フラクタルその３：海岸線のフラクタル次元

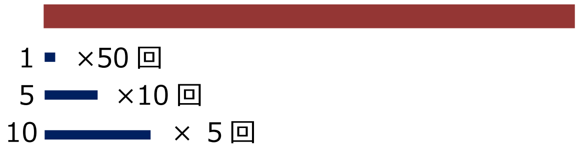
# ●非整数次元の物差し

・直線の長さを測る場合、リールメジャーでもいいですが、原理的には、

$$L = \text{物差しの長さ } r \times \text{当てた回数 } N(r)$$

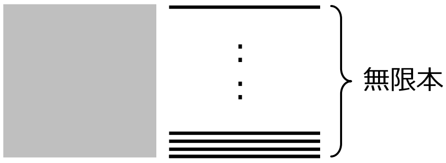
から求められます。回数 N は物差しの長さ ℓ によって変わるので N(r)と書いておきます。これから物差しの長さと当てた回数は逆比例することが分かります。

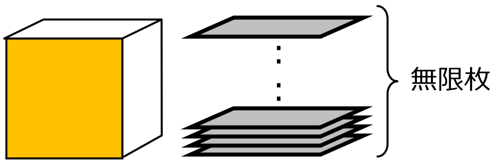
$$N(\boldsymbol{r}) \propto \frac{1}{\boldsymbol{r}}$$




・さて、リアス式海岸のように複雑な海岸線の長さを測ろうとする場合には、話はこのように単純明快にはいきません。「フラクタルその１」の「ある伝説」にあったように、物差しのスケール細かくしていっても、測定の精度を上げようとするとさらに細かいスケールの物差しが必要になってきて、このようなことを繰り返した果てに海岸線の長さは無限大という結末を得ることになります。ということは、測れる物差しが存在しないということでしょうか？

・リアス式海岸線を代表するようなコッホ曲線のことを考えてみましょう。コッホ曲線の周長は１次元の物差し（直線の長さ）で測っていって無限大になりましたね。これは一体どういうことかを考えてみましょう。例えば２次元の面積を１次元の直線を積みあげて測ろうとしても、直線の太さはゼロなので、結局、無限本の直線が必要となります。同じように３次元の立体の体積を測ろうと２次元の面を積み重ねていっても、厚みがゼロなので無限枚数必要となってしまいますね。このことは、




**「２次元のものを１次元の物差しで、また、３次元のものを２次元の物差しで測ることはできない！」** いいかえると

**「ある次元のモノの大きさは同じ次元の物差しでしか測れない！」**

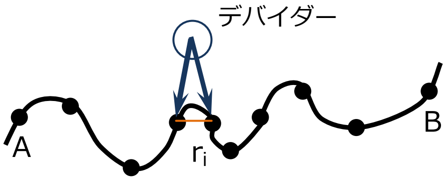
ということを意味しています。

以上のことから、<u>コッホ曲線の周長が無限大になったのは、周長を“1 次元の物差し”で測ったためだと考</u>えられます。

・直線の長さは L=r×N で表されました。スケール r は別に固定する必要はありません。いま考えている最小のスケールを $r_0$ とし、それより大きいスケールを使ってとにかく一番うまく測れるようにしたとすると、長さ L は

$$L = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots = \Sigma r_i \qquad (r_i \geqq r_0)$$

と表せます。同様に２次元の面積は四角のタイルで覆うことにより表せるので




$$S = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \cdots = \Sigma r_i^2$$

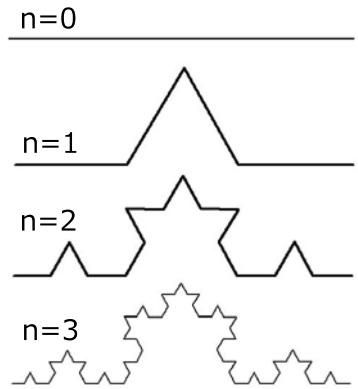
３次元の立方体の体積はサイコロを積み上げたものとかんがえられるので

$$V = r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + \cdots = \Sigma r_i^3$$

表せます。上の表記で注目していただきたいのは **r の指数部の数は次元に対応している**という点です。

・コッホ曲線は１次元より複雑で２次元より簡単な非整数の次元をもつ曲線でした。したがって、結論から先に言えば、コッホ曲線の周長を測るには<u>コッホ曲線と同じ非整数次元の物差し</u>を使う必要があるという

ことになります。コッホ曲線の周長をＬとしましょう。スケールをいろいろ変えた物差し $r_i$ を用意し、これらの物差しを当てがって




$$L=\Sigma r_i^D$$

が有限になるようなＤを求めます。ｎステップでのコッホ曲線の長さは１辺の長さが $(1/3)^n$、個数は $4^n$ なので

$$\Sigma r^D = 4^n \times (1/3^n)^D$$

となります。n→∞にした時、この値が発散せず有限値となるＤを求めます。exp[logA]=A という等式を使うと

$$4^n \times (1/3^n)^D = \exp[n\log(4/3^D)] = \exp[n(\log 4 - D\log 3)]$$

と書けます。n→∞でこの値が有限となるためには、括弧内がゼロであれば１となるので D=log4/log3 とすればよいことが分かります。D=log4/log3≒１.26 で、これはコッホ曲線の次元ですね！　つまり、１次元以上の **log4/log3 次元の物差しでコッホ曲線は測れる**という事になります（理論的には）。

## ●リアス式海岸のフラクタル次元の求め方

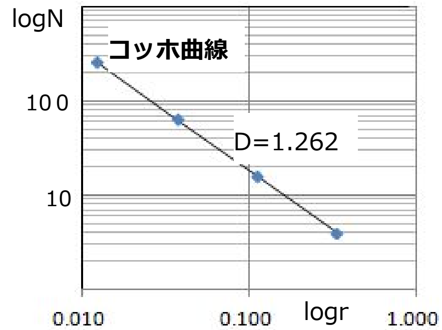
・フラクタル次元は厳密にはフラクタル図形にのみ定義されますが、現実にあるリアス式海岸線のような複雑な曲線へも次のようにして拡張されます。

・１次元の単純な直線の場合

$$\mathrm{N}(\boldsymbol{r}) \propto \frac{1}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}^{-1}$$

が成立しました。リアス式海岸のような非整数のフラクタル次元Ｄをもつ複雑な海岸線の場合には

$$\mathrm{N}(\boldsymbol{r}) \propto \frac{1}{\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{D}}} = \boldsymbol{r}^{-\boldsymbol{D}}$$




| 物差し | 回数（N） | 長さ（L） |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1/3 | 4 | 4/3 |
| 1/9 | 16 | 16/9 |
| 1/27 | 64 | 64/27 |

と表されることが予想されます。これからフラクタル次元Ｄを表す式は

$$\boldsymbol{D} = -\frac{\log \boldsymbol{N}(\boldsymbol{r})}{\log \boldsymbol{r}}$$

となります（コッホ曲線の場合は右図より D=1.262 と求められます）。また、$L(r)=rN(r)=Cr^{1-D}$ とおくと

$$\mathbf{logL}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{(1-D)log}\boldsymbol{r} + \mathbf{logC}$$

となります。これらの関係式を使い、以下の手順から海岸線の複雑さの指標となるフラクタル次元を求めることができます。

**★フラクタル次元を求める具体的手順**

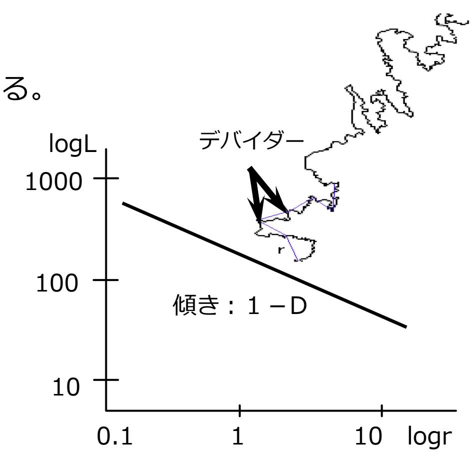
①地図の縮尺に合わせてデバイダーを適当に広げる。

②前の終点が次の始点になるようにデバイダーで海岸線上をたどる。

③近似値を算定する：海岸線の長さ＝１区間の長さ×個数

④デバイダーの縮尺を変えて繰り返す。

⑤そうして得られたデータを縦軸 logL、横軸 logr の両対数グラフにプロットし、直線の傾きよりフラクタル次元を求める。




*2015.０6.01 by KENZOU*