x = a_x \cos \omega t$ が $x = O(\epsilon)$, $(\epsilon \to 0)$ と表記された場合, 定義式（7.23）より

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{a_x \cos \omega t}{\epsilon} \right| \neq \infty$$

だね。これは微少量 ϵ を使って a_x を

$$a_x = \epsilon \hat{a}_x, \quad \hat{a}_x = a_{x0} + \epsilon a_{x1} + \epsilon^2 a_{x2} + \cdots, \quad (a_{x0} \neq 0)$$

とおくことができる。ここででてきた $\hat{a}_x$ のオーダは

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\hat{a}_x}{\epsilon} = \infty, \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\hat{a}_x}{\epsilon^0} = \hat{a}_{x0} \neq \infty$$

となるから，

$$\hat{a}_x = O(\epsilon^0) = O(1)$$

と表すことができる。例えばテイラー展開なんかで

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4), \quad (x \to 0)$$

と表されるのを見かけたことがあると思うけど，これは右辺の 5 項目以上の高次の項は x^4 以上の項で表されるよね。それを仮に $f(x)$（$= x^4/4! + x^5/5! + \cdots$）とおくと

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \frac{1}{4!}$$

となるから $f(x) = O(x^4)$ ということだね。

これでオーダのことはわかったので，次に**オーダの評価**の話に入ろう。

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = b, \quad (b \neq \infty, b \neq 0) \tag{7.25}$$

が成立するとき，つまり，$f(x)$ が $g(x)$ のたかだか定数倍程度の大きさにとどまる時，$f(x)$ と $g(x)$ は，**同程度の大きさ**（same order）であるというんだ。そしてこのことを

$$f(x) \sim g(x) \tag{7.26}$$

と書くんだね。例えば

$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = 2x^2 + 1$$

のオーダを評価してみよう。(7.25) から

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 3$$

となるね。だから $f(x)$ と $g(x)$ は 同程度の大きさ ということになる。以下の例も参考に見ておいて。

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2 & : \quad 2x \text{ と } x \text{ は same order} \\ \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2}{x} = 2 & : \quad 2x + x^2 \text{ と } x \text{ は same order} \\ \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + x^3}{x^2} = 3 & : \quad 3x^2 + x^3 \text{ と } x^2 \text{ は same order} \end{cases} \tag{7.27}$$

また，γ が $\gamma \sim 1$ とか $\gamma \sim \epsilon$ のように表記された場合，それぞれ「**γ は１程度の大きさ**」,「**γ は ϵ 程度の大きさ**」と呼んでいる。微少量 ϵ を基準量として ϵ の各ベキを大きさの尺度 として導入した時，つまり

$$\cdots, \epsilon^2, \epsilon^{-1}, \epsilon^0, \epsilon, \epsilon^2, \cdots$$

を物指しとして導入した場合だね。このとき $\gamma \sim 1$ と表記された γ は $\epsilon^0 (= 1)$ の尺度で測れる大きさを持ち，$\gamma \sim \epsilon$ と表記された γ は ϵ の尺度で測れる大きさを持つということを示しているんだね。この辺りのわかりやすい例が冒頭に上げた藪野浩司「工学のための非線形解析入門」に載っているので以下に紹介しておこう。
いま $\epsilon = 1/10$ としてお金を計算するための尺度を導入する。１の尺度を１円とすると (1)$1/\epsilon$ の尺度は 10 円，(2)$1/\epsilon^2 = 100$ の尺度は 100 円，(3)$1/\epsilon^3$ の尺度は 1000 円，(4)$1/\epsilon^4$ の尺度は 10000 円ということになるね。このような尺度を使うと，例えば 300 円は (2) の尺度 $1/\epsilon^2 = 100$ 程度の大きさとみなせるね。(1) の尺度 $1/\epsilon = 10$ は 300 円という金額のオーダを提示するのには，帯に短しで，向かないね。というのは，$300 = 30 \times (1/\epsilon)$ で，尺度の係数 30 が $1/\epsilon$ の大きさを持ってしまう。

では 5000 円という金額のオーダはどのような尺度で提示すればよいかということになると，1000 円が 5 枚，あるいは 1 万円が 1/2 枚だから (3) の尺度 $5 \times (1/\epsilon^3)$ あるいは (4) の尺度 $1/2 \times (1/\epsilon^4)$ を使えばいいということになるね。

ということで，ある値のオーダを適切な尺度で表すためには，尺度にかけられる係数が ϵ^0 の尺度で測られる程度の大きさである必要があるということなんだね。

7.2.2 減衰振動摂動展開の破綻の原因

- K氏：さて，本題に戻って摂動展開が破綻した原因を探っていこう。近似解は

$$\boxed{x = x_0 + \epsilon x_1 + \cdots = a\cos(t - \phi) - \hat{\gamma}\epsilon t \cos(t - \phi) + \cdots} \tag{7.28}$$

で表された。時間があまり経過していない間，つまり $t = O(\epsilon^0)$ の間は，(7.28) の右辺第２項は $O(\epsilon)$ のオーダであるから，第１項の修正項になっている。さらに時間が進むと，$t = O(1/\epsilon)$ オーダのとき第２項は第１項と同程度の大きさ（$\epsilon t = O(1)$）となり，さらに時間が経過して $t = O(1/\epsilon^2)$ となったとき，第２項は $\epsilon t = O(1/\epsilon)$ となり，第１項よりオーダが大きくなる。つまり，修正項が１次近似解より大きくなってしまい摂動展開のシナリオが大きく狂ってしまう。これが先ほどユナやキャサリンが指摘した点だね。

そしてその原因はコニーが指摘したように擬似共鳴項 $x_1=\hat{\gamma}a\epsilon t\cos(t-\phi)$ の出現にあるんだな。

(スポドリをごくりと飲んで) 厳密解 $x=ae^{-\epsilon\hat{\gamma}t}\cos(\sqrt{1-\epsilon^2\hat{\gamma}^2}\,t-\phi)$ の振幅部 $ae^{-\epsilon\hat{\gamma}t}$ の時間的変化の振る舞いを見ると，キャサリンが示したように

$$ae^{\hat{\gamma}\epsilon t}=a\left(1-\hat{\gamma}\epsilon t+\frac{\hat{\gamma}^2}{2}(\epsilon t)^2+\cdots\right) \tag{7.29}$$

と展開できて，$O(1)$ までの時間経過においては右辺第 2 項の大きさは $O(\epsilon)$ でそれ以降の項の大きさは $O(\epsilon^n)$ だから，(ϵt) のベキが高次になるにつれてその値は減少（ゼロに収束）していくので，

$$ae^{\hat{\gamma}\epsilon t}=a(1-\hat{\gamma}\epsilon t)+O((\epsilon t)^2)$$

として，2 次以上の高次の項を無視すると，この経過時間の範囲においては近似解の振幅部 $a(1-\epsilon\hat{\gamma}t)$ と同じとみなせる。

さて，さらに時間が経過し $0(1/\epsilon)$ のオーダーでの振舞いを見ると $\epsilon t=O(1)$, $(\epsilon t)^2=O(1)$, $\cdots$, $(\epsilon t)^2=O(1)$ となって，(7.29) の高次のベキ項はすべてオーダが等しくなる。つまり，無視できなくなるということだね，さらに時間が経過して $O(1/\epsilon^2)$ では $\epsilon t=O(1/\epsilon),(\epsilon t)^2=O(1/\epsilon^2),\cdots,(\epsilon t)^n=O(1/\epsilon^n)$ となって，高次のベキになるほどオーダが大きくなり，有限項で打ち切ることができなくなってくる。キャサリンの言ったように丸ごと考えなくてはダメということになってくるんだね。以上が振幅部の時間的振る舞いだ。

次に，周期成分 $\cos(\sqrt{1-\epsilon^2\hat{\gamma}^2}\,t\phi)$ の時間的変化の振る舞いを調べてみよう。振幅は時間 t が $O(1/\epsilon)$ 経過してはじめて初期値の振幅 a からの変化分 $-\hat{\gamma}\epsilon t$ の大きさが $O(1)$ になったけど，周期的な変動部分，つまり振動成分だね，これは周期が $T=2\pi/\sqrt{1-\gamma^2}\approx 2\pi=O(1)$ であるから**振動成分は振幅の時間的変化に対してもっと速く変化する**ことがわかる。 このように早さが異なる 2 つの変化を 1 つの時間尺度で表そうとしたところに無理があるというか，破碇の根本原因があるんだね。

振幅の変化は $O(1/\epsilon)$ の長い時間を経過してはじめて $O(1)$ の大きさの変化を表すので，その変化を表すのに時間 t は適さない。もっと尺度の長い時間で記述する必要がある。ということで，摂動展開の破碇を引き起こさないために，以下に定義される別の時間尺度 t_1 を導入する。

$$\boxed{t_1=\epsilon t} \tag{7.30}$$

そうすると

$$ae^{-\hat{\gamma}\epsilon t}=a(1-\hat{\gamma}\epsilon t+\cdots)=a(1-\hat{\gamma}t_1+\cdots) \tag{7.31}$$

と展開でき，時間 t_1 が $O(1)$（t が $O(1/\epsilon)$）だけ経過した時に振幅に $O(1)$ の変化が現れることになる。

- ユナ：なるほど，振動成分の時間変化の間隔とあわすために異なる時間スケールを導入することになるのね。ところで，先ほどあった $O(1/\epsilon^2)$ の時間経過の取り扱いはどうなるのかしら？

- K氏：そうだね。それは

$$\boxed{t_2=\epsilon t_1=\epsilon^2 t} \tag{7.32}$$

とおいて新たな時間尺度を導入するんだね。そうすると

$$\boxed{ae^{-\hat{\gamma}\epsilon t}=a\left(1-\hat{\gamma}t_1+\frac{1}{2}\hat{\gamma}^2\epsilon^2{t_1}^2\cdots\right)=a\left(1-\hat{\gamma}t_1+\frac{1}{2}\hat{\gamma}^2{t_2}^2\cdots\right)} \tag{7.33}$$

となり，時間 t_2 が $O(1)$ (t が $O(1/\epsilon^2)$) 経過した時に振幅 $O(1)$ の変化が現れることになる。このように時間スケールを多数用意するんだね。これが 3 回目で話した**多時間尺度法**の成り立ちということになんだ。

具体的に $\epsilon=1/60$ とすると，$t_1=\epsilon t$ は秒針の時間尺度 t に対して分針の時間尺度を設定したことになるね。秒針 t が $1/\epsilon=60$ 経過してはじめて t_1 は $O(1)$ すなわち分針 t_1 は 1 を刻む。減衰振動の例では，周期的な変化は秒針（$t_0=t$）を，振幅の変化は分針（$t_1=\epsilon t$）を使って解析されるべき量だったんだ。
それでは多時間尺度法を使って解析を進めよう。その前に $Coffee\ Break$ しようか。

- 全員：さんせ〜い。

********************************* *Coffee Break* *************************************

- K氏：このコーヒーは香りがいいね，キャサリンが買ってきてくれたのかい。
- キャサリン：そうよ。銘柄のことはよく知らないけど，お店のマスターに是非にと勧められたので少し高かったけど奮発しちゃった（笑い）。
- K氏：うれしいね，ところで他の方々の差し入れは。。。。
- アリス：差し入れというほどのモノでもないけど鶴屋吉信の栗羊羹を買ってきたわ。
- コニー：わたしは，この前東京に行った際に買ってきた Angers のシフォンフルーツロール。
- ユナ：わたしは，いまが旬の葡萄ビオーネ。
- K氏：（早速，栗羊羹を口に入れながら）いろとりどりでうれしいねぇ。疲れも吹き飛ぶよ。

全員歓談しながら *Coffee Break* を楽しむ

- アリス：ところで，摂動論を一言で言えばどうなるかしら。
- コニー：そうね，摂動論では，まず解けるモデルを出発点としているわね。そしてその解が摂動を受けることで変化すると考えるわけね。方程式的には系を乱す項を摂動項としておくわけだけど，その摂動の影響で厳密解からずれてくる。そのズレ分を少しづつ補正していくわけね。例えば求めたい物理量 A があった場合，摂動の強さを表すパラメータを $\epsilon(\epsilon \ll 1)$ として $A =_0 +\epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \cdots$ と ϵ のベキの形に表し，係数 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ を逐次系統的に求めていく手法ということになるかしら。
- アリス：そういうことね。だからある関数をテイラー展開で近似する場合と意味合い的にはよく似ているわね。そういえば微分方程式もべき展開を使った級数解法というのがあったわね。
- ユナ：量子力学の最初の方で摂動論を習うけどハミルトニアンを $H = H_0 + H'$ とおいて H' を摂動項とするのね。この摂動項を摂動の強さを表すパラメータ λ で λV とおく。そして波動関数を $\psi_n = \psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^2\psi_n^{(2)} + \cdots$ とパラメータ λ のベキで展開し，同じようにエネルギー順位も $E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots$ と展開してシュレーディンガーの方程式に入れる。そして $(H_0 + \lambda V)\psi_n = E_n\psi_n$ より $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ の項同士の比較を通して各次数の摂動エネルギー、摂動波動関数を求めるわね。
- キャサリン：ただ，摂動計算が有効なのはパラメータ λ が小さい，いわゆる**弱結合系**の場合で，λ が大きい，いわゆる**強結合系**の場合には途端に難しくなってくるのね。もう強引に数値計算で追い求めるというか，兎に角大変になってくるのね（笑い）。

（K氏は先ほどからケーキやフルーツなどに盛んに手を伸ばし幸せそうな顔で口をもぐもぐさせている）

- アリス：ところでランダウの記号というのは摂動の解析で結構有力だったわね。オーダという捉え方で大まかな大きさを見積もるというか。誤差の項を表すのに使われるということは知っていたけど，それ以上のことは特に気にとめていなかった。。。
- コニー：わたしも似たようなものよ。
- K氏：あ〜っあ，おいしかった，ご馳走さまでした。それではボチボチと次に参りましょうか。
- 全員：よろしくおねがいしま〜っす。

****

7.3 多時間尺度法による減衰振動の解析

- K氏：さて，多時間尺度を導入して減衰振動の解析を進めよう。この辺りの処方箋は 3 回目の話のときに詳しくやったからそのノートを参照してもらうとして

$$\boxed{t_0 = t, \quad t_1 = \epsilon t} \tag{7.34}$$

$$\boxed{x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots} \tag{7.35}$$

とおくわけだ。時間微分は 3 回目の話の（6.22）を参照して（7.15）を書き換えると

$$\left.\begin{aligned}\epsilon^0 \quad &: \quad \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0^2} + x_0 = 0 \\ \epsilon \quad &: \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + x_1 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} - 2\hat{\gamma}\frac{\partial x_0}{\partial t_0}\end{aligned}\right\} \tag{7.36}$$

が得られる。（7.36）の最初の式から

$$x_0 = a(t_1)cos\{t_0 - \phi(t_1)\} \tag{7.37}$$

が得られる。ここで注意すべき点として，振幅 a と位相 ϕ は定数でなく t_1 の関数 であるということだ。もっと詳しく言うと $a = a(t_1, t_2, \cdots)$, $\phi = \phi(t_1, t_2, \cdots)$ と多重尺度時間の関数ということになる。これが**多重時間尺度法のミソ**で，これによって振幅と位相は $O(1/\epsilon)$ の時間スケールで変化する自由度を獲得することができるというわけだね（$\leftarrow O(1/\epsilon^2)$ の時間スケールでは t_2 が関係してくる)。これを（7.36）の 2 つ目の式の右辺に入れると

$$\boxed{\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + x_1 = 2\left(\frac{\partial a}{\partial t_1} + \hat{\gamma}a\right)\sin(t_0 - \phi) + 2a\frac{\partial \phi}{\partial t_1}\cos(t_0 - \phi)} \tag{7.38}$$

を得る。この式の右辺を眺めると，系に周期的な外力が作用していると解釈できる ね。ただし，t_1 の時間関数である $\dfrac{\partial a}{\partial t_1}$ や $a\dfrac{\partial \phi}{\partial t_1}$ がこれらの項にかかっていることがポイントなんだ。つまり，これらをうまく決めることで擬似共鳴項の出現を抑えることができる。具体的には

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial a}{\partial t_1} + \hat{\gamma} = 0 \\ &a\frac{\partial \phi}{\partial t_1} = 0\end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

とおけばよい。この式は容易に解けて

$$\left.\begin{aligned}&a(t_1) = a_0 e^{-\hat{\gamma}t_1} = a_0 e^{-\gamma t} \\ &\phi(t_1) = \phi_0\end{aligned}\right\} \tag{7.40}$$

が得られる。ここで a_0, ϕ_0 は時間 t_2 の関数である ことに注意しよう。正確に表現すると $a_0 = a_0(t_2, t_3, \cdots)$, $\phi_0 = \phi_0(t_2, t_3, \cdots)$ ということで，よりロングスパンで変化するということだけど，つまるところこの系の初期値になる。これを（7.37）に入れると

$$x_0 = a_0 e^{-\gamma t} cos(t - \phi_0) \tag{7.41}$$

となって，$O(1)$ と $O(1/\epsilon)$ の時間スケールまでを考慮した近似解として（7.35）より

$$\boxed{x = x_0 + O(\epsilon) = a_0 e^{-\gamma t} cos(t - \phi_0) + O(\epsilon)} \tag{7.42}$$

が得られる。厳密解は

$$\boxed{x = ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{1-\gamma^2}\,t - \phi)}$$

であり，角振動数が一致していけど $\sqrt{1-\gamma^2} \approx 1 - \epsilon^2\hat{\gamma}^2/2 + \cdots$ であるので，その差は $O(\epsilon^2)$ であり，さらに時間尺度 t_2 を導入して摂動展開を進めるとその差は解消することになる。

- ユナ：なるほど〜，特に厳密解と殆ど一致してきたことには感動するわね。
- キャサリン：本当に巧妙なやり方ねぇ〜。今日，皆と join できてよかったわ。
- コニー：3 回目のファン・デル・ポールのところで多時間尺度法のお話を聞いて感心したけど改めて感激するわね。

- アリス：本当にそうね。ところでこの方法を第1回目でやった「ダフィング方程式」に適用するとどうなるのかしら。振幅の大きい振り子にも共通するものがあるので，Kさん，もう一仕事お願いしていいかしら。
- K氏：(キョトンとして）はっ？ （汗 ;; ）そういうことね 。。。(少しゲッソリしながら）まぁ，折角だからもう一踏ん張りガンバリましょうか。
- 全員：よろしくお願いしま〜っす。

7.4 非線形バネ（ダフィング方程式）の多時間尺度法近似

- K氏：え〜っ，それでは，§7.1(2) の「ダフィング方程式」のケースを多時間尺度法で取り扱ってみようか。ターゲットの方程式は

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \beta x^3 = 0 \tag{7.43}$$

だね。いま，$|\beta| \ll 1$ であることを明示するために $\beta = \epsilon\sigma$ ($\epsilon = O(\beta)$, $0 < \epsilon \ll 1$, $|\sigma| = O(1)$) とおいて方程式を

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(x + \epsilon\sigma x^3) = 0} \tag{7.44}$$

と書くよ。ここでわざわざ時間微分を微分記号を使って書いたのは多時間 $t_0(=t), t_1, t_2, \cdots$ との区別を明確にするためだね。

さて，多時間尺度法の処方に従い，時間微分演算子を多時間尺度で展開して

$$\left.\begin{aligned} & t_n \equiv \epsilon^n t \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ & \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots = \sum_{n=0} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n} \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

x を ϵ のべき乗で展開して

$$x = x_0 + \epsilon x + \epsilon^2 x_2 + \cdots \tag{7.46}$$

これを（7.44）に入れると

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(x + \epsilon\sigma\omega^2) &= \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0^2} + \epsilon\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1}\right) \\ &\quad + \epsilon^2\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_0^2} + 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0 \partial t_1} + 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2}\right) + \cdots \\ &\quad + \omega^2(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots) + \epsilon\omega^2\sigma(x_0 + \epsilon x_1 + \cdots)^3 \\ &= \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0^2} + \omega^2 x_0 + \epsilon\left\{\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} + \omega^2(x_1 + \sigma {x_0}^3)\right\} \\ &\quad + \epsilon^2\left\{\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_0^2} + 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0 \partial t_1} + 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_2} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2} + \omega^2(x_2 + 3\sigma {x_0}^2 x_1)\right\} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

ϵ^0 の項は次の 2 つの方程式だ。

$$\left\{\begin{aligned} & (1) \quad \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0^2} + \omega^2 x_0 = 0 \\ & (2) \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} + \omega^2(x_1 + \sigma x_0^3) = 0 \end{aligned}\right. \tag{7.47}$$

(1) より 1 次の近似解である

$$\boxed{x_0 = a\, e^{i\omega t_0} + a^* e^{-i\omega t_0} = a\, e^{i\omega t} + c.c. \quad (t_0 = t)} \tag{7.48}$$

を得る。ここでは複素表示の一般的な表現をとることにするよ。$c.c.$ は**複素共役**という意味だね。尚，振幅 a は時間の関数 $a = a(t_1, t_2, \cdots)$ とすることがポイントだったね。a は引き続き解析を進めていくことで求めていくわけだ。(7.48) を (7.47) の (2) に入れて整理すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + \omega^2 x_1 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0 \partial t_1} - \omega^2 \sigma {x_0}^3 \\
&= \left(-2i\omega\frac{\partial a}{\partial t_1} - 3\omega^2\sigma a^2 a^*\right)e^{i\omega t_0} - \omega^2\sigma a^3 e^{i3\omega t_0} \\
&+ \left(2i\omega\frac{\partial a^*}{\partial t_1} - 3\omega^2\sigma a a^{*2}\right)e^{i\omega t_0} - \omega^2\sigma a^{*3} e^{-i3\omega t_0}
\end{aligned}
\tag{7.49}
$$

を得る。右辺の第 1 項と第 2 項は**複素共役**の関係だね。複素表示にすると複素共役は常に対となってでてくるので，以降，複素共役は特に明示する必要がない場合は $c.c$ と書くことにする。

上の式の $e^{i\omega t_0}$ の項は**擬似共鳴項**だからこれを消去するんだが，その条件は

$$
\begin{cases}
(3) \quad \dfrac{\partial a}{\partial t_1} = \dfrac{3i\omega}{2}\sigma a^2 a^* \\
(4) \quad \dfrac{\partial a^*}{\partial t_1} = -\dfrac{3i\omega}{2}\sigma a^{*2} a
\end{cases}
\tag{7.50}
$$

だね。ここで**複素振幅** a を $a = \alpha e^{i\rho}$ と表しておく。尚，α, ρ は時間尺度 $t_1, t_2, \cdots$ の関数とするんだったね。

$$
\boxed{\alpha = \alpha(t_1, t_2, \cdots), \quad \rho = \rho(t_1, t_2, \cdots)}
\tag{7.51}
$$

ということに注意して (7.50) の (3) を計算すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t_1} &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t_1} + i\alpha\frac{\partial \rho}{\partial t_1}\right)e^{i\rho} = \frac{3i}{2}\sigma\omega\alpha^3 e^{i\rho} = \frac{3i}{2}\sigma\omega\alpha^2 a \\
\therefore \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t_1} = \frac{3}{2}\omega\alpha^2
\end{aligned}
\tag{7.52}
$$

が得られる。これから

$$
\left.
\begin{aligned}
&\alpha = \alpha_2(t_2, t_3, \cdots) \\
&\rho = \frac{3}{2}\omega\alpha^2 t_1 + q
\end{aligned}
\right\}
\quad a = \alpha \exp\left\{i\left(\frac{3}{2}\omega\alpha^2 t_1 + q\right)\right\}
\tag{7.53}
$$

と a の具体的な形を得られた。ただし，α と ρ は $t_2, t_3, \cdots$ の関数で，より高次の摂動方程式の解析から決定される。ところで ρ は $\exp(i\rho)$ という形で入っているので，この系の位相に影響を及ぼし，位相のズレを起こさせることがわかる。以上の結果を整理すると **1 次の近似解**は

$$
\boxed{x_0 = a e^{i\omega t_0} + c.c = \alpha \exp i\left\{\omega\left(1 + \frac{3}{2}\alpha^2\beta\right)t + q\right\} + c.c, \quad (t_0 = t, \sigma t_1 = \beta t)}
\tag{7.54}
$$

となる。具体的に（物理的に意味のある）実部だけを取りだすと

$$
\boxed{x_0 = \alpha \cos\left\{\omega\left(1 + \frac{3}{2}\alpha^2\beta\right)t + q\right\}}
\tag{7.55}
$$

だね。

- コニー：1 次近似解ででてきた α は初期振幅 a_0 とおいていいのね。ところで 1 次の近似解までの導出はわかったから，さらに 2 次の近似解まであと一歩進めていただくとうれしいわ，お疲れのところ申しわけないんだけど。。。

- K氏：ハイハイわかりました。これでおさまりがつくような方々ではないもんね（笑い）。

さて，(7.49) に戻って2次の近似解 x_1 を求めよう。

$$\boxed{\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2}+\omega^2 x_1=-\omega^2\sigma(a^3e^{i3\omega t_0}+a^{*3}e^{-i3\omega t_0})} \tag{7.56}$$

この方程式の一般解は第2回目に載せた**「解の公式」**を使えばよいわけで，その下準備をすると

$$\begin{cases} y_1=Ae^{i\omega t_0} & \longrightarrow \quad \dfrac{dy_1(0)}{dt_0}=iA\omega \\ y_2=A^*e^{-i\omega t_0} & \longrightarrow \quad \dfrac{dy_2(0)}{dt_0}=-iA^*\omega \end{cases} \Longrightarrow W_0=y_1(0)y_2'(0)-y_1'(0)y_2(0)=-2i\omega AA^*$$

$$\int e^{\pm 2i\omega t_0}dt_0=\mp\frac{ie^{2i\omega t_0}}{2\omega},\quad \int e^{\pm 4i\omega t_0}dt_0=\mp\frac{ie^{4i\omega t_0}}{2\omega}\quad \text{（複合同順）} \tag{7.57}$$

であるから，これを使って $Y(t_0)$ を計算すると

$$Y(t_0)=\frac{\sigma}{8}a^3e^{i3\omega t_0}+\frac{\sigma}{8}a^{*3}e^{-i3\omega t_0}=\frac{\sigma}{8}a^3e^{i3\omega t_0}+c.c \tag{7.58}$$

を得る。したがって（7.56）の一般解は同次解と特解（非同次解）の和で表されるから

$$x_1(t)=ae^{i\omega t_0}+a^*e^{-i\omega t_0}+\frac{\sigma}{8}a^3e^{i3\omega t_0}+\frac{\sigma}{8}a^{*3}e^{-i3\omega t_0}$$

となるけど，ここで必要な特解だけを取りだすと

$$\boxed{x_1(t)=\frac{\sigma}{8}a^3e^{i3\omega t_0}+c.c} \tag{7.59}$$

となる。これが**2次の近似解**だね。複素振幅 a はさらに計算を進めて求めていかなくてなくてなならない。

さて，ϵ^2 の項は

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_0^2}+2\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0\partial t_1}+2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0\partial t_2}+\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2}+\omega^2(x_2+3\sigma {x_0}^2x_1)=0$$

だね。これを整理して

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_0^2}+\omega^2 x_2=-2\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0\partial t_1}-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0\partial t_2}-\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2}-3\omega^2\sigma {x_0}^2x_1=0 \tag{7.60}$$

を得る。この右辺の計算を進めるのに下準備をしておこう。

（*** 書いては消し書いては消し，しばしばミスる計算間違いを消しては書き直し，K氏 は手を真っ黒しながら，ときどきボ〜と立ちすくみ，白板に数式を書き続けた。。。***）

$$\left(\begin{array}{ll} x_0=ae^{i\omega t_0}+c.c, & x_1=\dfrac{\sigma}{8}a^3e^{i3\omega t_0}+c.c \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial t_0\partial t_1}=i\dfrac{3\sigma\omega}{8}\dfrac{\partial a^3}{\partial t_1}e^{i3\omega t_0}+c.c, & \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial t_0\partial t_1}=i\omega\dfrac{\partial a}{\partial t_2}e^{i\omega t_0}+c.c \\ \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2}=\dfrac{\partial^2 a}{\partial t_1^2}e^{i\omega t_0}+c.c, & 3\omega^2\sigma x_0^2x_1=\dfrac{3\sigma^2\omega^2}{8}(a^5e^{i5\omega t_0}+a^3a^{*2}e^{i\omega t_0})+c.c \end{array}\right) \tag{7.61}$$

さてと，これらを（7.60）の右辺に入れて整理すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_0^2}+\omega^2 x_2&=-\frac{3i\omega}{4}\sigma\frac{\partial a^3}{\partial t_1}e^{i3\omega t_0}-2i\omega\frac{\partial a}{\partial t_2}e^{i\omega t_0}-\frac{\partial^2 a}{\partial t_1^2}e^{i\omega t_0}\\ &\quad -\frac{3\omega^2\sigma^2}{8}(a^5e^{i5\omega t_0}+2a^4a^*e^{i3\omega t_0}+a^3a^{*2}e^{i\omega t_0})+c.c\\ &=-\frac{3i\omega}{4}\sigma\frac{\partial a^3}{\partial t_1}e^{i3\omega t_0}-\frac{3\omega^2\sigma^2}{8}(a^5e^{i5\omega t_0}+2a^4a^*e^{i3\omega t_0})\\ &\quad -\left(2i\omega\frac{\partial a}{\partial t_2}+\frac{\partial^2 a}{\partial t_1^2}+\frac{3\omega^2\sigma^2}{8}a^3a^{*2}\right)e^{i\omega t_0}+c.c\end{aligned} \tag{7.62}$$

となるね。この右辺第 3 項は**擬似共鳴項**なので,

$$2i\omega\frac{\partial a}{\partial t_2}+\frac{\partial^2 a}{\partial t_1^2}+\frac{3\omega^2\sigma^2}{8}a^3a^{*2}=0 \tag{7.63}$$

という条件をおいてこれを消去するわけだ。次に**複素振幅** $a=\alpha e^{i\rho}$ を（7.63）に入れて計算を進めるんだけど，その下準備をしておくと

$$\begin{cases}\alpha=\alpha_2(t_2,t_3,\cdots),\quad \rho=(3/2)\omega\alpha^2t_1+q(t_2,t_3,\cdots)\longrightarrow a=\alpha\exp\left\{\dfrac{3}{2}\omega\alpha^2t_1+q\right\}\\ \dfrac{\partial a}{\partial t_2}=\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial t_2}+i\alpha\dfrac{\partial q}{\partial t_2}\right)e^{i\rho}\\ \dfrac{\partial a}{\partial t_1}=\dfrac{3i\omega}{2}\sigma a^2a^*=\dfrac{3i\omega}{2}\sigma a^2a^*=\dfrac{3i\omega}{2}\sigma\alpha^2 a\quad\cdots\quad\text{（7.50）より}\\ \dfrac{\partial^2 a}{\partial t_1^2}=\dfrac{3i\omega}{2}\sigma\alpha^2\dfrac{\partial a}{\partial t_1}=-\left(\dfrac{3\omega}{2}\sigma\alpha\right)^2\end{cases} \tag{7.64}$$

これを（7.63）に入れて，実部と虚部に分けて整理すると（$e^{i\rho t}\neq 0$）

$$2i\omega\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t_2}+i\alpha\frac{\partial q}{\partial t_2}\right)-\left(\frac{3\omega}{2}\sigma\alpha^2\right)^2\alpha+\frac{3\omega^2\sigma^2}{8}\alpha^5=2i\omega\frac{\partial\alpha}{\partial t_2}-\left(2\omega\frac{\partial q}{\partial t_2}+\frac{15\omega^2\sigma^2}{8}\alpha^4\right)\alpha=0$$

が得られる。この式が成立するためには実部と虚部がともにゼロでなければならないので

$$\left.\begin{array}{llll}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t_1}=0 & \longrightarrow & \alpha=\text{const}, & \alpha=\alpha_3(t_3,t_4,\cdots)\\ \dfrac{\partial q}{\partial t_2}=-\dfrac{15}{16}\omega\sigma^2\alpha^4 & \longrightarrow & q=-\dfrac{15}{16}\omega\sigma^2\alpha^4t_2+\phi, & \phi=\phi_3(t_3,t_4,\cdots)\end{array}\right\} \tag{7.65}$$

これから振幅 a は

$$\boxed{a=\alpha e^{i\rho}=\alpha\exp\left\{i\left(\frac{3}{2}\omega\sigma\alpha^2t_1-\frac{15}{16}\omega\sigma^2\alpha^4t_2+\phi\right)\right\}=\alpha\exp\left\{i\omega t\left(\epsilon\frac{3}{2}\sigma\alpha^2-\epsilon^2\frac{15}{16}\sigma^2\alpha^4\right)+i\phi\right\}} \tag{7.66}$$

と得られる。α,ϕ は $t_3,t_4,\cdots$ の関数ということだね。

（7.62）に戻って擬似共鳴項を消去した式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_0^2}+\omega^2x_2&=-\frac{3i\omega}{4}\sigma\frac{\partial a^3}{\partial t_1}e^{i3\omega t_0}-\frac{3\omega^2\sigma^2}{8}(a^5e^{i5\omega t_0}+2a^4a^*e^{i3\omega t_0})+c.c\\ &=\frac{27\omega^2\sigma^2}{8}a^4a^*e^{i3\omega t_0}-\frac{3\omega^2\sigma^2}{8}(a^5e^{i5\omega t_0}+2a^4a^*e^{i3\omega t_0})+c.c\\ &=-\frac{3\omega^2\sigma^2}{8}(a^5e^{i5\omega t_0}-7a^4a^*e^{i3\omega t_0})+c.c\end{aligned} \tag{7.67}$$

この方程式の特解（非同次解）は例の「解の公式」を使い，面倒な計算をミスなくやると (笑い)

$$\boxed{x_2=\frac{\sigma^2}{64}(a^5e^{i5\omega t}-21a^4a^*e^{i3\omega t})+c.c,\quad (t_0=t)} \tag{7.68}$$

が得られる。これが **3 次の近似解**だね。その気があればこの計算をフォローして頂戴。

ということで，求める解 $x(t)$ は $x(t)=x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2x_2+\cdots$ であるから，いままでの計算結果をまとめ，3 次近似までとると

$$\boxed{x(t)=ae^{i\omega t}+\epsilon\frac{\sigma}{8}a^3e^{i3\omega t}+\epsilon^2\frac{\sigma^2}{64}(a^5e^{i5\omega t}-21a^4a^*e^{i3\omega t})+c.c} \tag{7.69}$$

が得られる。振幅 a は（7.66）より

$$a = \alpha \exp\left\{ i\omega t \left(\epsilon \frac{3}{2}\sigma\alpha^2 - \epsilon^2 \frac{15}{16}\sigma^2\alpha^4 \right) + i\phi \right\}$$

したがって

$$\boxed{ae^{i\omega t} = \alpha \exp\left\{ i\omega t \left(1 + \epsilon \frac{3}{2}\sigma\alpha^2 - \epsilon^2 \frac{15}{16}\sigma^2\alpha^4 \right) + i\phi \right\}} \tag{7.70}$$

だね。ところでこの系の周期 T だけど $O(\epsilon^2)$ までを考慮し，$\beta = \epsilon\sigma$，$\alpha = a_0$（初期振幅）とおいて

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \epsilon \frac{3}{2}\sigma\alpha^2 - \epsilon^2 \frac{15}{16}\sigma^2\alpha^4 \right)^{-1} \simeq \frac{2\pi}{\omega}\left(1 - \frac{3}{2}a_0^2\beta + \frac{15}{16}a_0^4\beta^2 \right)} \tag{7.71}$$

と得られるということだな。（語気を強めて）以上 !!

- 全員：ありがとうございました，大変お疲れ様でした〜。
- コニー：いろいろな近似法で得られた近似解を比較するのは大事なことね。
- K氏：そうなんだ。それぞれ近似の仕方に特長があるからね。厳密解がわからないときは，当たり前だけど測定結果を再現する近似法がよい近似法ということになるんだね。ところで，いまの話にあった近似解の比較は大事なテーマでこれは君たちの課題としておきたい。じっくり時間をかけてフォローして欲しいな。
- ユナ：ところでアリス，この回が終わったら全員で居酒屋に行くことになっていたけど，手配の方は大丈夫?
- アリス：もちろん手抜かりはないわ。キャサリンの分も入れて 5 人分予約済みよ。
- K氏：（ニタニタしながら）うれしいネェ〜，ちょうど外も暗くなってきたからころあいだ。それでは全員で参りましょうか。
- キャサリン：飛び入り参加だったけどさすがにアリスね。
- コニー：ちょっとその前に，4 回目で非線形振動のお話は終わりということだけど，K さん，なにか心残りはないかしら。もう少しあの話にふれておきたかったとか。
- K氏：う〜っん，鋭い突込みだね（笑い）。。。いや，実は「パラメーター励起」の話も考えていたんだけど，気持ちが曖昧になってしまってね。
- ユナ：そういうことなら是非とも番外編ということで，別途日を設定してお願いできないかしら。
- アリス：わたしもお願いするわ。
- K氏：みなさん，熱心ですねぇ〜。そこまで言われるなら番外編を考えておきましょッ。ところでさっきからノドがゴロゴロ鳴っているなだけど。
- コニー：さぁ，それでは居酒屋に向かいましょうか。初秋の夜長を一献傾けながら全員で盛り上がりましょう !!

（了）

またお会いできる機会を楽しみに,,,

GOOD LUCK !
SEE YOU AGAIN !