非線形振動（その５：番外編）

KENZOU

2008 年 10 月 25 日

♣ 風も少し冷たく，そろそろ紅葉前線が気になる初秋のある日，前回の 4 人にエミリーが加わった 5 人がわいわいがやがや喋りながら，たて一文字になったり，横一文字になったりしつつ，早朝の行き交いながら一路Ｋ氏宅へ向かっていた。

- コニー・ユナ・アリス・キャサリン・エミリー：おはようございま〜す。
- Ｋ氏：おはよう〜。。。Oh！(目を剥いて）なんとフルキャストの登場だね。そういえばエミリー, この前打ち上げと称して我々5 人が飲みに行った居酒屋で偶然あったね。彼氏と楽しくジョッキを傾けていたけど，デートだったのかい。わざわざ我々の方に顔をだしてくれたけど，えらい気をつかわせたね。
- エミリー：いえ，あの時は失礼しました。びっくりしたわ，みんながぞろぞろ入ってくるので。ちょっと彼に失礼して皆の輪の中に入れてもらったの。Ｋさんが非線形振動の話をしているというのはコニーから聞いていたわ，ただデートに忙しいこともあるけど (笑い)，なかなか時間がとれなくて。。。でもちゃんとコニーのノートをコピーして一応のフォローはしてみたわ。今回番外編をやるということで，それは是非聞こうとその時思ったの。
- Ｋ氏：デートに忙しいのは大いに結構だ。これは皮肉じゃないよ。勉強ばかりじゃ頭がサチッてしまうもの。まっ，それはともかく，今日は 4 回目の時に約束した**「パラメータ励起振動」**ということで，これは非線形振動の範疇には入らないけどやろうと 。。。これも例によって近似解を求めていくわけだね。そこで近似解を求める手法として多時間尺度法とは別の**「平均法」**というのを簡単に紹介して，それから「パラメーター励起振動」の話に入っていこうと思うんだ。
- ユナ：平均法というのは 3 回目のお話のときにすこし仰っていたわね。
- Ｋ氏：うん，先人の努力のお陰でいろんな方法が開発されているんだね。ただ，ここでの平均法は第 1 近似まで有効な **Krylov-Bogoliubov（クルイロフ-ボゴリューボフ）の方法**と呼ばれるもので，これを拡張したより高次の近似を求める方法は都合によりカットする（笑い)。
- アリス：どんな内容か楽しみね。
- コニー：それじゃＫさん，そろそろお願いできるかしら。
- Ｋ氏：OK！今日は秋晴れの好天気だ，気持ちがいいのでピッチを上げてやっていこうか。
- 全員：よろしく〜。

8　非線形振動（５話目：番外編）

8.1　非同次線形微分方程式の解法（定数変化法）

- Ｋ氏：ここでは非同次線形微分方程式を解く羽目になるので，本論に入る前にその解法としての一般的な**定数変化法**を紹介しておこう。微分方程式の復習みたいだけどウンザリしないで一応聞いておいて。
- ユナ：$Welcome$ よ。微分方程式の解法もずいぶん忘れていることが多いから，よろしくお願いします。
- Ｋ氏：(それではと少し力みながら。。。）2 階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{8.1}$$

とそれに対応する同次方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{8.2}$$

を考える。いま，同次方程式の基本解を $y_1(x)$, $y_2(x)$ とすると，この一般解は

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \tag{8.3}$$

と書けるね。C_1, C_2 は任意定数だ。そこで，C_1, C_2 を x の関数 $C_1(x), C_2(x)$ で置き換えた（←これが定数変化法のネーミングの由来）

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{8.4}$$

が非同次方程式（8.1）の解になるように $C_1(x), C_2(x)$ をうまく見つけていくんだね。この方法を**定数変化法**と呼んでいる。（8.4）の両辺を x で微分すると

$$y' = (C_1y_1 + C_2y_2)' = (C_1'y_1 + C_2'y_2) + (C_1y_1' + C_2y_2') \tag{8.5}$$

となる。そして，

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \tag{8.6}$$

という条件を付加すると

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' \tag{8.7}$$

が得られる。これをもう 1 回 x で微分すると

$$y'' = (C_1'y_1' + C_2'y_2') + (C_1y'' + C_2y'') \tag{8.8}$$

（8.7）と（8.8）をターゲットの方程式（8.1）に入れると

$$\begin{gathered}(C_1y'' + C_2y'') + (C_1'y_1' + C_2'y_2') + P(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + Q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = R(x) \\ \therefore\ C_1\{y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\} + C_2\{y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\} + C_1'y_1' + C_2'y_2' = R(x)\end{gathered} \tag{8.9}$$

ところで $y_1(x), y_2(x)$ は，同次方程式（8.2）の解だったから

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

が成り立つ。これを（8.9）に入れると

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = R(x) \tag{8.10}$$

が得られる。この式と（8.5）との連立方程式

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = R(x) \end{cases} \tag{8.11}$$

を解けばうまい具合に $C_1'(x), C_2'(x)$ が求められることになるね。$C_1'(x), C_2'(x)$ は**クラメルの公式**より

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{-y_2R}{W(y_1,\, y_2)} \\ \\ C_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{y_1R}{W(y_1,\, y_2)}, \quad \text{（ただし，}W(y_1,\, y_2) \neq 0\text{）} \end{cases} \tag{8.12}$$

となる。$W(y_1,\, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1'$ はロンスキアンと呼ばれるものだね。$y_1,\, y_2$ は $W \neq 0$ を満たす解であることに注意が必要だ。C_1, C_2 はこれを x で積分して

$$C_1 = \int \frac{y_2R}{W(y_1, y_2)}dx, \quad C_2 = \int \frac{y_1R}{W(y_1, y_2)}dx \tag{8.13}$$

したがって，非同次方程式の特殊解（8.4）は

$$\boxed{y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = y_1(x)\int \frac{y_2 R}{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1 R}{W(y_1, y_2)}dx} \tag{8.14}$$

となるわけだ。<u>非同次方程式の一般解は，いま得られた特殊解（8.13）と同次方程式の一般解（8.3）の和</u>で表される。以上が定数変化法の内容だね。

それでは早速のの解法を使って具体的な問題を解いてみよう。このシリーズの話では強制振動の話はカットしていたので，定数変化法の適用例としてこの方程式を解いてみることにしよう。ターゲットの方程式を

$$\boxed{\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t)} \tag{8.15}$$

とする。ちょっと余談だがこの方程式には t が陽に含まれているね（外力 $F(t)$：<u>加振力</u>)。このような系を**非オートノマス系**（`autonmoumous system`）と呼んでいる。また，**加振力** $F(t) = 0$ の自由振動系の場合は**オートノマス系**と呼んでいる。オートノマスとは「自律的な」という意味なんだね。加振力 $F(t)$ で振動が起こる場合は自律的振動でないという意味で非オートノマスと憶えておけば間違いない。さて，余談はそれくらいにしてコニーひとつ解いてみるかい？

- コニー：はい，まず同次方程式を

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{8.16}$$

とおくわね。そしてこの一般解を

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \tag{8.17}$$

とするわ。そして非同次方程式の特解を

$$x = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) \tag{8.18}$$

とする。ロンスキアンを計算すると

$$W = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 \tag{8.19}$$

以下，$W \neq 0$ と仮定して $R = F(t)/m$ だから $C_1(t), C_2(t)$ は（8.13）より

$$C_1(t) = -\frac{1}{m}\int^t \frac{x_2(\tau)F(\tau)}{W}d\tau, \quad C_2(t) = \frac{1}{m}\int^t \frac{x_1(\tau)F(\tau)}{W}d\tau \tag{8.20}$$

したがって非同次方程式の一般解は C_1, C_2 を任意の定数として

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) - \frac{x_1(t)}{m}\int^t \frac{x_2(\tau)F(\tau)}{W}d\tau + \frac{x_2(t)}{m}\int^t \frac{x_1(\tau)F(\tau)}{W}d\tau, \tag{8.21}$$

と得られるわ。

- K 氏：そうだね。それじゃ次に，速さに比例する抵抗がない場合，つまり $k = 0$ の場合を具体的に解いてみよう。エミリー，どうかな？

- エミリー：はい，この場合のターゲット方程式と同次方程式は

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t), \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \tag{8.22}$$

同次方程式の一般解は

$$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t \tag{8.23}$$

で，ロンスキアン W は

$$W = \cos\omega_0 t(\sin\omega_0 t)' - \sin\omega_0 t(\cos\omega_0 t)' = \omega_0\cos^2\omega_0 t + \omega_0\sin^2\omega_0 t = \omega_0 \neq 0$$

したがって，積分パラメータの t と被積分関数の t を区別するために t を τ と書いて，C_1, C_2 は（8.20）より，

$$C_1(t) = -\frac{1}{m\omega_0}\int^t \sin\omega_0\tau F(\tau)d\tau, \quad C_2(t) = \frac{1}{m\omega_0}\int^t \cos\omega_0\tau F(\tau)d\tau$$

だから一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t - \frac{\cos\omega_0 t}{m\omega_0}\int^t \sin\omega_0\tau F(\tau)d\tau + \frac{\sin\omega_0 t}{m\omega_0}\int^t \cos\omega_0\tau F(\tau)d\tau \\ &= C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0}\int^t F(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{8.24}$$

と得られるわ。いま，具体的に加振力を $F(t) = F\cos\omega t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int^t F(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)d\tau = F\int^t &\cos\omega\tau\sin\omega_0(t-\tau)d\tau \\ &= \left[\frac{\cos\{\omega_0 t + (\omega-\omega_0)\tau\}}{2(\omega_0-\omega)} + \frac{\cos\{\omega_0 t - (\omega+\omega_0)\tau\}}{2(\omega_0+\omega)}\right]^t \\ &= F\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2} \end{aligned}$$

これから，一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \\ &= A\cos(\omega t+\alpha) + \frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \end{aligned}$$

となるわね。

- K氏：OK！ それじゃ平均法による近似解法に進もう。

8.2　平均法による近似解法（Krylov-Bogoliubov の方法）

- K氏：ターゲットの方程式を適当な技巧を使って次の形の非線形微分方程式にもってこられたとしよう（一般論でわかりにくいかも入れないが，すぐ後で具体な問題に当たるのでそれまで我慢我慢）。ε は微少量を意味する。

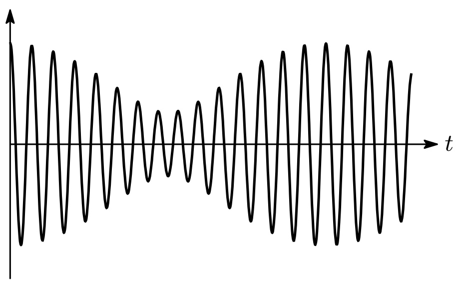
$$\boxed{\dot{x} = \varepsilon f(x,\, t,\, \varepsilon), \quad x(0) = \eta\text{: 初期値}} \tag{8.25}$$

そして f は t に関して周期 T の周期関数とする。

$$f(x, t+T, \varepsilon) = f(x, t, \varepsilon) \tag{8.26}$$

（8.25）を眺めると，x は ε が微小であるのでその振幅は小さく，また解の主要部分はゆっくりした時間変化をするものとみなされる。この系は周期 T の加振力を受けるので，解には周期 T の時間変動成分も含まれるはずである。だから解は周期 T に比べてゆっくり変化する成分と周期 T の小さな振動成分が重ね合わさったものと考えられる。ちょうど周期解が変調されたイメージだね。

$Fig.18$



そこで，解の ゆっくり変化する成分のみを求め，小さな周期の振動成分を時間平均操作で均（なら）して近似解を求めようというのが平均法の狙いなんだ。つまり，(8.25) の解を次の**平均化方程式**

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{f}(x), \quad x(0) = \eta \tag{8.27}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x,t,0)dt \tag{8.28}$$

の解で近似する解法ということになる。この近似の誤差評価が本来は必要なんだけど，ここではそれは高々 $O(\varepsilon)$ オーダであるということに止めておいて，具体的な問題に取り組むことにする。尚，この近似法は最初にいったように非線形項が小さい場合の 第 1 次近似のみを求める方法 だということを注意しておこう。

8.2.1 自由振動の近似解

- K 氏：オートノマス系の運動方程式

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon f(x,\dot{x}) = 0} \tag{8.29}$$

を考えよう。これを (8.25) の形にするために

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \varepsilon f(x,y) \end{cases} \tag{8.30}$$

とおいてやる。$\varepsilon = 0$ とすると $\dot{y} + \omega_0^2 x = 0$ で，この連立微分方程式（←表現が大げさだが）を解いて

$$x = a\cos(\omega_0 t + \phi), \quad y = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{8.31}$$

を得る。定数変化法の処方にしたがって a と ϕ を t の関数とおき（←これは，振幅と位相が時間の関数 であるとするということだね），これを (8.30) に入れると

$$\begin{cases} \dot{a}\cos\theta - a\dot{\phi}\sin\theta = 0, \quad (\theta = \omega_0 t + \phi) \\ -\dot{a}\omega_0 \sin\theta - a\omega_0\dot{\phi}\cos\theta = -\varepsilon f(a\cos\theta, -a\omega_0\sin\theta) \end{cases} \tag{8.32}$$

を得る。これを $\dot{a}$，$\dot{\phi}$ について解くと

$$\left.\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a\cos\theta, -a\omega_0\sin\theta)\sin\theta \\ \dot{\phi} &= \frac{\varepsilon}{a\omega_0} f(a\cos\theta, -a\omega_0\sin\theta)\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

$\dot{a}, \dot{\phi}$ は θ についての周期 2π の周期関数で (8.25) の形をしている。しかし，振幅や位相の変化は 1 周期の間では大きくないとして，それらの値を 1 周期にわたる時間平均値で代用しようというわけで，これが**平均法の近似の根幹**になるわけだね。(8.31) に倣って周期 2π での θ について次の**平均化方程式**を考える。ただし $dt = (1/\omega_0)d\theta$ であることに注意して

$$\dot{a} = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{a}dt = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\cos\theta, -a\omega_0\sin\theta)\sin\theta d\theta \tag{8.34}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{\phi}dt = \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\cos\theta, -a\omega_0\sin\theta)\cos\theta d\theta \tag{8.35}$$

θ で積分しているので上式の右辺はいずれも a だけの関数になり，(8.34) を解いて a が求まり，それを (8.35) に入れて ϕ が求まる。以上の方法は，**「Krylov-Bogoliubov の平均法」**とか，振幅と位相の変化が緩やかであることを利用（仮定）しているため，**「位相振幅徐変化法」**とも呼ばれている。

さて，具体的な問題に適用していこうか。

- コニー：そうね，一般論だけではいまいち理解しにくいものね。

8.2.2 ダフィング方程式の近似解

- K氏：ダフィング振動系の自由振動

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2(x+\epsilon\beta x^3)=0,\quad \text{初期条件：}x(0)=x_0,\,\dot{x}(0)=v_0} \tag{8.36}$$

を平均法で解いてみよう。キャサリンやってみるかい？

- キャサリン：はい，まずターゲットの方程式を次の連立微分方程式に書き換えて

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-\omega_0^2 x-\varepsilon\beta\omega_0^2 x^3 \end{cases} \tag{8.37}$$

ここで $\varepsilon=0$ とおいて連立微分方程式の解は

$$x=a\cos(\omega_0 t+\phi),\quad y=-a\omega_0\sin(\omega_0 t+\phi) \tag{8.38}$$

ここで振幅 a，位相 ϕ は時間の関数とするわけね。$\theta=\omega_0 t+\phi$ として，(8.37) に入れて

$$\left.\begin{aligned} &\dot{a}\cos\theta-a(\omega_0+\dot{\phi})\sin\theta=-a\omega_0\sin\theta\longrightarrow\dot{a}\cos\theta-a\dot{\phi}\sin\theta=0 \\ &-\dot{a}\omega_0\sin\theta-a\omega_0(\omega_0+\dot{\phi})\cos\theta=-a\omega_0^2\cos\theta-\varepsilon\beta a^3\omega_0^2\cos^3\theta \\ &\qquad\qquad\longrightarrow\dot{a}\sin\theta+a\dot{\phi}\cos\theta=\varepsilon\beta a^3\omega_0\cos^3\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

これから $\dot{a},\dot{\phi}$ を求めると

$$\left.\begin{aligned} \dot{a}&=\epsilon\beta a^3\omega_0\cos^3\theta\sin\theta \\ \dot{\phi}&=\varepsilon\beta a^2\omega_0\cos^4\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.40}$$

ここで得られた振幅，位相の時間微分値を 1 周期（$T=2\pi/\omega_0$）の平均値で代用するので，`Mathematica` の積分サービス `http://integrals.wolfram.com/index.jsp` を利用して積分を実行すると

$$\dot{a}=\frac{\omega_0}{T}\int_0^{2\pi}\dot{a}dt=\frac{\omega_0}{2\pi}\varepsilon\beta a^3\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\sin\theta d\theta=\frac{\omega_0}{2\pi}\varepsilon\beta a^3\left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_0^{2\pi}=0 \tag{8.41}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}&=\frac{\omega_0}{T}\int_0^{2\pi}\dot{\phi}dt=\frac{\omega_0}{2\pi}\varepsilon\beta a^2\int_0^{2\pi}\cos^4\theta=\frac{\omega_0}{2\pi}\varepsilon\beta a^2\left[\frac{1}{32}(12\theta+8\sin 2\theta+\sin 4\theta)\right]_0^{2\pi} \\ &=\frac{3\varepsilon\beta\omega_0}{8}a^2 \end{aligned} \tag{8.42}$$

あとはこの微分方程式を解くわけだけど，振幅と位相の初期値をそれぞれ a_0, ϕ_0 とすると

$$\begin{cases} a=a_0 \\ \phi=\dfrac{3\varepsilon\beta\omega_0}{8}a^2 t+\phi_0 \end{cases} \tag{8.43}$$

が得られる。したがって求める解は

$$x=a\cos(\omega_0 t+\phi)=a_0\cos\left\{\omega_0\left(1+\frac{3\varepsilon\beta\omega_0}{8}a_0^2\right)t+\phi_0\right\} \tag{8.44}$$

となるわけね。

- K氏：そうだね。計算はマニュアルどおりにやれば面倒だけど特に難しいことはないと思う。大事なのは振幅と位相の時間微分値を 1 周期の平均値で置き換えてしまうというイメージ力かな。。。
OK，それじゃもう一つファンデルポールの方程式を平均法で解いてみよう。アリスどうだい？

- アリス：はい，それではターゲットの方程式を

$$\boxed{\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+\omega_0^2 x=0} \tag{8.45}$$

とします。そして次のようにおいて微分の階数を減らします。

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \varepsilon(x^2 - 1)y \end{cases} \tag{8.46}$$

ここで $\varepsilon = 0$ とおいて連立微分方程式の解は

$$x = a\cos(\omega_0 t + \phi), \quad y = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{8.47}$$

ここで振幅 a，位相 ϕ は時間の関数と考え，$\theta = \omega_0 t + \phi$ として, (8.46）に入れて

$$\left.\begin{aligned} &\dot{a}\cos\theta - a\dot{\phi}\sin\theta = 0 \\ &\dot{a}\sin\theta + a\dot{\phi}\cos\theta = \varepsilon a(1 - a^2\cos^2\theta)\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.48}$$

この連立方程式をといて $\dot{a}, \dot{\phi}$ を求めると

$$\left.\begin{aligned} &\dot{a} = \varepsilon a(1 - a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta \\ &\dot{\phi} = \varepsilon(1 - a^2\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.49}$$

振幅, 位相に平均法の近似を行うと Mathematica の積分サービス http://integrals.wolfram.com/index.jsp を利用して

$$\dot{a} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \dot{a}dt = \frac{1}{2\pi}\varepsilon a \int_0^{2\pi} (1 - a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta d\theta \tag{8.50}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\varepsilon a \left[-\frac{a^2\theta}{8} + \frac{a^2}{32}\sin 4\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{\varepsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \tag{8.51}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \dot{\phi}dt = \frac{1}{2\pi}\varepsilon \int_0^{2\pi} (1 - a^2\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\varepsilon a \left[\frac{1}{4}\cos^2\theta(a^2\cos^2\theta - 2) \right]_0^{2\pi} = 0 \tag{8.52}$$

となるわ。振幅と位相の初期値をそれぞれ a_0, ϕ_0 とすると，先ず

$$\phi = \phi_0 \tag{8.53}$$

はすぐ得られる。問題は

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \tag{8.54}$$

で，この微分方程式を解かねばならないわね。簡単化のために $\varepsilon/2 = \beta$ とおいて積分を実行していくと

$$\int_{a_0}^{a} \frac{1}{\beta a(1 - a^2/4)} da = \int_0^t dt \longrightarrow \frac{1}{\beta}\left[\ln a - \frac{1}{2}\ln(a^2 - 4) \right]_{a_0}^{a} = t$$

$$\longrightarrow \frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{a^2 - 4}{a_0^2 - 4}}\, e^{\beta t} \longrightarrow a^2 = \frac{a_0^2 e^{\varepsilon t}}{1 + \frac{a_0^2}{4}(e^{\varepsilon t} - 1)}$$

$$\therefore \qquad a = \frac{a_0 e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0^2}{4}\right)(e^{\varepsilon t} - 1)}}$$

したがって求める解は

$$x = a\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{a_0 e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0^2}{4}\right)(e^{\varepsilon t} - 1)}} \cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{8.55}$$

となるわ。

- K氏：OK！ お疲れさま。ところで，第 3 回目の話しでファンデルポールの式 $\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0$ を**多時間尺度法**で解いて近似解

$$a=\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{a_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}}}\cos(t+\phi_0) \tag{8.56}$$

を得たよね。この近似解とキャサリンが得た近似解は似ているようで微妙に違うように見えるけど，ユナこの辺りを検討してくれるかい。

- ユナ：わかりました。問題は振幅部が一致するのかどうかということね。多時間尺度法の近似解の振幅部だけを取りだして変形していくと ....

$$\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{a_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}}}=\frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2+(4-a_o^2)e^{-\varepsilon t}}}=\frac{2a_0e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{4+a_0^2(e^{\varepsilon t}-1)}}=\frac{a_0e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0}{4}\right)^2(e^{\varepsilon t}-1)}}$$

となって，先ほどアリスが導出した近似解と見事に一致するわ !!

- コニー：なるほどねぇ〜，近似のアプローチのスタンスはそれぞれ異なるけど 1 次近似解は両方の方法とも同じ近似解を与えるのね。

- エミリー：う〜ん，いろいろ考えさせられるわねぇ〜。

- K氏：(その話題に深入りしたくないような雰囲気で）そうだね。その辺りは君等の課題としておこう（汗；)。

  さて，4 回目の終わりに「パラメータ励起」の話を約束していたけど，そろそろその話に入ろうか。

- コニー：番外編本論というところね。

8.3 パラメーター励起振動

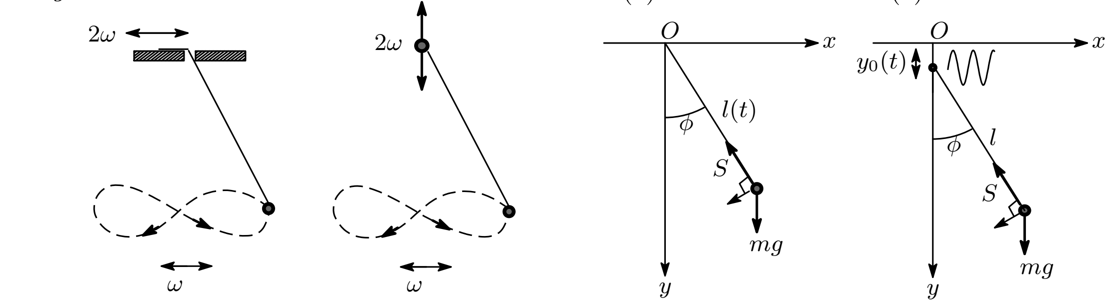
- K氏：**パラメーター励起**は**パラメトリック励起**ともいわれるけど，身近な例でいえばぶらんこの立ち漕ぎだ。ぶらんこに乗って立ったりしゃがんだりして振れを大きくしていくだろう。これは周期的に重心を上下させて振幅を大きくしている。外部の加振力を加えなくても，重心の位置をパラメータとして振動を成長（励起）させいるんだね。また，重力加速度などのパラメーターが周期的に変化することでも振動は励起される。このようなことからこれらの振動をパラメーター励起と呼んでいるんだ。

- コニー：重力加速度のパラメータを周期的に変化させるとはどういうこと？

- K氏：それは例えば高速エレベーターに乗ったとき，急上昇している場合体を重く感じるし，急降下しているときはその反対に軽く感じるだろう。いってみればそういう意味なんだが，具体的にはあとででてくるからそれまで待ってて。

- コニー：わかりました。

*Fig.*19



糸の長さを振り子の周期の半分の周期で変化させると振幅は次第に大きくなる。

支点上下の周期的変化も同様に振り子の振幅を大きくさせる。

8.3.1 糸の長さが周期的に変化する場合

- K氏：さて，Fig.19 の (1) に示すような糸の長さ l を変化させる振り子の運動を考えよう。この場合，糸の長さが長くなったり短くなったりしながら支点のまわりに振れるので，運動方程式は回転運動を与える力のモーメントの方程式を考える。支点 O に関するおもりの角運動量は $ml^2\dot{\phi}$ で，力のモーメントは空気抵抗も支点での摩擦抵抗もなしとすると $-mgl\sin\phi$。力学で勉強したように角運動量の時間微分は力のモーメントに等しいから，おもりの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\phi}) = -mgl\sin\phi \tag{8.57}$$

となる。いま糸の長さ l も時間変化するので上式左辺の時間微分を実行すると

$$2ml\,\dot{l}\,\dot{\phi} + ml^2\ddot{\phi} = -mgl\sin\phi$$

$$\therefore\ \ \ddot{\phi} + \frac{2}{l}\dot{l}\,\dot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{8.58}$$

となる。ところで，ブランコの場合，ブランコの鎖を長くしたり短くしたりは簡単にできないよね。とするといまの振り子のケースはブランコに適用できない？と思ったかもしれないけど，実はブランコに乗る人が立ったりしゃがんだりして重心を移動させるだろう。この重心移動によって変化するものとして $l(t)$ を考えればブランコのケースに適用できるというわけだね。

- エミリー：ということは振動系のおもりの実質的な位置，つまり重力が一点に作用する位置，それが重心移動によって変化する，つまりブランコの長さ l が時間的に変化することと同等ということなのね。

- K氏：そうなんだ。ブランコに乗って立ったりしゃがんだりして漕いで振れをぐんぐん大きくしていくだろう。これが**パラメータ励起**と呼ばれるもんなんだが，この立ったりしゃがんだりは周期的にやっている。この周期がブランコの周期の 1/2 という関係にあるんだね。詳しいことはあとで触れるので，ここではこれくらいにしてと。。。

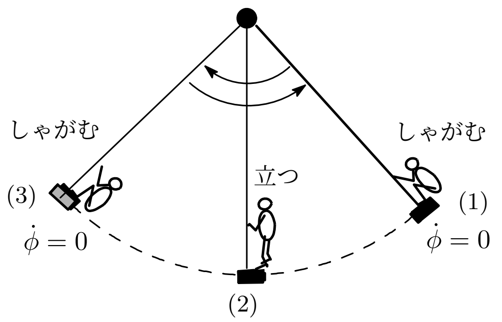
さて，方程式（8.58）は，細かい点は別にして，形として速度に比例した抵抗を受ける振動系の方程式

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

と同じ形だね。周知のように γ は減衰係数と呼ばれるものだが，$\gamma > 0$ なら通常の減衰振動を表すが，γ が**負抵抗**として働けば第 3 回目で話した**自励振動**となり，振動が成長する。ということで（8.58）の左辺 2 項目の $\dot{\phi}$ の係数 $(2/l)\dot{l}$ は正にも負にもなりえてその時間変化が重要だ。

(8.58) の係数 $(2/l)\dot{l}$ を γ とおくと，$\gamma < 0$ の場合，アリスが第 3 話で整理してくれた減衰振動の解 (6.8) を利用して書くと $\phi(t) = Ae^{|\gamma|}t(\omega' + \alpha)$ と表され，振幅はどんどん大きくなることがわかる。つまり振幅を増大させるには振り子の糸の長さを短くしていけばよい（$\dot{l} < 0$）。これは経験的に知っていることで，ブランコの場合には乗り手が立って重心の位置を高く上げれていることに相当する。しかし背の高さは決まっているのでずっと上げっぱなしというわけにはいかない。そこでしゃがんで重心を下げるわけだが下手にしゃがむとブランコにブレーキがかかって減衰してしまう。これも経験的にしゃがみこむタイミングはわかっているんだね。

$Fig.20$



＜ブランコを大きく揺らす秘訣＞

・ブランコの周期：ω

・立つ・しゃがむ周期：2ω

(1), (3)　$\dot{\phi} = 0$ の瞬間しゃがむと重心が下がり実効的な l が伸びるので $\dot{l} > 0$

(1) → (2)　$\dot{\phi} \neq 0,\ \dot{l} < 0$

(2) → (3)　$\dot{\phi} \neq 0,\ \dot{l} > 0$

(3) → (2)　$\dot{\phi} \neq 0,\ \dot{l} < 0$

(2) → (1)　$\dot{\phi} \neq 0,\ \dot{l} > 0$

理屈的には，しゃがむタイミングは $\dot{l}=0$ のときで，このときには l の時間変化は運動に影響を与えない。つまり，$\dot{\phi}=0$ のときに $\dot{l}>0$（しゃがむ）として，$\dot{\phi}\neq 0$ のときに $\dot{l}<0$（立つ）とすれば，振幅は増大し続けることになる。ところで実際はそんなデルタ関数的 (?) に立ったりしゃがんだりできるわわけがないので（笑い），乗っている人はブランコが後ろへ振れた位置から最下点にくるまでの間にしゃがみ，ブランコが最下点に達しそれから前方へ最も大きく振れるまでの間に立ってるね。つまりブランコが 1 往復する間に乗っている人は重心を 2 回上下させることでブランコの振れを大きくさせている。以上が**ブランコの原理**ということだ。いつか公園でブランコに乗ったとき，この理屈を思い受けべるとさらに楽しくなるかも（笑い）。

- ユナ：え〜っと，自励振動の場合には 負抵抗による仕事が励起のエネルギー となっていたわね。ブランコの場合，エネルギー源はどうなるのかしら？
- キャサリン：そうね，重力場は保存力場だから，地面に立ってしゃがんで元の位置の戻れば，体感的には疲れるけど，物理的にはその間にやった仕事はゼロね。。。ポイントは揺れるブランコの上で立ったしゃがんだりしていることと思うのだけど，うまく説明できないわ。
- ユナ：う〜ん，自励振動の場合，負抵抗力は保存力ではなかった。。。
- コニー：地面に立っているとき，作用する力は重力だけよね。これはキャサリンのいうように保存力。だけどブランコに乗っているときは遠心力が働くわ。遠心力は $ml\dot{\phi}^2$ で $\dot{\phi}$ が大きいとき大きいし，$\dot{\phi}$ が小さい場合は遠心力も小さいわね。ブランコを振らすのに遠心力が大きいときに立ち，小さいときにしゃがむからその間に成した仕事はゼロでなく，おつりがでるわね。そのおつりがブランコのエネルギー源になっていると思うの。
- ユナ：なるほど，ブランコはそのエネルギーを吸収して振幅を大きくしていくというわけね。
- K氏：そういうことだね。のちほどこの辺の話にもにも触れよう。
  さて，話を元に戻して，振り子の振幅が大きくなると取り扱いが厄介になるので，振幅があまり大きくない範囲を考えよう。そうすると $\sin\phi\simeq\phi$，$x=l\sin\phi\simeq l\phi$ とおけるので（8.58）は

$$\ddot{x}+\frac{1}{l}\left(g-\ddot{l}\right)x=0 \tag{8.59}$$

と書ける。ここで振り子の糸の長さ l が

$$l(t)=l_0+\alpha\sin 2\omega t,\quad (l_0,\,\alpha\text{: 正の定数},\,l_0\gg\alpha) \tag{8.60}$$

のように周期的に変化する場合を考える。l の 2 階微分をとると

$$\ddot{l}=-4\alpha\omega^2\sin 2\omega t \tag{8.61}$$

なので，これを（8.59）に入れると

$$\ddot{x}+\frac{1}{l_0\left(1+\frac{\alpha}{l_0}\sin 2\omega t\right)}(g+4\alpha\omega^2\sin 2\omega t)x\simeq\ddot{x}+\left\{\frac{g}{l_0}+4\omega^2\left(\frac{\alpha}{l_0}\right)\sin 2\omega t\right\}x$$

ここで左辺 2 項目の分母の α/l_0 の項は微小量なので無視する。さらに $g/l=\omega_0^2$ とおいて整理すると

$$\ddot{x}+\left\{\frac{g}{l_0}+4\omega^2\left(\frac{\alpha}{l_0}\right)\sin 2\omega t\right\}x=\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{x}+(1+4\varepsilon\sin 2\omega t)x=0,\quad \varepsilon=\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\frac{\alpha}{l_0} \tag{8.62}$$

となる。ここで $\omega_0 t$ を改めて t とおくと

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2}{dt^2}=\frac{d^2}{d(\omega_0 t)^2}\equiv\frac{d^2}{dt^2}$$

とおけるので,（8.62）は

$$\boxed{\ddot{x}+(1+4\varepsilon\sin 2\omega t\,)x=0} \tag{8.63}$$

となる[1]。この方程式はパラメーター励起の典型的なもので，**マシュー（Mathieu）の方程式**と呼ばれる。

[1] 左辺の ω は本来は $(\omega/\omega_0)t$ と書くべきであるが，それを改めて ω と書くことにする。

8.3.2 振り子の支点が上下に変化する場合

- K氏：次に，Fig.19 の (2) に示すように振り子の支点を上下に動かす場合を考えよう。このケースが重力加速度を周期的に変化させる というのに相当する。支点の座標を $y_0(t)$，糸の張力を S とすると運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -S\frac{x}{l} \\ m\ddot{y} &= mg - S\frac{y-y_0}{l} \end{aligned}\right\} \tag{8.64}$$

と書ける。糸の長さは一定だから，$x^2+(y-y_0)^2=l^2$ で，$x \ll y,\, y_0 \ll y$ とすると $y-y_0 \simeq l$ とおけるから（8.64）は

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -S\frac{x}{l} \\ m\ddot{y} &= m\ddot{y}_0 = mg - S \end{aligned}\right\} \tag{8.65}$$

となり，この式から S を消去して

$$\ddot{x} + \frac{1}{l}\left(g-\ddot{y}_0\right)x = 0 \tag{8.66}$$

が得られる。$\ddot{y}_0 \neq 0$ なら，つまり 振り子の支点が加速度運動をしていれば，これは重力加速度が $g-\ddot{y}_0$ にしたがって変化することと同等ということになる。具体的に y_0 の時間変化として

$$y_0 = \alpha \sin 2\omega t, \quad (\alpha\text{: 正の定数}, l \gg \alpha) \tag{8.67}$$

を考えると，$g/l=\omega_0^2,\, \omega_0 t \equiv t$ として（8.66）は

$$\boxed{\ddot{x} + (1+4\varepsilon\sin 2\omega t\,)x = 0} \quad \varepsilon = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\frac{\alpha}{l} \tag{8.68}$$

となり，**マシュー（Mathieu）の方程式**がでてくる。

- ユナ：どちらの場合もマシューの方程式となるのね。

- K氏：そうだね，だから マシューの方程式はパラメーター励起の最も典型的なもの といわれるんだね。例えば弦の振動で張力 S が時間的に変化している場合もマシューの方程式で記述されるんだ。ちょっとわき道にそれるけど，**「メルデ（Melde）の実験」**[2]というのを簡単に紹介しておこう。x 軸方向に張られた弦の振動の方程式（波動方程式）は周知のように y 軸方向の変位を ψ とすると

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{S}{\sigma}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{8.69}$$

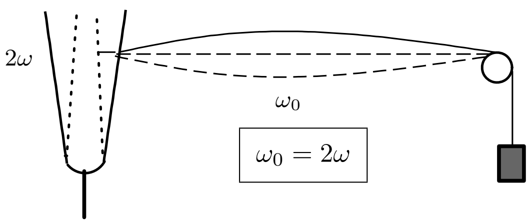
と表される。σ は線密度だね。ここで張力 S が時間的に $S=S_0(1+4\varepsilon\sin 2\omega t)$ と変化しているとすると上の方程式は

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{S_0}{\sigma}(1+4\varepsilon\sin 2\omega t)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

となる。

*Fig.*21

Melde の実験



[2] 1859 年になされた。

弦は両端で固定され，長さを L とすると，$\varepsilon \ll 1$ としてこの解は

$$\psi(x,t) = a(t)\sin\frac{nx}{L} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくことができて，$a(t)$ に関する方程式は

$$\ddot{a}(t) + \omega_0^2\{1 + 4\varepsilon\sin 2\omega t\}a(t) = 0, \quad \omega_0 = \pi v_0/L,\ v_0 = \sqrt{S_0/\sigma} \tag{8.70}$$

が得られる（ω_0：弦の固有振動数，v_0：横波の速度）。これは**マシューの方程式**だね。この方程式の近似解は $\omega = \omega_0$ のとき

$$a(t) = a_1 e^{-\gamma\omega_0 t}\cos\omega_0 t + a_2 e^{\gamma\omega_0 t}\sin\omega_0 t$$

となり，十分時間が経てば左辺第 2 項だけが残り振幅が増大する。このとき弦の振動数 ω_0 は時間変化する張力の振動数 2ω の 1/2 になっている点に注意しよう。Melde の実験では弦の固有振動数が音叉の振動数の 1/2 になるように弦の長さと張力を調整しておけば，弦は振動の 1 周期の間に 2 回引っぱられたり緩められたりするのでパラメーター励起が起こることになる。

8.3.3 マシュー方程式の平均法による近似解

- K氏：さて，ターゲットの方程式を簡単化のために $\omega = 1$ とした

$$\boxed{\ddot{x} + (1 + 4\varepsilon\sin 2t\,)x = 0} \tag{8.71}$$

とする。これから先の話は眉に唾つけて聞いてね（笑い）。

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(1 + 4\varepsilon\sin 2t)\,x \end{array}\right. \tag{8.72}$$

$\varepsilon = 0$ とおいて上の連立微分方程式を解き，振幅と位相を時間の関数とおくんだったね。つまり

$$x = a(t)\cos\theta, \quad y = -a(t)\sin\theta, \quad \theta = t + \phi \tag{8.73}$$

これを（8.72）に入れて整理すると

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{a}\cos\theta - a\dot{\phi}\sin\theta = 0 \\ \dot{a}\sin\theta + a\dot{\phi}\cos\theta = 4\varepsilon a\sin 2t\cos\theta \end{array}\right.$$

これから

$$\left.\begin{array}{l} \dot{a} = 2\varepsilon a\sin 2t\sin 2\theta \\ \dot{\phi} = 4\varepsilon\sin 2t\cos^2\theta \end{array}\right\} \tag{8.74}$$

を得る。これは θ について周期 2π の周期関数であるから，平均法近似を行うと

$$\dot{a} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\dot{a}dt = \frac{2\varepsilon a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2t\sin 2(t+\phi)dt = \varepsilon a\cos 2\phi \tag{8.75}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\dot{\phi}dt = \frac{4\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2t\cos^2(t+\phi)dt = -\varepsilon\sin 2\phi \tag{8.76}$$

を得る。これを解くために次の変数変換を導入する。

$$u = a\cos\phi, \quad v = a\sin\phi$$

この時間微分をとり整理すると

$$\left.\begin{array}{l} \dot{u} = \dot{a}\cos\phi - a\dot{\phi}\sin\phi = \varepsilon u \\ \dot{v} = \dot{a}\sin\phi - a\dot{\phi}\cos\phi = -\varepsilon v \end{array}\right\}$$

を得る。これから

$$u = u_0 e^{\varepsilon t}, \quad v = v_0 e^{-\varepsilon t}, \quad (u_0,\, v_0\text{: 定数})$$

これを

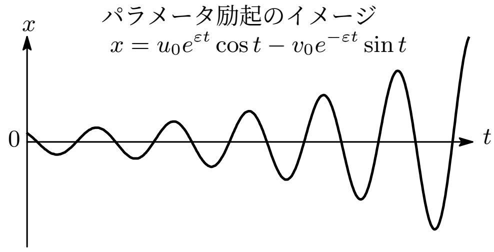
$$x = a\cos(t+\phi) = a\cos\phi\cos t - a\sin\phi\sin t = u\cos t - v\sin t$$

に戻すと，近似解は

$$\boxed{x = u_0 e^{\varepsilon t}\cos t - v_0 e^{-\varepsilon t}\sin t} \tag{8.77}$$

を得る。(8.77) より，時間の経過とともに振幅は次第に増大していくことがわかる[3]。糸の長さや，支点の周期的変化の周期をいま"2"とおいたが，冒頭いったようにその半分の周期"1"が振り子の周期となっている。これが**パラメーター励起振動**である。時間が十分たったとき，振り子の振る舞いは $x = u_0 e^{\varepsilon t}\cos t$ に漸近していく。

*Fig.*22　パラメータ励起のイメージ



さて，1 周期の間の力学的エネルギーの変化を求めてみよう。(8.71) より

$$\ddot{x} + x = -4\varepsilon x \sin 2t \tag{8.78}$$

ここで x は十分時間のたった状態で

$$x = u_0 e^{\varepsilon t}\cos t \tag{8.79}$$

とする。(8.78) の両辺に $\dot{x}$ を掛けると

$$\dot{x}\ddot{x} + x\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2\right) = -4\varepsilon x\dot{x}\sin 2t \tag{8.80}$$

$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2$ は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で系の力学的全エネルギーで，上式の真ん中の項は全力学的エネルギーの時間的変化を表している。

$$\left.\begin{aligned} x &= u_0 e^{\varepsilon t}\cos t \\ \dot{x} &= \varepsilon u_0 e^{\varepsilon t}\cos t - \omega u_0 e^{\varepsilon t}\sin t \end{aligned}\right\} \tag{8.81}$$

で，(8.80) を 1 周期について積分した値を ΔE とすると (8.81) を使って

$$\begin{aligned} \Delta E &= -4\varepsilon \int_0^{2\pi} x\dot{x}\sin 2t dt \\ &= -4\varepsilon^2 {u_0}^2 \int_0^{2\pi} e^{2\varepsilon t}\cos^2 t\sin 2t dt + 2\varepsilon u_0 \int_0^{2\pi} e^{2\varepsilon t}\sin^2 2t dt \end{aligned}$$

左辺第 1 項の積分値は負となる（グラフを描けばすぐわかる）のでマイナス符号と掛け合わせて正となり，結局左辺全体として正で $\Delta E > 0$。つまり，振動系は外部からエネルギーを得ていることがわかる。ブランコで立ったりしゃがんだりしてなされる仕事（エネルギー）がブランコを大きく振らすエネルギー源になっているということだね。尚，この積分を実行すれば ΔE の値が求まるけど，それはここではやりません（笑い）。Mathematica などを使って各自その気があればフォローしてください。

ーーーー　以上で番外編を終わります。ふ〜っ，ピッチを上げすぎて少し疲れた。。。。

[3] 式の上では振幅は発散するが現実には (いろいろな事情により) 一定の有限値に落ち着く。

- 全員：おつかれまさでした〜。
- コニー：いろいろ課題をもらったけど，機会を見つけてフォローしようと思う。。。結構しんどそうだけど（笑い）。
- ユナ：メルデの実験は道具が簡単で，なにか大らかなものを感じるわね。ブーンと弦がなってきたときなんか感動したものよ。
- アリス：平均法の近似解法でダフィング方程式の近似解を計算し，ユナがその結果が多時間尺度法の結果と一致することを確認してくれたとき，すこし感動したわ。
- エミリー：ブランコの原理がよくわかった。人間って無意識的に理論に合った動きをしているのね。なかなか高度なものだと感心したわ（笑い）。
- キャサリン：Krylov-Bogoliubov という名前を聞いて超伝導での Bogoliubov 変換というのが頭をかすめたけど，よくあんな変換を思いつくもんだと思ったわ。Oh! ここでも Bogoliubov 氏かという感じを受けたわ。
- K氏：みなさん，感想はいろいろだね。僕も非線形振動の話を通じていろいろ勉強になったけど，ボロを突かれはしないかとヒヤヒヤしたものさ。まだまだ勉強が足りりがひとまずこの話はここでお開きにしよう。ボロを見つけたときは是非一報欲しいけど，まぁご自分で繕ってください。今日は全員それぞれが用事を抱えているんだろう。それじゃまたの機会にお会いしましょう，お元気でね。
- 全員：ハ〜イ，Kさんもお元気でお過ごしください。それじゃさようなら〜。

（了）

またお会いできる機会を楽しみに,,,

GOOD LUCK！
SEE YOU AGAIN！

・2017.6.16：パレメータ励起振動のブランコの図を修正。　Thank's 村井さま