

物理こぼれ話 (1)

KENZOU

2016.3.07

- コニー：さん，こんにちわ。ご無沙汰してます。きょうは「物理こぼれ話」と題している面白いお話を聞かせてもらえるといいことできました。
- K 氏：やあ～コニー，久しぶりだね。元気そうでなによりだ。まあ，面白いお話といってもどうなるかわからないけど，ある機会にちょっとまとめた小話が元ネタなんだけど，それをもう少し中身を詰めて少し専門的な話も含めてお話ししようかというものなんだ。
- コニー：楽しみね。前置きはそれくらいにさせていただいて早速はじめていただけるかしら。
- K 氏：了解。いろいろなお話が出てくるけど，それぞれのお話の内容は全然関連性がないからそのつもりで聞いてね。
- コニー：わかったわ。

第 1 話.

自然界には 4 つの力がある

万有引力とクーロン力

19 世紀までは万有引力で代表される「重力」とクーロン力で代表される「電磁気力」の 2 つの力しか知られていなかった。よくご存じのように，この 2 つの力を表す式は逆二乗の式といってまったく同じ形をしている。しかし，万有引力は質量が m_1, m_2 の 2 つの物体に働く引力だけの力だが，クーロン力は 2 つの電荷 q_1, q_2 が同符号なら斥力（反発力），異符号なら引力となるということで，2 の力には決定的な違いがあるんだね。

$$\text{万有引力} \quad F_N = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r} \quad (\text{引力だけ})$$

$$\text{クーロン力} \quad F_C = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r} \quad (\text{引力と斥力})$$

ちなみに 2 つの力の大きさを比較してみよう。例えば水素原子の電子と原子核の陽子は $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$ 離れていて，2 つの粒子間に働く万有引力 F_N とクーロン力 F_C の大きさはそれぞれ

$$F_N = 3.7 \times 10^{-47} \text{ [N]}$$

$$F_C = 8.2 \times 10^{-12} \text{ [N]}$$

となり、2つの力の大きさは格段の隔たりがある。ちなみに、[N]はニュートンという力の単位で、1ニュートンは、1キログラムの質量をもつ物体に1メートル毎秒毎秒 (m/s^2) の加速度を生じさせる力だったね。

強い力

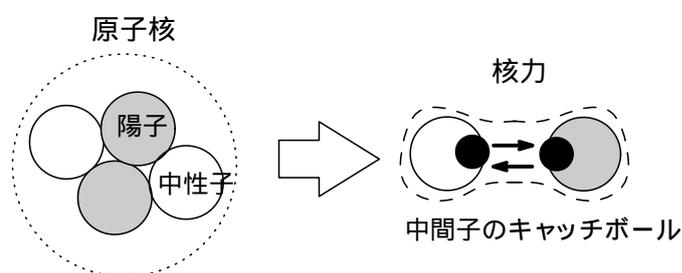
さて、20世紀に入りミクロの世界を記述する量子力学が確立され、素粒子の研究が急速に進むと、素粒子の世界には「強い力」と「弱い力」という2つの力が存在することが分かった。

- コニー：「強い力」とか「弱い力」というのは万有引力やクーロン力とは毛色の違う力なの？
- K氏：そうなんだ。我々が住んでいるマクロの世界ではお目にかからない力なんだ。そのあたりのことを次に話そうと思う。

例えば多数の陽子と電荷をもたない中性子が大体 $10^{-15}m$ という非常に狭い領域に詰まっている原子核を考えよう。陽子は正の電荷をもつので先ほどのクーロン力により互いに反発し合っただけでバラバラになるはずだね。とてもじゃないが一塊にまとまるはずがない。しかし、現実の原子核はバラバラはならず存在している！この不思議！？

この強烈な謎を解き明かしたのが、若干27歳の湯川博士が1934年に発表した中間子論¹なんだ。そのエッセンスは、「正電荷をもつ陽子と電荷をもたない中性子を原子核内に束縛しているのは、陽子と中性子が未知の粒子を交換することで『強い力』が生じている」というものだ。

強い力を核力といい、未知の粒子の予想質量が電子と核子²の間にあたる（湯川博士は中間子の質量は電子の質量の約200倍と推定された）ことから中間子と名付けられた。強い力といわれるように、核力の大きさは重力のザット 10^{38} 倍程度と大きい。しかし、核力の及ぶ範囲は、 $10^{-15}m$ （1千兆分の1m）と非常に短く、それ以上に離れると急激に弱くなってほとんど0になる³。 $10^{-15}m$ は1[fm]（フェムトメートル）という単位で、いまではほとんど使われないが1[Y]（yukawa）という単位でもある。



しかし、核力の及ぶ範囲は、 $10^{-15}m$ （1千兆分の1m）と非常に短く、それ以上に離れると急激に弱くなってほとんど0になる³。 $10^{-15}m$ は1[fm]（フェムトメートル）という単位で、いまではほとんど使われないが1[Y]（yukawa）という単位でもある。

- コニー：劇的なお話ね。湯川博士はその功績で1949年にノーベル賞を受賞されたのね。陽子と中性子の間で中間子を“キャッチボール”することで原子核はバラバラにならず

¹「素粒子の相互作用について..」と題して1934年11月末に送られ翌年2月の数物英文誌に掲載された。
H.Yukawa : Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 (1935) 48.

²陽子と中性子の総称

³核力の到達距離は力を媒介する粒子の質量に反比例する。

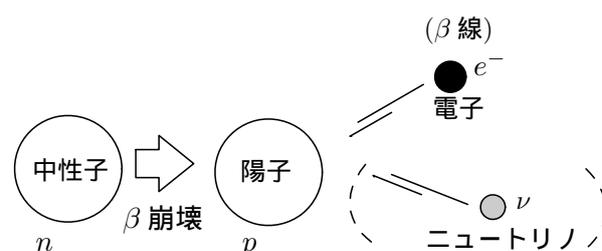
にまとまっていられるということね。。しかし、素人の私にはキャッチボールによって引っ張り合う力が生まれてくるというのはちょっとイメージしにくいわね。

- K氏：たしかにそうだね。道端でキャッチボールしていても2人が近づきあっていくということはないよね。「ミクロな素粒子の世界ではマクロな世界の常識は通用しないんだ！」とってしまっっては身もふた蓋もない(笑い)。お互いに力を作用し合うのを相互作用というけど、相互作用が小さい場合、摂動法という近似計算で粒子の振る舞いを調べていく。逐次近似していくのだけど、その計算の過程から言えることは、あたかも”粒子が交換することで力が生まれる”というモデルで解釈できるということだ。これは摂動法という計算方法から言えることで、自然の振る舞いが本当にそうなのかは別だけど。電荷 q_1 と q_2 の間に働くクーロン力は光子のキャッチボールで生じ、重力も重力子(グラビトン)のキャッチボールによるとされている。このあたりの話に深い入りすると専門的になりすぎるので、軽くスルーしてそういうものだとして素直にとっておけばいいのではないかな。
- コニー：あまり歯切れのよくない説明だけど、そういうことなんだと了解しておくわ。
- K氏：もし、このあたりに興味あるんだったら、吉田伸夫(著)「素粒子論はなぜわかりにくいのか」科学技術評論社、2014を一読されることを薦めておくよ。

弱い力

ある種の原子核(ウランU, トリウムTh, ラジウムRa, ポロニウムPoなど)は自発的に強い放射線(α 線, β 線, γ 線)を放出して別の原子核に崩壊する。 α 線を放出して原子核が崩壊するアルファ崩壊は、1928年にガモフにより量子力学のトンネル効果と考えて説明された。要約すると、トンネル効果によりアルファ粒子が核力エネルギーの壁を通り抜け、原子核から外へ浸みだす。原子核の外へでたなら核力の影響が及ばないし、原子核とアルファ粒子の間には電磁気力による斥力が働くので、アルファ粒子は高速で原子の外へ飛びだしてということだね。

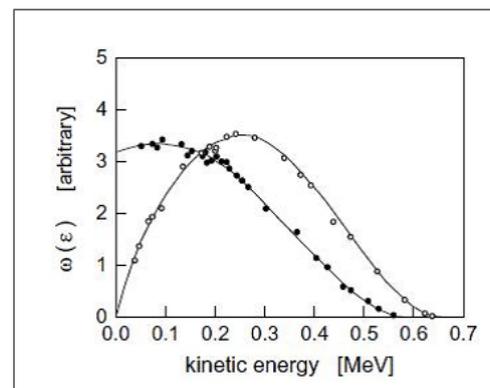
一方、ベータ崩壊は原子核から電子が放出されて、原子番号⁴が一つ多い原子の原子核に変わる現象(中性子が陽子と電子に崩壊)だが、いろいろ奇妙なことに多くの物理学者が悩まされた。アルファ崩壊やガンマ崩壊で



は放射線のエネルギー分布は原子核崩壊前後の原子核が持つエネルギーの差と等しい線スペクトルとなり、崩壊前後でエネルギー保存則が成り立っていることが分かる。

⁴原子核の中の陽子の数

しかし、ベータ崩壊では β 線のエネルギー分布は連続的となり（右図参照）、放出された電子のエネルギーを測定すると、中性子の質量（ m_n ）から陽子の質量（ m_p ）と電子の質量（ m_e ）の和を差し引いたものより小さいことが分かり、これは一体どういうことだと大問題になった。ベータ崩壊を引き起こす力は何だ、いままで知られている相互作用とは異なる新しい相互作用が働いているのではないかと考えられたが、しばらく暗中模索の状態が続いた。



- コニー： $E = mc^2$ で質量とエネルギーは等価ね。ベータ崩壊では

$$m_n = m_p + m_e + \frac{1}{2}m_e v^2$$

が成り立たず、

$$m_n > m_p + m_e + \frac{1}{2}m_e v^2$$

ということは、エネルギー保存則が破られているということ？

- K氏：そう思うよね。量子力学の大御所ボーアも放射性崩壊ではエネルギー保存の法則は破れていると考えたほどだ。多くの物理学者が悩んでいる中で、パウリはドイツ・チュービンゲンの物理学会議に送った1930年12月4日付の書簡の中で、“ベータ崩壊では電荷をもたない中性の何かの粒子がエネルギーを持ち去っている”と考えればエネルギー保存則は破られない、というアイデアを述べている⁵。なにか不明の電荷をもたない粒子が持ち去るエネルギーは β 線の測定器にかからないので、ベータ崩壊の散的でない連続的なエネルギー分布の説明がつく。翌1931年の6月、アメリカ物理学会の招待講演でパウリはこのアイデアを報告したが、講演録の印刷は断っている。同年10月、ローマに出向いたパウリはフェルミと会い、そのアイデアを話した。フェルミは非常に強い興味を示し、そのアイデアに刺激されてベータ崩壊の研究を進め、1934年に有名なフェルミ理論を発表した⁶。ちなみに、ニュートリノは1956年アメリカの物理学者ライネスにより初めてその存在が発見されるんだね。

- コニー：そうなんだ。歴史を紐解くと面白いわね。

フェルミのベータ崩壊理論にてでくる相互作用力は電磁相互作用力に比べて3ケタほど小さいが、これが「弱い力」と呼ばれる所以だ。ちなみに、弱い相互作用を媒介する素粒子はウィークボソンとよばれ、1983年に欧州合同原子核研究所（CERN）が発見した。

⁵藤田純一（訳）「W・パウリ物理と認識」講談社、昭和50年

⁶E. Fermi, Z. Phys. 88 (1934) 161

以上、4つの力についてお話してきたが、いまのところ自然界はこの4種類の力で構成されていると考えられている⁷。それぞれの力には、その力を媒介する（伝える）粒子があるということだね。そのような粒子を専門的にはゲージ粒子と呼んでいる。4つの力を一つの力の理論に統合できないかという試みが現在進んでいて、ワインバーグとサラムは1967年に4つの力のうち「電磁気力」と「弱い力」を統一した「電弱統一理論（ワインバーグ＝サラム理論）」を発表し、その業績により1979年にノーベル物理学賞を受賞している。重力を除く3つの力を統一した理論を大統一理論、重力までも統一する理論を超弦理論と呼んでいるが、現在活発に研究がなされているという状況だ。

- コニー：なかなか興味深いお話、おもしろかったわ。簡単に整理してまとめていただける。
- K氏：そうだね、簡単にまとめると次のようになる。

力の種類	媒介粒子	力の相対的大きさ	作用する距離
強い力	中間子（グルオン）	1	10^{-15}m
電磁気力	光子（フォトン）	10^{-2}	無限大（強さは距離の2乗に反比例）
弱い力	ウィークボソン	10^{-5}	10^{-18}m
重力	重力子（グラビトン）	10^{-40}	無限大（強さは距離の2乗に反比例）

- コニー：楽しいお話、ありがとうございました。

第1話終わり

⁷第5の力というのも研究されているが、未だ確たる証拠は見つかっていない。

物理こぼれ話 (2)

KENZOU

2016.3.13

第2話. 重さはなにを基準として測られる？

重さと質量の違いはなんだ

「重さ」と「質量」はまったく違うものだということをまず理解しておこう。重さというのは「力」で、地球が物体を引っ張る力、つまり万有引力なんだ。よく御存じのように、力は

$$\text{力} = \text{質量} \times \text{加速度}$$

で定義されるね。「重さ」にでてくる加速度は重力加速度だ。地表での重力加速度 g は約 9.8 m/s^2 , 月面上での重力加速度は約 1.6 m/s^2 なので、月面上では重さが地上に比べて約 $1/6$ になる。つまり「重さ」はどこにいても同じという普遍的な値ではない。一方、「質量」は物質そのものがもっている値で、地球上であろうと月面上であろうと変わらない基本的・普遍的な量なんだ。質量の単位は kg で、重さの単位は kg 重と重力加速度の“重”が付く。

- コニー：よく体重計で測った体重は何十 kg というけど、これは「重さ」なの「質量」なのという疑問をネットでよく見かけるけど、一体どうなの？
- K氏：うん、結論から言えば質量なんだ。バネばかりの上に乗るとバネが縮む。フックの法則からこの縮み量はバネを押す力に比例する。この力を重力加速後で割ってやると質量になるだろう。簡単にいえば、体重計はそのようなことをやっているんだね。例えば体重計で 60kg とでたとしよう。仮にこれが「重さ」だとしたらその人の「質量」は $60\text{kg} \text{ 重} \div 9.8\text{m/s}^2 \doteq 6\text{kg}$ となる。これはあまりにも軽すぎるよね。ダイエットにはいいかもしれないが。
- コニー：ハハハ～（乾いた笑）

ということで、前置きはこれくらいにしてお話をすすめることにしよう。さて、日常感覚的に「重さ」という言葉を使ってお話を進めるけど、その中身は「質量」のことを言っているということを入念に入れておいてね。

重さ（質量）の基準は水？

日常、これは「重い」とか「軽い」という表現を使っているが、それは何かの基準に比べてということだ。AよりBの方が重いといえ、Bが基準となっているわけだ。しかしAの質量は $A\text{kg}$ 、Bの質量は $B\text{kg}$ といいたすと、 kg という質量が共通の基準になっている。第2話はこの kg はどのようにして決められているのかということのお話だ。

kg の基準は最初は「水」だった。1795年に「1気圧の下での0℃における1リットルの水の質量」を1キログラムと定義した。その後、0℃の温度条件が、水の密度が最大になる3.98℃に改められている。ところがよく考えてみると、1気圧という条件の中にすでに質量の概念が含まれている。

- コニー：そうね、圧力は力で、力には質量が含まれているものね。
- K氏：そうなんだ、質量を決めるのに質量を使っている。。。

いろいろ変遷があって、1880年に kg の基準となる国際キログラム原器（標準器）がフランスでつくられた。白金90%とイリジウム10%の合金で、直径・高さともに約39mmの円柱形をしている。

1889年、第1回国際度量衡総会で各国にこの原器の複製配布が決まり、日本には40個作成された原器のうちNo.6が提供され、独立行政法人・産業技術総合研究所に保管されている。日本国キログラム原器は標準器と比べて0.176mg重かったそうだ。国際キログラム原器は表面吸着などの影響により年々増加しており、その量は年に $0.1\mu\text{g}$ (0.000001g) 程度と見られている。今なお普遍的な物理量ではなく人工物に基づいて値が定義されているのはキログラムだけなんだ。



- コニー：質量の単位 kg が人工物によって定義されているのは何とも心もとない感じね。時間がたてば原器の質量も変わることだし。
- K氏：そうだね、1980年代に42年ぶりに国際キログラム原器の洗浄を行ったときには、質量が約 $60\mu\text{g}$ 、2007年に9月には洗浄を行ったわけでもないのに $50\mu\text{g}$ 軽くなったといわれている。こうした問題を解決するために2011年、パリで開かれた国際度量衡総会で「国際キログラム原器」を廃止して新しい定義を設けることが決議された。まだ紆余曲折があるようだけど、そのうち新しい定義が決まるだろうね。さて、ちょっと休憩して第3話に入ろう。

第2話終わり

物理こぼれ話 (3)

KENZOU

2016.3.20

第3話.

宝石の質量の単位はグラム？

1カラットのダイヤといえば世の女性の目がランランと輝きますね。ダイヤモンドの品質は、カット、カラー、クラリティ（透明度）、カラットの4Cで決まるとされている。ところで、このカラット（carat）というのは宝石の大きさではなく質量の単位で、ct または car という記号が使われる。

カラットは豆一粒の重さ(質量)？

昔は質量の基準に植物の種子が用いられていたそうで、カラットはキラト豆（いなご豆）一粒の質量を基準としてた。キラト豆の木は10m以上にもなる大きな木で、豆はえんどう豆のような形をしている。採取したキラト豆の種子を数日間乾燥させておくと豆一粒の質量がちょうど200mg程度となり、ほぼ一定しているらしい¹。なんともおおらかで面白いですね。しかし豆粒といってもその生育条件の違いや同じ一粒でも質量にバラつきがあることが当然考えられる。だから豆粒を基準としたのでは商取引上いろいろ不具合も起こったはずだろう。このような不具合を解消するために、1907年のメートル条約の会議で1カラット = 200 ミリグラムと定められ、今日に至っている。



- コニー：宝石のカラットはサイズというか、大きさを表すものと思っていたけど、違うのね。それにしてもカラットに豆粒が関係していたとは面白いわ。
- K氏：昔の人は身近にあるものを活用していたんだね。ところで質量 m と大きさ V は $m = \rho V$ という関係にあるだろう。 ρ は密度だね。だから同じカラットでも密度が小さければ嵩が大きいことになる。代表的な宝石とその密度（比重）は次の通りだ

¹「実際にイナゴマメを個別に電子天秤はかりで計量すると、0.10g から 0.25g の間でかなりのばらつきがあり均一ではない」ともいわれている。おそらく豆を選別して使っていたのでしょう。Wikipedia

宝石	比重	宝石	比重
エメラルド	2.71	ダイヤ	3.52
トルコ石	2.80	トパーズ	3.54
トルマリン	3.06	ルビー	4.00
ヒスイ	3.33	サファイア	4.00

ちなみに、ブリリアント・カット（58面体のカット）されたダイヤモンドのカラットと直径の関係は大体次のようだね。5カラットのダイヤだと3億円以上はするとのことだ。

カラット	直径 (mm)	カラット	直径 (mm)
0.05	2.37	1.0	6.42
0.1	2.98	1.5	7.35
0.2	3.75	2.0	8.09
0.3	4.30	3.0	9.26
0.4	4.73	4.0	10.19
0.5	5.10	5.0	10.98

- コニー：もうびっくりするだけね。
- K氏：ついでに、K (karat) という単位があることを話しておこう。日本語読みするとカラット (carat) で発音は同じだが、こちらの方は金製品の「金の純度」を24分率で示す単位なんだ。日本では「金」という略称が使われている。純金100%なら24/24なので「24金」というわけだ。K24とか24Kとも書かれる。
- コニー：そうなんだ。それじゃ18金 (K18) は18/24で75%の純度の金ということね。
- K氏：そうだね。日本では99.99%以上の純度の金を24カラット (24K)、又は純金と表示して良いことになっている。ちなみに、金の純度をなんで24分率で表すのかということは、歴史的にそうなったということらしいね。
- コニー：いろいろ面白いお話をありがとう。

物理こぼれ話（４）

KENZOU

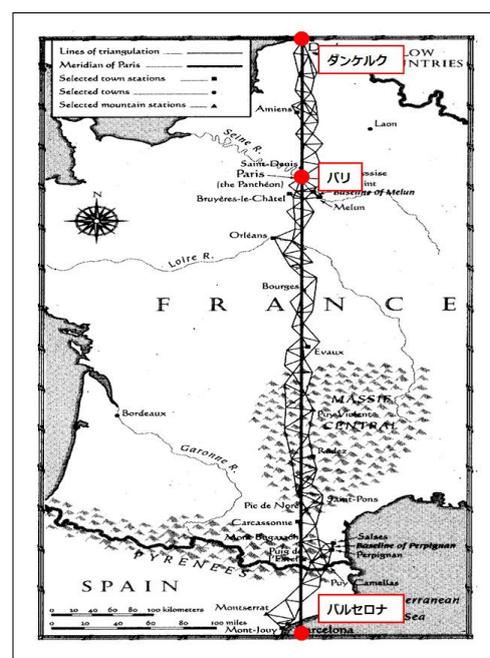
2016.3.22

第４話. 人間の体を基準とした長さの単位は？

メートルは子午線の長さから決まった

長さの単位となっているのがメートル(m)で、メートルという名称は「ものさし」または「測ること」を意味する古代ギリシャ語メトロンからきているといわれている。1メートルという長さの基準は、1791年3月のフランス国民会議で「地球の北極点から赤道までの子午線の長さの1000万分の1の長さを1メートルとする」と決まった。

実際に北極点から赤道までの距離を測るのは不可能だが、パリを通る子午線上にフランス北岸の港町ダンケルクとスペインのバルセロナが位置し、ダンケルクとバルセロナの2つの都市の距離が赤道から北極点までの子午線のほぼ10分の1に当たることから、2つの都市間の距離を測量することになった。測量は開始されたのは国民会議決定の翌年1792年で、フランス革命の真っ最中だ。山岳地帯での困難な測量に加え、フランスと対立していたスペインでの測量等々、難渋を極めながらも着実に進み、測量開始から6年後の1798年に測量作業が終了した。この結果を受けて1799年に白金製の「メートル原器」が作られ、フランス国立中央文書館（アルシーブ・デ・レパブリック）に保管された。保管場所の名をとってアルシーブ原器と呼ばれている。その後、フランスはメートルの普及に努め、1875年に度量衡の国際的な統一を目的としてメートル条約が17か国（ドイツ、スペイン、アメリカ、イタリア等）の代表によりパリで締結された。日本は1885年10月に加盟している。



- コニー：私たちが日常使っているメートルという長さの背景には、先人達の大変な苦労と忍耐・努力が詰まっていたのね。
- K氏：そうだね。いまでこそGPSを使えば測量は容易かも知れないが、当時は知恵と工夫で乗り切っていたんだね。

その後もメートルの精度を上げる努力は続けられ、アルシーヴの原器を基準に白金 90 % とイリジウム 10 % の合金からなる「国際メートル原器」が作られ、1889 年の第 1 回国際度量衡総会で「メートル」が国際的に初めて制定された。日本は 29 本作られた国際メートル原器のうちの No.22 が提供され、独立行政法人・産業技術研究所に保管されている。No.22 の原器は、国際メートル原器よりほんのわずか $0.78\mu\text{m}$ (0.00000078m) だけ短いらしい。

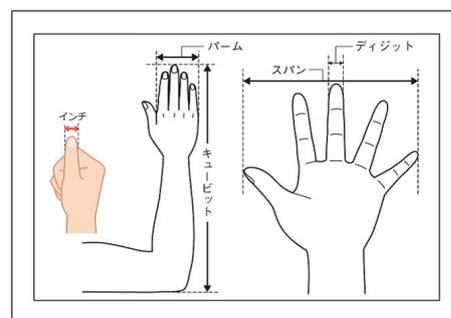
国際メートル原器にも弱点があった。原器そのものが膨張・収縮したりする上に、メートルの長さを表す「線」の太さによる誤差が生じる。より精度を高めていくべく努力が続けられ、1983 年の第 17 回国際度量衡総会で「1メートルは真空中で光が $1/299,792,458$ 秒に進む距離」と再定義された。これは光速が $299,792,458 \text{ m/s}$ であることからきている。

- コニー：光を使って長さを定義するって、理屈の上では納得できるけど、実際には大変なことね。
- K氏：そうだね、あくなき精度の追求というか、すごいね。

人間の体を基準とした長さ

さて、メートルの定義に遡ること数千年、B.C.6 千年頃の古代メソポタミアでは当時の王の腕の長さが長さの単位として使われていた。

「キュービット」という単位で、1キュービットは肘から中指の先端までの長さとしてされた¹。大体 43 ~ 53cm くらいだ。ピラミッドもキュービットを基準にして作られたそうだ。また、旧約聖書に登場するノアの方舟の大きさは、長さ 300 キュービット、幅 50 キュービット、高さ 30 キュービットといわれていぬので、1 キュービットを概略 0.5m とすると長さ 150m、幅 25m、高さ 15m 程度の大きさの船ということになる。



手のひらをひろげたときの親指の先から小指の先までの長さは「スパン」と呼ばれ、キュービットの半分の長さとしてされた。1 キュービット = 2 スパンということだが、実際に手のひらをひろげて腕に当ててみると納得できる。なお、スパンという言葉はいまも建築の寸法規模を表

¹「キュービット」はラテン語で「肘」を意味している。

す単位として使われていて、1 スパンといえば、およそ6~7メートルほどの寸法だ。

まら、親指以外の指の幅は「パルム」と呼ばれ、これはスパンの1/3に当たる。親指以外の指1本の幅は「ディジット」と呼ばれ、「パルム」の1/4に当たる。ディジットは現代のデジタルの語源とされている。また、親指の幅は「インチ」と呼ばれ、この単位は現在も使われている。実際に親指の幅を測ってみると確かに1インチ(2.54cm)程度あるね。

手や腕ばかりでなく、足の幅も「フート」という単位となっていた。これから現在のフィートが連想されるね。1フィートは30.48cmだから、昔の人の足は結構大きかったのかな。

- コニー：なるほどねえ～。道具もなにもなしで、最も手っ取り早いスケールね。
- K氏：そうだね。いままで出てきたスケールをまとめておくと次のようになる。

1 キュービット	=	2 スパン
1 スパン	=	3 パルム
1 パルム	=	4 デジット

第4話終わり

物理こぼれ話（ 5 ）

KENZOU

2016.3.25

第5話.

力の平行四辺形

テコの原理とつり合い

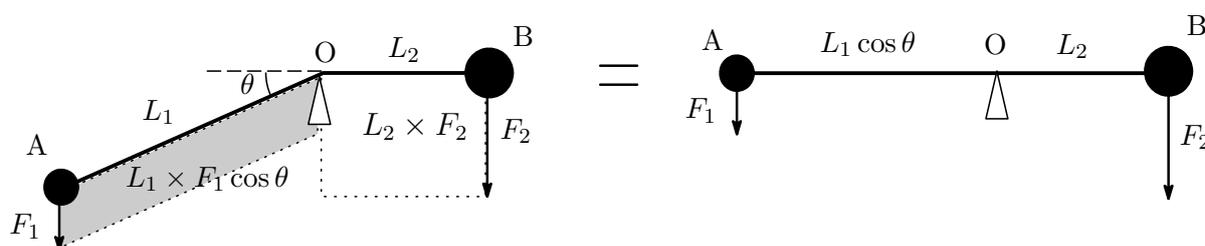
いまさらテコ原理なんてと思うかもしれないが、しばらくおつきあい願いたい。

いま、竿秤にかけた2つの物体A, Bが図のようにつり合っているとしよう。アルキメデス¹は「竿秤に掛けられた物体A, Bがつり合うのは、物体A, Bの重さが始点Oからの距離に反比例するときである」というテコの原理を見いだした。すなわち、A, Bの重さをそれぞれ F_1 , F_2 とすると $F_1 \propto 1/L_1$, $F_2 \propto 1/L_2$ で、これから

$$L_1 F_1 = L_2 F_2$$

という関係式が得られる。この式は腕の長さ (L) と重さ (F) で作られる面積が互いに等しいということを意味しているね。

- コニー：たしかにそうだけど、それがどうしたのかしら？
- K氏：うん、例えば左図のように支点Oで折れ曲がっている竿天秤を考てみよう。この天秤の両端に重りA, Bを掛けてつり合っているとす。



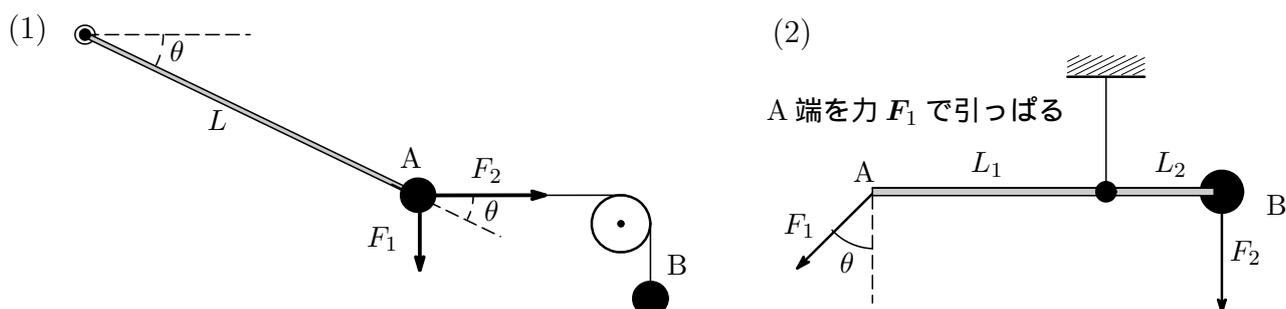
¹紀元前 287 年? - 紀元前 212 年。イタリア半島の西南の地中海に位置するシチリア島で生まれる。

支点 O の左側の面積は平行四辺形の面積になり、これは $L_1 F_1 \cos \theta$ だ。一方、右側の面積は $L_2 F_2$ だね。つり合っているときこの2つの面積は等しくなければならないので

$$L_1 F_1 \cos \theta = L_2 F_2$$

となる。

- コニー：なるほど、昔、天下りの的(?)に習った式がでてきたけど、テコ原理はそういう意味があったのね。
- K氏：それじゃ次の(1)、(2)の場合はどうなるかやってみるか。竿の重さは無視する。



- コニー：四辺形の面積を計算すればいいのだから、つり合いの条件は、(1)の場合は

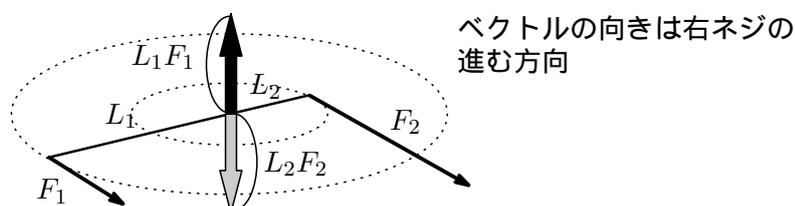
$$L F_1 \cos \theta = L F_2 \sin \theta, \quad \therefore \frac{F_1}{F_2} = \tan \theta$$

(2)の場合は

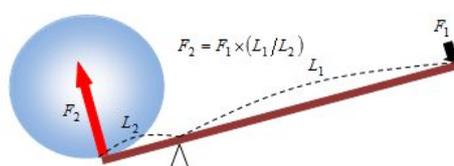
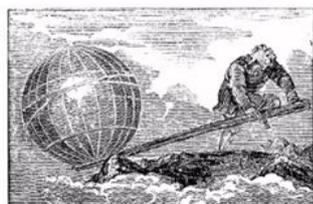
$$L_1 F_1 \cos \theta = L_2 F_2$$

となるわ。

- K氏：OK!ところで、上で計算した面積の大きさを「力のモーメント」の大きさといっている。モーメントというのは回転する能力のことだ。回転といっても右回りもあれば左回りもあり、つまり回転の向きがあるわけだ。大きさと向きをもつものはベクトル量だから、モーメントはベクトル量なんだね。



- コニー：竿天秤がつり合って静止しているのは，反時計回りのモーメントと時計回りのモーメントのベクトルが相殺した結果ということなのね。
- K氏：そういうことだね。ところで，余談だが，アルキメデスは「私に支点を与えよ。されば地球を動かしてみせよう」といったという話は有名だね。アルキメデスは地球というものを既に重さをもった球体だと洞察していたのか。。。いずれにして面白い逸話だね。



- コニー：アルキメデスが支点から L_1 の距離で棒に直角に力 F_1 を加えれば，支点から反対側の L_2 の距離にある地球には F_1 の L_1/L_2 倍の力，つまり $F_2 = F_1 \times (L_1/L_2)$ の力がかかるわけね。だから L_1 を L_2 に対して十分大きくとれば， F_1 が小さな力であっても地球には非常に大きな力 F_2 がかかるというわけね。

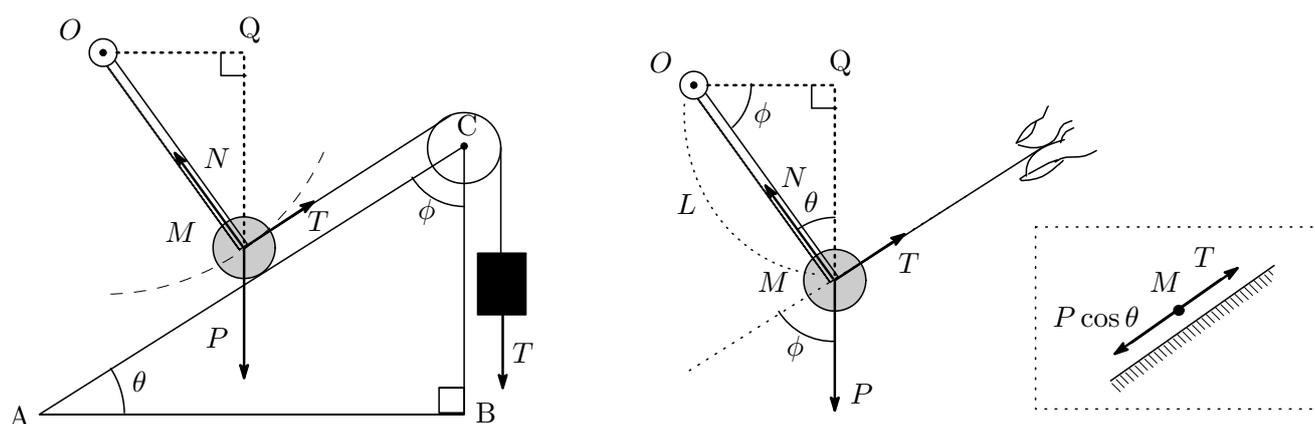
斜面のつり合い（斜面の理）

摩擦のない斜面上に置かれた物体 M が紐で片方に引かれていて静止している問題を考えよう。ダビンチやガリレイが活躍していた中世ヨーロッパでは，“いろいろな傾斜角をもつ斜面に沿っての力はどのような条件下に平衡を保つか”ということが未解決の問題だった。武谷三男「物理学入門 力と運動」（ちくま学芸文庫，2014）には『ある重量を一定の高さに持ち上げるには，その重さ，すなわちその物体に働く重力より小さな力では持ち上げることができない。しかし，斜面上を滑らして上げれば，小さな力で上げることができる。これも古代から分かっていたことである。しかし，この斜面の理についてはレオナルド²も正しい考えに達することができなかった。』と書かれている。いまでは中学理科か高校物理で習うような問題に人類は長いこと苦しんできたんだね。

ガリレオ・ガリレイ³はこのつり合いの問題（斜面の理）を「テコの原理」を使って解いた。ガリレオの考えは次の通りだ。物体 M の斜面 AC に沿っての“微小な運動”を考えると（ここがポイントなのだが）斜面に垂直で定点 O のまわりに自由に回転し得る棒の先端に物体 M が付いていると見ても同じだと考えるわけだね。う～ん，と呻りたくなるような着想だなと思う。

²Leonardo da Vinci, 1452 - 1519

³Galileo Galilei, 1564 - 1642. イタリアの物理学者、天文学者、哲学者。



そうすると、斜面上の物体 M のつり合いの問題は右図に示すように長さ L 棒の「テコのつり合い」に焼き直すことができるけど、コニー、フォローしてみるかい。

- コニー：いきなり振られてびっくりぽんだけど、右の図のつり合い問題を解けばいいのね。M の重量 P による力のモーメントは

$$L \times P \cos \phi = \overline{OQ} \times P$$

一方、張力 T による力のモーメントは

$$L \times T$$

この2つが等しいとおいて

$$\overline{OQ} \times P = L \times T, \quad \therefore \frac{P}{T} = \frac{L}{\overline{OQ}}$$

となるわ。棒の長さに関する項が残って面白くないけど。。

- K 氏：うん、ここで三角形 ABC と OMQ は相似ということに着目すると

$$\frac{L}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

となって、

$$\frac{T}{P} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\text{斜面の高さ}}{\text{斜面の長さ}} \quad (5.1)$$

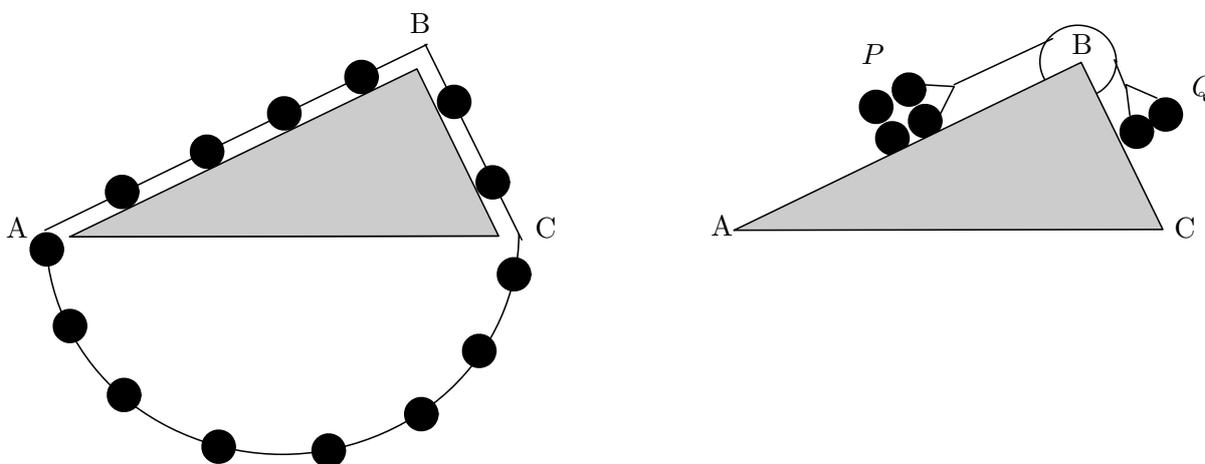
ということになるわけだ。

- コニー：なるほど。例えば斜面の長さが高さの2倍あるとすれば、物体を斜面上に止めて力 T は物体 M の重さ (P) の $1/2$ になるわけね。

ステヴィンの思考実験

シモン・ステヴィン⁴はガリレオとほぼ同時代の人だが、彼は数珠を用いた思考実験により永久運動の不可能と斜面の法則について考究し、力の平行四辺形の法則の発見に至っている。ステヴィンの思考実験についてのお話をしよう。

- コニー：面白そうね。数珠の実験ってどういうものなの。
- K氏：うん、彼は長い斜面と短い斜面とでできている三角柱 ABC に数個の重りをつないだ数珠を掛けるとどうなるか考えたんだ。斜面 AB と BC の長さの比は 2 : 1 とし、左の斜面に 4 個、右の斜面に 2 個重りが載るように数珠をかけた。下に垂れ下がっている部分は左右対称で両方に同じだけ重さがかかるので、つり合いに関しては無いのと同じだね。



さて、パッと見ると左斜面の 4 個の重りが右斜面の 2 個の重りを引っ張るので、数珠は止まることなく永久に回転し続けると考えられる。つまり永久機関⁵の実現だね。これを利用すれば外から何もエネルギーを加えることなく仕事を続けるので、無から無尽蔵にエネルギーを取り出すことができる！

- コニー：素晴らしいじゃない！ だけど永久機関は存在しないのよね。
- K氏：うん、もし存在すればエネルギー保存則が破られ物理学は崩壊してしまう（笑い）。ステヴィンは 1586 年に出版した著書「De Beghinselen des Waterwichts（つり合いの原理）」の中で『ここに不思議がある。だが決して不思議ではない』と書いて、永久機関の実現は不可能なことから、実現される唯一の状態は“つり合い”のみであると結論したんだね。

⁴Simon Stevin、1548 年 - 1620 年。ヨーロッパの旧フランドル地方、ブルッヘ（ベルギーのブルージュ）で生まれた数学者、物理学者、会計学者。

⁵「ステヴィンの機械」と呼ばれる。

- コニー：そうなんだ。「つり合い」だけが実現される唯一のものね。お話を続けて。

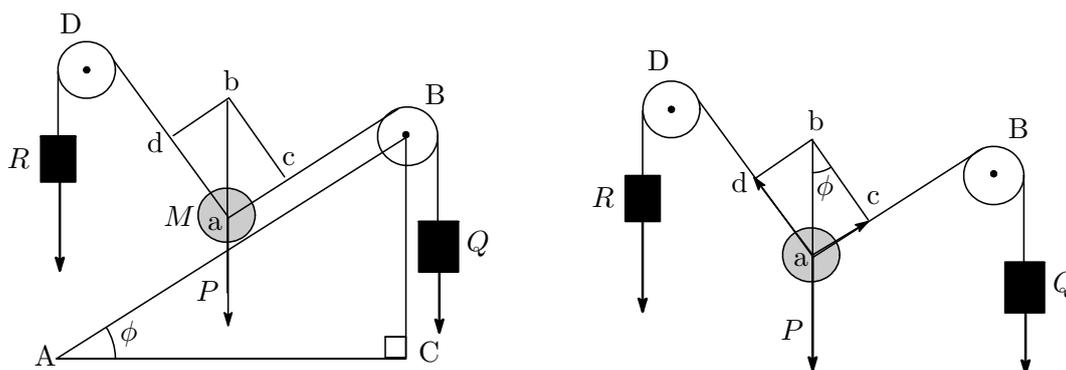
垂れ下がった部分を取り除いてもつり合いは保たれると考えられるので、斜面上の重りを右の図のようにひとまとめにして P, Q としても相変わらずつり合っているはずだ。 P は Q の 2 倍の重さ、 P のいる斜面の長さは Q がいる斜面の長さの 2 倍、ということから、斜面上の重りは、その重さの比が斜面の長さの比に等しいときにつり合うと結論したんだ。

$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad (5.2)$$

- コニー：この結論は先ほどガリレオが導いた結論 (5.1) と一致するわね。
- K 氏：そうだね。もっとも歴史的にはステヴィンの方が先に見つけている。

力の平行四辺形則

次頁の左の図のように斜面上の物体 M が重り Q でつながれた糸で引っぱられてつり合っている状況を考えよう。ステヴィンは斜面上の物体の重さを、斜面に平行な方向の重さと斜面に垂直な方向の重さとに“分解”して考え、それぞれの重さを三角形 ABC の辺の比の割合に分け、それぞれの向きをつり合いを考えた。そのとき、平行四辺形法に気付いたといわれている。



物体 M は斜面上を動くが斜面にめり込んではいかない。ということは、滑車 D を通して斜面に垂直に働く R の力とつり合っていると考えることができる。このように考えると、 M は斜面を取り除いても P, Q, R の 3 つの力でつり合いを保つ。 P は鉛直下方の力、 Q は ac 方向の力、 R は ad 方向の力で Q の力と R の力を合わせたものが P の力とつり合っているわけだ。そして P と Q の比は ab と ac の比に等しいと結論した。 $\triangle abc$ と $\triangle ABC$ は相似になるので

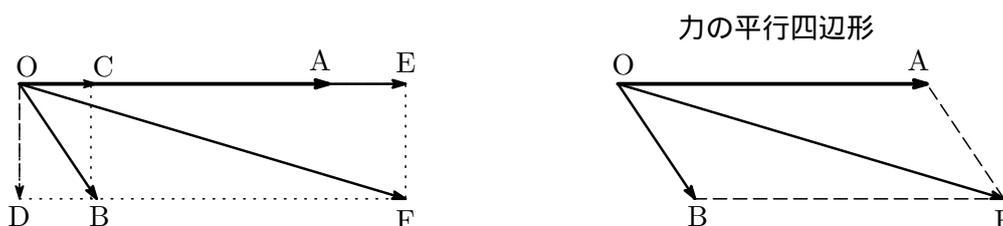
$$ab : ac : ad = P : Q : R = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC}$$

これから P と Q の比は

$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

となり，重さと斜面の長さとの間の関係式がでる。

- コニー：力を垂直な2つの向きに分解し，それぞれの方向のつり合いを考えるとというステヴィンの着想がポイントなのね。今風に考えるとベクトル P は2つのベクトル \vec{ac} と \vec{ad} の合成ベクトル \vec{ab} と大きさは等しく向きが反対ということになるわね。
- K氏：そうだね。“力は垂直な二つの方向に分けて考えることができる”というステヴィンのアイデアを使って力の合成則を考えてみよう。2つの力 OA と OB があり，この2つの合力を求めてみよう。 OB を「 OA の方向」と「 OA に垂直な方向」に分解し，それぞ



れを OC ， OD とする。 AE を OC と同じ長さにとれば， OA 方向の力の和は OE になるね。これは合力の一つの成分だ。もう一つの成分はこれに垂直な OD なので，合力 OF は OE と OD を成分にもつことになる。結局， OF は OA と OB を2辺とする平行四辺形の対角線だね。

- コニー：なるほど，先ほどの斜面の問題では R と Q の力は直交していたけど，力が直交していない場合の合力も平行四辺形の原則から求めることができるわけね。
- K氏：少しお話が長くなりすぎたので，ここらで終わることにしようか。
- コニー：お疲れ様でした。

第5話終わり