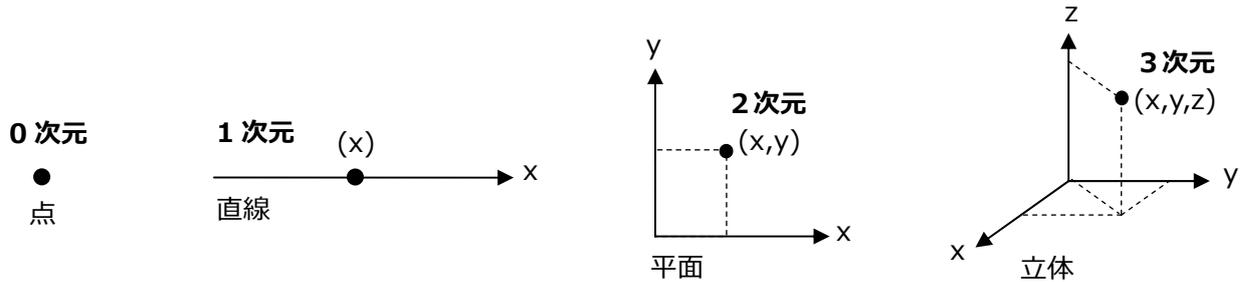


●次元とは何だ！

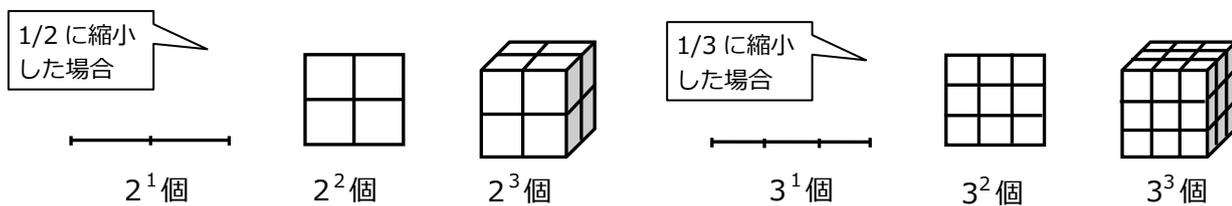
・次元というのは1点の位置を決めるのに必要な変数の数と定義できます。



このような次元を**位相次元**ともいいます。

・次元はまた次のように定義することもできます。

線分、正方形、立方体それぞれの各辺を2等分すると、線分は半分の長さの2 (=2¹) つの線分になり、正方形は1辺をもとの半分の長さとする正方形4 (=2²) 個に、立方体は8(=2³)個になりますね。



2の肩に乗っている数字はそれぞれ1, 2, 3でそれぞれ直線、平面、立体の位相次元と一致します。この事実を拡張して、ある図形を1/aに縮小したとき、元の図形と相似な図形がa^D個できたとしたとき、指数Dは位相次元と一致しますね。このように定義した次元を「**相似次元**」とか「**フラクタル次元**」と呼んでいます。名前の通り、厳密な相似性を有するフラクタル図形だけに定義される次元です。

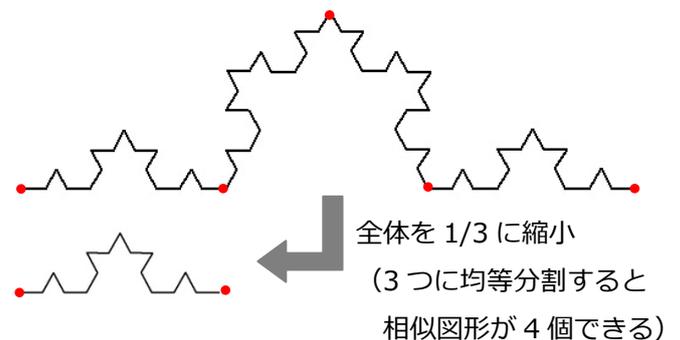
・いま、ある図形が、全体を1/aに縮小した相似図形b個によって表されるとすると、その図形のフラクタル次元Dはb=a^Dより

$$D = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\text{相似な図形の数}}{\text{等分割した数}}$$

と求められます。

・それでは**コッホ図形のフラクタル次元**を求めてみましょう。全体を1/3に縮小した相似形4個で構成されていることがわかります。したがって、コッホ図形のフラクタル次元は

$$D = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.262$$



となり、1次元より少し大きく2次元よりも小さい整数でない**次元 (非整数次元)**となります。

コッホ図形は複雑な形をしています、この複雑さが非整数次元となって表れています。コッホ図形の非整数次元の意味は、

「1次元に近い直線的な性質をもつが、直線のように単純ではなく、2次元の複雑さも少し持っている」ということとなります。

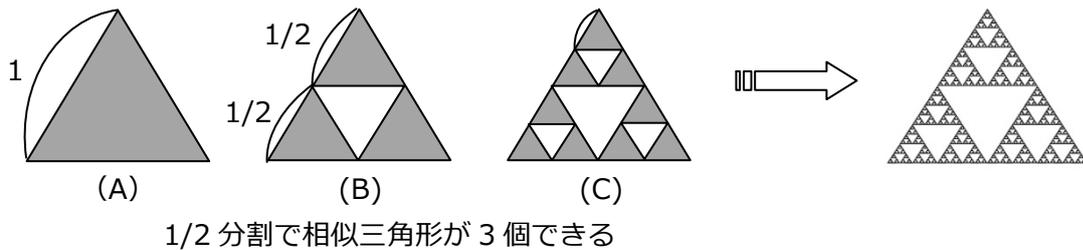
・ それでは次に 1次元より複雑で2次元に近い図形として「**シェルピンスキーのガasket**」と呼ばれるフラクタル図形を紹介します。まず、

① 正三角形 A を用意します。次に、

② この正三角形の真ん中から辺の長さが元の 1/2 になる正三角形を切り抜くと B になります。B は元の三角形の 1/4 の面積の正三角形が 3 個で構成されます。

③ さらに同じ操作を B について行くと 1/8 の面積の正三角形 9 個で構成される C になります。

以下、この操作を繰り返していくと右側のような図になっていきます。これをシェルピンスキーのガasketと呼んでいます。



この図形のフラクタル次元は、1/2 分割で相似三角形が 3 個できることから $a=2$ 、 $b=3$ とおいて

$$D = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.585$$

と求められます。シェルピンスキーのガasketは三角形の真ん中が常に中空になっているので、2次元に近いですが、2次元まではいかない図形ということフラクタル次元は物語っています。

● フラクタル次元について

・ フラクタル次元はフラクタル図形にのみ定義される次元ということはすでに述べましたが、線や正方形、立体を等分割したものはフラクタルとなりますね。これらの位相次元はそれぞれ 1, 2, 3 でした。フラクタル次元を求めると

直線: $D = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$, 正方形: $D = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$, 立方体: $D = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log 8}{\log 2} = 3$

で、ちゃんと経験的な次元（位相次元）と一致します。

・ フラクタル次元とは一体なんだということですが、これはフラクタル図形の複雑さを表す指標ですね。コッホやシェルピンスキー等、2つのフラクタル図形があった場合、次元の高いの方が低い方に比べてより複雑な図形であるということになります。

● 自然界の河川のフラクタル次元を見てみよう

・ 河の一部を拡大し、ある区間で区切ります。次にこの区間の 1/3 に相当する長さが、区間で蛇行している河川に対しいくつ含まれているかを調べます。まったく同じ形をしていませんが、大体 5 個分の長さが含まれていることが分かります。したがってフラクタル次元は次の値となります。

$$D = \frac{\log 5}{\log 3} = 1.465$$

