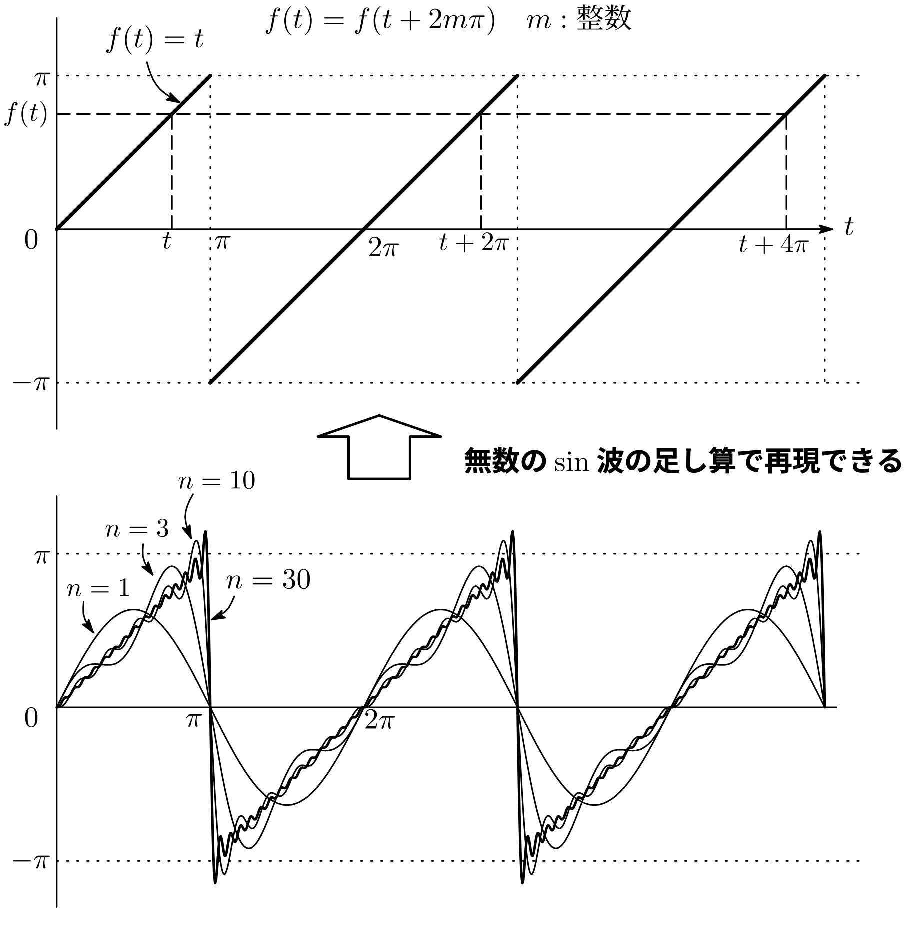
第 1 話. フーリエ級数と音の関係

音の世界に入ると「フーリエ級数」とか「フーリエ変換」という言葉に出会いますね。ここでは厳密な話は省いて直感的な理解に迫ってみたいと思います。

1.1　フーリエ級数とは？

1.1.1　関数 $f(t) = t$ を sin 関数の和で表す

「どんな形の波形でも sin 波や cos 波などの三角関数を適切に重ね合わせることで表せる」といえばビックリするかもしれませんが，これがフーリエ級数[1]の根幹で，1822 年にフランスの数学者・物理学者であるフーリエ（1768 − 1830）によって発見されました。ノコギリ波を例にとってさっそく確認してみましょう。ノコギリ波は $-\pi < t < \pi$ で $f(t) = t$ で与えられる，周期 2π の周期関数で表されます。こんなギザギザのグラフがなめらかな三角関数で本当に再現できるのか大変疑問に感じられますが，その様子を下図に示しました。上の図はノコギリ波のグラフで，下の図は適切な sin 関数を 1 個，3 個，10 個，30 個と足し合わせた場合のグラフを描いたものです。sin 関数 1 個（$n = 1$ のグラフ）ではノコギリ波とは似ても似つかない形ですが，sin 関数を多数足し合わせたモノは次第にノコギリ波の形に近づいていく様子が分かりますね！



[1] ここでいう級数は sin や cos が一列に並んだものと理解しておいてください。

ところで，適切な sin 関数の和といいましたが，具体的な関数は次の通りです。

$$\left.\begin{aligned}
n=1 &\quad : \quad f(t)=2\sin t \\
n=3 &\quad : \quad f(t)=2\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t\right) \\
n=10 &\quad : \quad f(t)=2\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t-\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots-\frac{1}{10}\sin 10t\right) \\
n=30 &\quad : \quad f(t)=2\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t-\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots-\frac{1}{30}\sin 30t\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

sin 波を 30 個足した $n=30$ の $f(t)$ は，$f(t)=t$ という直線で表されるノコギリ波に相当近くなってきていますね。このことから n をどんどん増やしていけば最終的にノコギリ波に一致する，つまりノコギリ波は上のような無数の sin 関数の和で表すことができると予想されます。

$$\text{ノコギリ波：}f(t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt \tag{2}$$

1.1.2　フーリエ級数を求めよう

ノコギリ波で登場した“ 適切な sin 関数 ”はどうした見つけられるのか？　大いに気になるところです。そこでフーリエに登場していただきます。彼は 30 歳のときにナポレオンのエジプト遠征軍の学芸委員会の一員として随行し，そこで考古学に熱中したようです。3 年後に帰国しグルノーブルの知事に任命されています。文化的手腕と同時に行政的的手腕も発揮し，名知事として名を馳せ，ナポレオンから男爵に叙されています。ナポレオン没後の翌年，1822 年に発刊された「熱の解析的理論」で熱伝導の問題を三角関数の級数で解く[2]という，フーリエ級数を発表しています。 さて，余談はこれくらいにして，フーリエの主張を聞いてみましょう。

「周期が T の周期関数ならどんな関数でも a_n と b_n を適当に選ぶことにより

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{T}t+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}t\right) \\
&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\, n\omega_0 t+b_n\sin\, n\omega_0 t\right) \qquad (\omega_0=2\pi/T\text{：角振動数})
\end{aligned} \tag{3}$$

とあらわすことができる。」

無限級数になっているところが気になりますが，現実問題を取りあつかう場合は適当なところで切り上げればいいでしょう。a_n, b_n を**フーリエ係数**といい，a_0 を**直流成分**，それ以外の a_n, b_n を**交流成分**と呼んでいます。

(1) フーリエ係数 a_n, b_n を求める

係数 a_n, b_n は三角関数の次の 4 つの積分公式（導出方法は省略）をつかえば容易に求めることができ

[2]もっとも半世紀前にダニエル・ベルヌイが両端を固定した弦の振動を三角関数の級数で解いおり，フーリエの方法はこの再現ともいえます。しかし，弦の振動と三角関数の取りあわせはむべなるかなという感じですが，熱と三角関数の取りあわせは奇異な感じがしますね。流石にフーリエといったところです。

ます。

$$\begin{cases} \text{(A)} \quad \displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)dt = \int_0^T \sin(n\omega t)dt = 0 \\ \text{(B)} \quad \displaystyle\int_0^T \cos^2(n\omega t)dt = \int_0^T \sin^2(n\omega t)dt = \frac{T}{2} \\ \text{(C)} \quad \displaystyle\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)dt = \int_0^T \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)dt = 0 \quad (m \neq n) \\ \text{(D)} \quad \displaystyle\int_0^T \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)dt = 0 \end{cases} \tag{4}$$

それでは係数 a_n, b_n を求めていきましょう。

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\, n\omega_0 t + b_n \sin\, n\omega_0 t)$$

まず，$f(t)$ の両辺を 1 周期 $[0, T]$ の区間[3]で積分すると，公式（A) より

$$\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}a_0 \int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T (a_n \cos\, n\omega_0 t + b_n \sin\, n\omega_0 t)\, dt = \frac{1}{2}a_0 T$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{5}$$

次に，$\cos(m\omega_0 t)$ を掛けて $[0, T]$ の区間で積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)\cos(m\omega t)dt &= \frac{1}{2}a_0 \int_0^T \cos(n\omega_0 t)dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_0^T \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt + b_n \int_0^T \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt\right\} \\ &= 0 + a_n \frac{T}{2}\delta_{mn} + 0 = a_n \frac{T}{2}, \qquad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \tag{6}$$

以上で係数 a_0, a_n が求められました。同様にして $\sin(m\omega_0 t)$ を掛けて 1 周期の区間 $[0, T]$ で積分すると

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \tag{7}$$

と求められます。なお，$f(t)$ は周期関数なので，積分区間を $[0, T] \to [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ としても結果は同じです。

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt & \longleftrightarrow \quad a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt & \longleftrightarrow \quad a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt & \longleftrightarrow \quad b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \end{cases} \tag{8}$$

[3] 1 周期の範囲であればとくに $0 \sim T$ にこだわる必要はない。

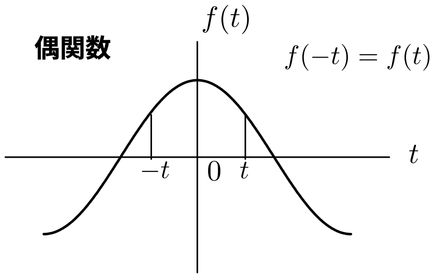
フーリエ係数の意味を考えてみましょう。フーリエ級数は次の三角関数の級数であらわされました。

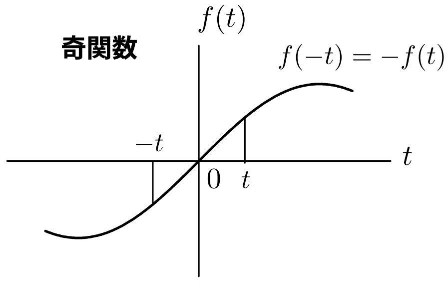
$$f(t) = a_0/2 + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots + b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \cdots \tag{9}$$

a_n, b_n は余弦波や正弦波の振幅となっていて，**フーリエ係数が分かれば関数 $f(t)$ の中に ω_0（基準音の周波数）や $2\omega_0, \cdots$ といった周波数の成分（倍音成分）[4]がどのくらい含まれているかが分かります**。

(2) フーリエ余弦級数とフーリエ正弦級数

$f(t)$ が $f(-t) = f(t)$ となる関数を**偶関数**，$f(-t) = -f(t)$ となる関数を**奇関数**といいます[5]。





周期を T とした場合

●**偶関数のフーリエ級数**は

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t, \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt \tag{10}$$

と表されます。これを**フーリエ余弦級数**といい，係数 a_0, a_n を**フーリエ余弦係数**と呼んでいます。

●**奇関数のフーリエ級数**は

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t dt \tag{11}$$

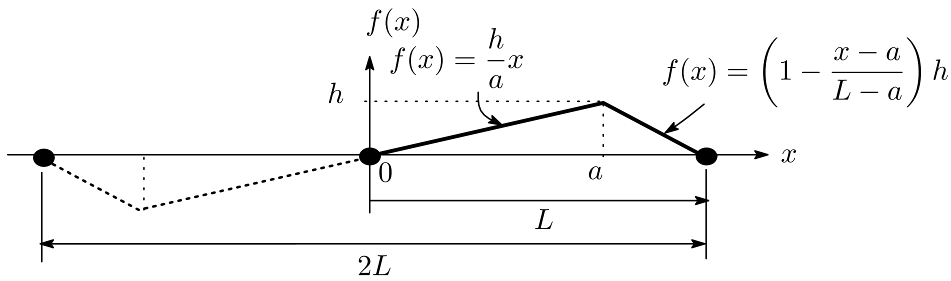
と表され，係数 b_n を**フーリエ正弦係数**と呼んでいます。関数の偶奇性が分かれば計算の手間がかなり省けます。なお，下表に周期を $2L$ とした場合のフーリエ級数とフーリエ係数をまとめておきました。

	フーリエ級数	フーリエ係数
関数	$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x)$	$a_n = \dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos n\omega_0 x dx$ $b_n = \dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\omega_0 x dx$
偶関数	$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x, \quad b_n = 0$	$a_n = \dfrac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos n\omega_0 x dx$
奇関数	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 x, \quad a_n = 0$	$b_n = \dfrac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin n\omega_0 x dx$

[4]倍音は基本音の周波数の整数倍の周波数を持つ音もことで，2 倍音，3 倍音等々は周波数が 2 倍，3 倍等の音です。
[5](偶関数 × 偶関数) は偶関数。(奇関数 × 奇関数) は偶関数。(偶関数 × 奇関数) は奇関数。

(2) 弦の振動とフーリエ級数

『物理・生物コーナ』にアップした「弦の振動と音色について」の (10) 式を導いておきます。
弦の振動の定常波は区間 $0 \leqq x \leqq L$ で与えられていて，この区間でのフーリエ級数が問題となります。



そのために，区間 $0 \leqq x \leqq L$ は $-L \leqq x \leqq L$ の右半分であると考え，図に示すように弦の変位関数 $f(x)$ を左半分の $-L \leqq x \leqq 0$ にまで**奇関数として拡張**します。そうすると $f(x)$ のフーリエ級数は

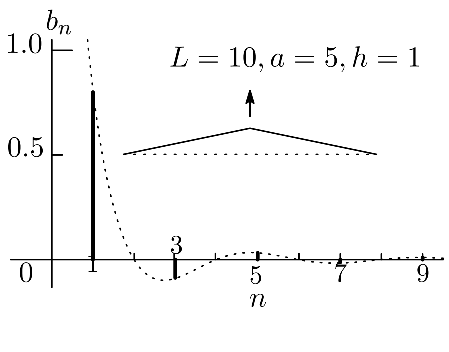
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 x, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin n\omega_0 x dx, \qquad \omega_0 = \pi/L \tag{12}$$

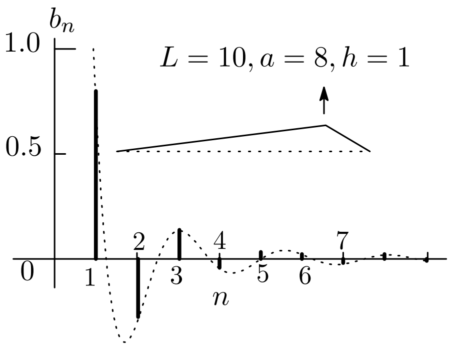
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{a}x & , \quad 0 \leqq x < a \\ \left(1 - \dfrac{x-a}{L-a}\right)h & , \quad a < x \leqq 2L \end{cases}$$

となり，フーリエ係数 b_n は

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\left\{\int_0^a \frac{h}{a} \sin\frac{n\pi x}{L} x dx + \int_a^L \left(1 - \frac{x-a}{L-a}h\right) \sin\frac{n\pi x}{L} dx\right\} \\ &= \frac{2hL(a \sin n\pi - L \sin\frac{an\pi}{L})}{a(a-L)n^2\pi^2} \\ &= \frac{2}{\pi^2}\frac{L^2 h}{a(L-a)}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

弦の中央で爪弾くと奇数の倍音だけが発生することが分かります[6]。

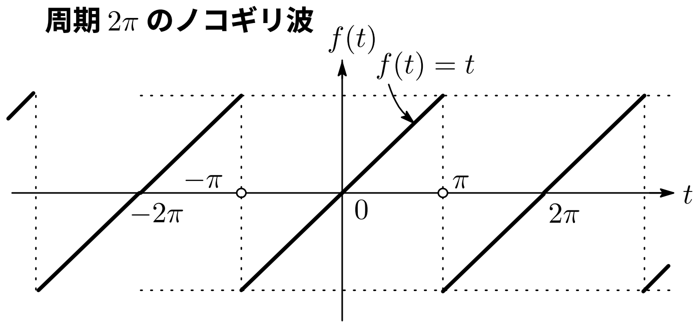




[6] クラシックギターでの pp（ピアニッシモ）の音色は単純化すれば奇数倍音で構成されていることになります。

(3) ノコギリ波のフーリエ級数

$-\pi < t < \pi$ で $f(t) = t$ で与えられる周期が $T = 2\pi\,(\omega_0 = 1)$ のノコギリ波のフーリエ級数を求めます。



フーリエ係数を求めると

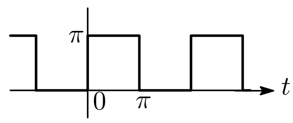
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tdt = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos ntdt = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin ntdt = -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

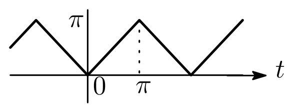
となります[7]。したがって，求めるフーリエ級数は

$$
f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)
$$

これは (1) で登場したものですね。ノコギリ波は整数倍の倍音成分で構成されていることが分かります。

具体的な計算は省略しますが，右図に示す周期が $T = 2\pi$ の矩形波と三角波のフーリエ級数は次のようになります。





$$
\text{矩形波：} f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)
$$

$$
\text{三角波：} f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right)
$$

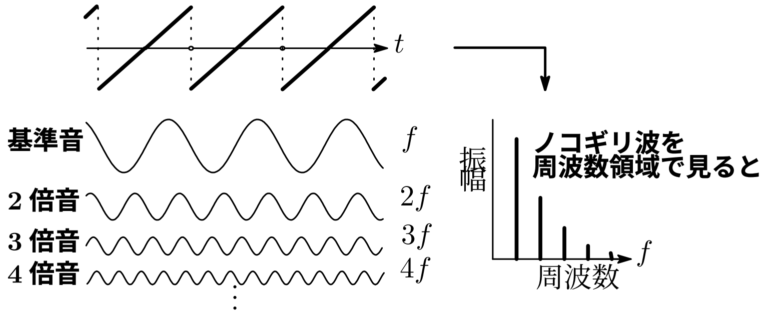
これら 2 つの波は，いずれも奇数の倍音成分だけを含むことが分かります。中でも，三角波の高次の倍音成分が含まれる割合は矩形波に比べて大変小さくなっていくことが分かります。

(4) 時間領域から周波数領域へ

ノコギリ波の音を聞くと[8]，たしかにノコギリで挽くようなザラザラ（？）とした感じの音がしますね。いろいろな楽器の音はシンセサイザーでいろいろな音を組み合わせてつくられていますが，このとき音の倍音成分が重要なポイントになっています。

音つくりについてシンセサイザー研究室[9]から引用させていただくと

[7] ノコギリ波は奇関数なので具体的に計算しなくてもフーリエ余弦係数は 0 になる。
[8] http://www2.yamaha.co.jp/u/naruhodo/18synthesizer/synthesizer2.html
[9] https://synth-voice.sakura.ne.jp/synth-voice/html5/synth-basic01.html



●**ノコギリ波** ノコギリの形をした波形です。全ての整数倍音と呼ばれる音の成分を持った波形で、バイオリンなどの弦楽器、トランペットなどの管楽器を作るのに適しています。ブラス、ストリングス、リード、ベースなど色々な音色に使えます。

●**矩形波** ノコギリ波から偶数倍音を取っ払った波形で，奇数倍音だけの波形です。クラリネットなどの木管楽器、ハープ、マリンバなどの音色に適しています。

●**パルス波** ファミコンなどで使われてた波形で、心臓の心電図みたいな波形です。ギターなどの引っ掻く楽器、サックスやオーボエなどのリード音色に適しています。

●**三角波** 三角形の形をした波形です。これもファミコンで使われてた波形で倍音をあまり多く含まない波形です。リコーダーやフルートに適しています。

●**サイン波** このサイン波を音程を変えて何個か重ねるとオルガンの音になります。ロータリースピーカー（回転するスピーカー）で音を出したりディストーションエフェクトで汚すとロックオルガンになります。

フーリエ級数展開をすることにより，いま問題としている波はどんな周波数の波からできあがっているのかが分かるわけで，フーリエ級数は音作りや音の解析には必須の道具となる故です。

第 2 話. 複素フーリエ級数とはなんだ

複素フーリエ級数というと難しそうで物怖じしそうになりますが，複素数を使ってフーリエ級数を簡潔に表して見通しよくし，計算を簡単にしようといった内容のお話です。

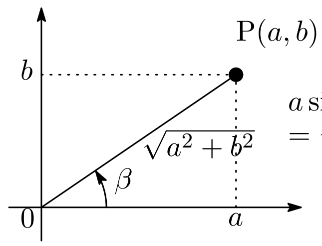
2.1 複素数を使えばフーリエ級数が簡潔に表せる

フーリエ級数に再度登場してもらいます。

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \qquad (\omega_0 = 2\pi/T) \tag{14}$$

この式を簡潔にするために次の三角関数の合成公式を使ってみます。

$$\begin{aligned} &a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\beta) \\ &\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$



$a\sin\theta + b\cos\theta$
$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\beta)$

この公式を使ってフーリエ級数を書きなおすと

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin(a_n\omega_0 t + \beta_n)\right\}$$

一見うまくいったかのようですが，β_n という位相因子が顔をだすのでうまくありません。そこで指数関数と三角関数を結びつける次の**オイラーの公式**に登場してもらいましょう。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (i\text{：複素数}) \tag{15}$$

これから，三角関数は次のように指数関数で表せることが容易にわかりますね。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{16}$$

これを使ってフーリエ級数 (14) を書きなおすと

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\frac{e^{in\omega_0 t}+e^{-in\omega_0 t}}{2} + b_n\frac{e^{in\omega_0 t}-e^{-in\omega_0 t}}{2i}\right\} \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(a_n - ib_n)e^{in\omega_0 t} + (a_n+ib_n)e^{-in\omega_0 t}\right\} \end{aligned}$$

となり，係数を

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \tag{17}$$

と書き換え[10]ると，フーリエ級数は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{18}$$

と簡潔に表すことができました。整数 n の範囲は $[0, \infty]$ から $[-\infty, \infty]$ に拡張されていることに留意してください。係数 c_n は

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left[\cos(n\omega_0 t) - i\sin(n\omega_0 t)\right] dt\right\} \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt \end{aligned} \tag{19}$$

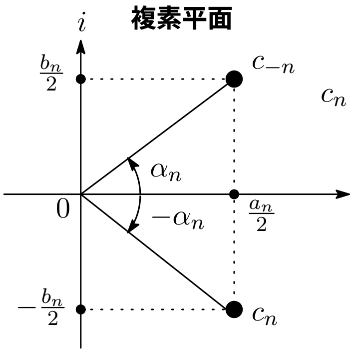
となります。(18) の表式を**複素フーリエ級数**，係数 c_n を (19) を**複素フーリエ係数**といいます。

■振幅スペクトル・パワースペクトルと位相スペクトル

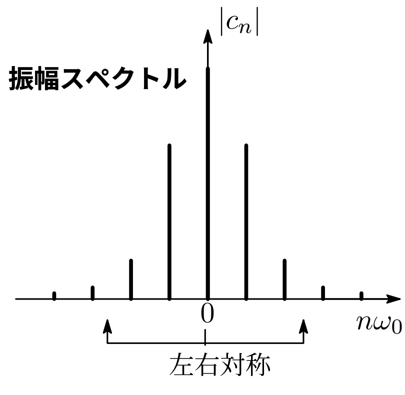
c_n の絶対値

$$|c_n| = |c_{-n}| = \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \tag{20}$$

を**振幅スペクトル**[11]，その 2 乗 $|c_n|^2$ を**パワースペクトル**と呼んでいます。**振幅スペクトルやパワースペクトルは波形の中に周波数 n の成分（第 n 倍音）がどれくらいの大きさで含まれているかを示す重要な量**で，下の右の図に示すように飛び飛びの値をとります[12]。また，(20) からわかるように n と $-n$ の場合で振幅スペクトル A_n の値は同じになるので，振幅スペクトルのグラフは原点を中心に左右対称のグラフとなります。



$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{2}(\cos\alpha_n - i\sin\alpha_n) \\ &= |c_n|\, e^{-i\alpha_n} \end{aligned}$$



c_n が実軸となす角を偏角といい，arg という記号で表すと

$$\arg c_n = \alpha_n = \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} \tag{21}$$

これは周波数の関数で，**位相スペクトル**と呼んでいます[13]。

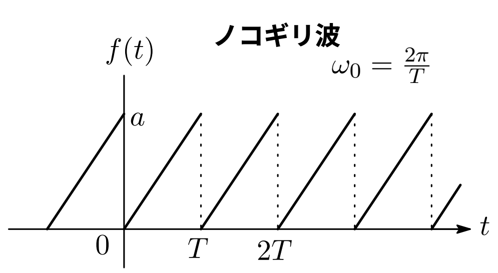
それでは，複素フーリエ級数を使って周期が T のノコギリ波の振幅スペクトルを求めてみましょう。

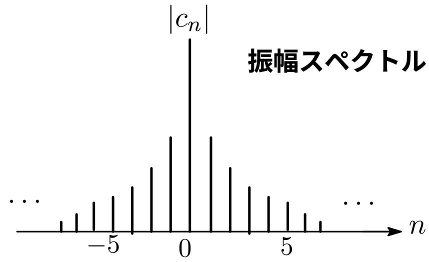
[10] c_n と c_{-n} は複素共役の関係にあります。元のフーリエ係数との関係は $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$

[11] スペクトルというのは周波数に対する各成分の分布のことをいいます。

[12] このようなスペクトルを離散スペクトルといいます。

[13] 通常，一番知りたい情報は波形 $f(t)$ にどんな周波数成分が含まれるかということなので，位相スペクトルをとりあげることは少ないです。





複素フーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}dt$$

$0 \leq t < T$ のとき $f(t) = at/T$ なので

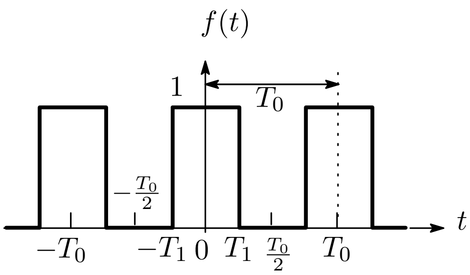
$$c_n = \frac{a}{T^2}\int_0^T t\, e^{-i2n\pi t/T}dt$$

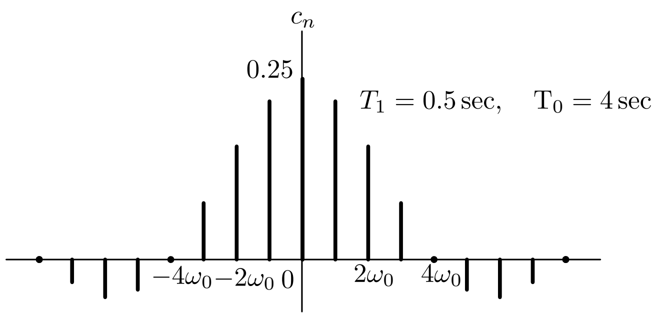
$n = 0$ の場合は $c_0 = a/2$ となり，$n \neq 0$ の場合は

$$c_n = \frac{a}{T^2}\int_0^T t\, e^{-i2n\pi t/T}dt = \frac{ia}{2n\pi}$$

となります。

次に，周期が T_0 の矩形波の複素フーリエ係数を求めます。





$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leqq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T_0/2 \end{cases}$$

複素フーリエ係数は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{in\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\left\{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{-T_1} f(t)e^{in\omega_0 t}dt + \int_{-T_1}^{T_1} f(t)e^{in\omega_0 t}dt + \int_{T_1}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{in\omega_0 t}dt\right\} \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} 1\cdot e^{in\omega_0 t}dt = \begin{cases} \dfrac{2T_1}{T_0} & n = 0 \\[2ex] 2\dfrac{T_1}{T_0}\dfrac{\sin n\omega_0 T_1}{n\omega_0 T_1} & n = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases} \end{aligned} \tag{22}$$

第 3 話. フーリエ変換とは

いままで扱ってきた関数は $f(t+T)=f(t)$ を満たすは周期関数でした。しかし，周期性をもたない現象はたくさんありますね。例えば，1 発だけドカンとなる音は周期性がありません。このような非周期関数にはフーリエ級数展開が適用できないのか，大いに気になるところです。

ここは柔軟に考えて，非周期関数といえども無限遠の彼方で周期性をもつ，つまり 1 周期の範囲を無限に広げた周期関数と考えればフーリエ級数がよみがえってきますね。フーリエ変換はこのような非周期関数を相手にしたフーリエ級数なのです

3.1 非周期関数とフーリエ変換

周期が $2L$ の周期関数を $f_L(t)$ と書くと

$$f_L(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega_0 t},\quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(t)e^{-in\omega_0 t}dt$$

と表すことができました。c_n は $f_L(t)$ を構成する周波数成分 $n\omega_0$ の成分の大きさを抽出した複素フーリエ係数です。両式をまとめると

$$f_L(t)=\frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-L}^{L}f_L(\tau)e^{-in\omega_0\tau}d\tau\cdot e^{in\omega_0 t} \tag{23}$$

ここで

$$n\omega_0=\omega_n=n\frac{\pi}{L},\quad \Delta\omega_0=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{\pi}{L} \tag{24}$$

とおくと (23) は

$$f_L(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-L}^{L}f_L(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right\}e^{i\omega_n t}\Delta\omega_0=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega_n)\cdot e^{i\omega_n t}\Delta\omega_0 \tag{25}$$

となります。ただし

$$F(\omega_n)=\int_{-L}^{L}f_L(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$$

周期 $2L$ を無限に大きくすると，周期関数 $f_L(t)$ は非周期関数 $f(t)$ に移行します。

$$\lim_{L\to\infty}f_L(t)\longrightarrow f(t)$$

$L\to\infty$ に伴い $\Delta\omega_0(=\pi/L)\to 0$ となり[14]，さらに n は無限大に接近するので，$n\Delta\omega_0$ はとびとびの離散した周波数から連続した周波数（ω）に接近します。すなわち，$\Delta\omega_0\to d\omega,\ \omega_n\to\omega$ として扱うことができ，(25) の右辺は次の積分に置き換えられます。

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega_n)e^{i\omega_n t}\Delta\omega_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}\right\}e^{i\omega t}d\omega$$

このようにして，非周期関数は

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right\}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega(\tau-t)}d\tau \tag{26}$$

[14] 間隔が無限小となる。

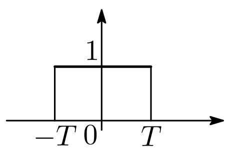
と表すことができます。この式を**フーリエの積分公式**といいます。これはまた次のように書きなおすこともできます。

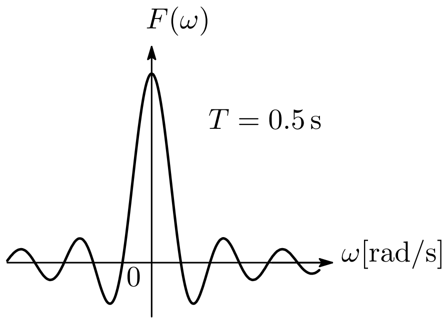
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{27}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{28}$$

$F(\omega)$ は時間領域の関数 $f(t)$ を周波数領域の関数 $F(\omega)$ へと変換 しています。(27) を $f(t)$ の**フーリエ変換**といい，(28) を $F(\omega)$ の**フーリエ逆変換**と呼んでいます。

それでは次の非周期関数である時間関数 $f(t)$ をフーリエ変換してみましょう。





$$f(t)=\begin{cases}1 & (-T \leqq t \leqq T)\\ 0 & (|t|>T)\end{cases}$$

フーリエ変換すると[15]

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{-T}0\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{-T}^{T}1\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{T}^{\infty}0\cdot e^{-i\omega t}dt\\&=2T\frac{\sin\omega T}{\omega T}\ (=2T\mathrm{sinc}\,\omega T)\end{aligned} \tag{29}$$

もう一つ

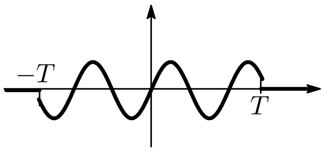
$$\begin{cases}f(t)=\sin\omega_0 t & (-T \leqq t \leqq T\\ 0 & (t<-T,\, t>T)\end{cases}$$

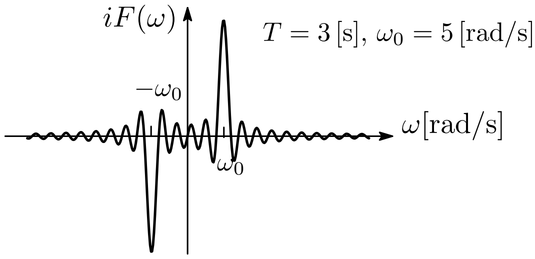
といった非周期正弦波をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega_0 t e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{-T}0\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{-T}^{T}\sin\omega_0 t e^{-i\omega t}dt+\int_{T}^{\infty}0\cdot e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-T}^{T}\sin\omega_0 t e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2i}\int_{-T}^{T}\left\{e^{-i(\omega-\omega 0)t}-e^{-(\omega+\omega_0)t}\right\}dt\\&=i\left\{\frac{\sin(\omega+\omega_0)T}{\omega+\omega_0}-\frac{\sin(\omega-\omega_0)T}{\omega-\omega_0}\right\}\end{aligned}$$

となります。

[15]sinc はジンク関数とかカーディナル・サインと呼ばれ，$\mathrm{sinc}x=\sin x/x$ で定義されます。





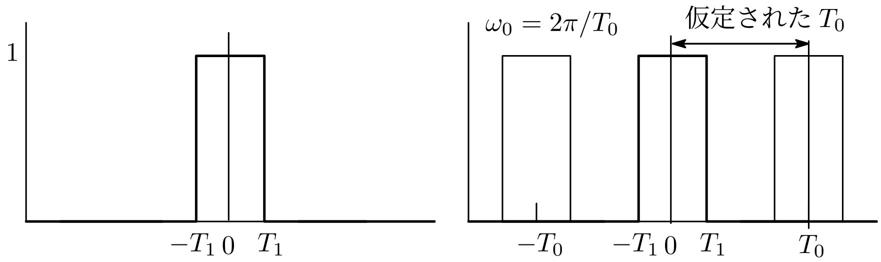
■偶関数・奇関数のフーリエ変換

$f(t)$ が偶関数と奇関数である場合のフーリエ変換式を示しておきます。

- $f(t)$ が偶関数：$F(\omega) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega t dt$
- $f(t)$ が奇関数：$F(\omega) = -2i\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega t dt$

■周期関数と非周期関数との関係

フーリエ変換の式を周期関数と非周期関数との関係から見てみます。



左の図の非周期関数 $f(t)$ のフーリエ変換は，すでに見てきたように

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-T_1}^{T_1} f(t)e^{-i\omega t}dt = 2T_1\frac{\sin\omega T_1}{\omega T_1} = F(\omega) \tag{30}$$

一方，右の周期 T_0 の周期関数 $f_L(t)$ のフーリエ係数は

$$f(t) = f_L(t), \qquad -T_1 < t < T_1 \tag{31}$$

が成立することに注意すると

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} f_L(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}2T_1\frac{\sin n\omega_0 T_1}{n\omega_0 T_1} = \frac{1}{T_0}F(n\omega_0) \tag{32}$$

となります。このことから次の結論が得られます。

- フーリエ係数 c_n は $F(n\omega_0)$ を $1/T_0$ 倍したものに一致する。
- $\omega_0 = 2\pi/T_0$ は仮定される周期 T_0 により決定される。

さて，すでに見てきたように，フーリエ変換は，フーリエ級数では対象外であった非周期波形をも取り扱えるように有限な周期を T →∞とすることで理論的に拡張したものでした。したがって，フー

リエ変換を実際の計測で使うには，無限の過去から無限の未来までの波形を観測する必要があります。しかし，そのようなことは不可能なので，実際上は，ある一定の有限期間だけ波形を観測し、その観測期間を基本周期とするフーリエ級数を求めることでフーリエ変換を近似的に求めています。このために，計測によって得られるスペクトルは本来の波形から得られる真のスペクトルとは異なる特性となることに注意が必要です。

以上，当初の予定を越えて話が長くなってしまった… 他の話題はまた次の機会に。

2017.03.20 by KENZOU

余禄 —— 興味がなければスルーしてください。

●フーリエ変換型の複素積分（$a>0$，k：実数）[16]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x-ia}dx=\begin{cases}2\pi ie^{-ka} & (k>0)\\ 0 & (k<0)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x+ia}dx=\begin{cases}0 & (k>0)\\ -2\pi ie^{ka} & (k<0)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx=\begin{cases}i\pi e^{-ka} & (k>0)\\ -i\pi e^{ka} & (k<0)\end{cases}$$

●微分のフーリエ変換

1 階微分　$\mathcal{F}\left[f'(t)\right]=i\omega\mathcal{F}\left[f(t)\right]=i\omega F(\omega)\qquad(\mathcal{F}\left[f(t)\right]=F(\omega))$

n 階微分　$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(i\omega)^n\mathcal{F}\left[f(t)\right]$

これを使うと 2 階線形常微分方程式が代数方程式になる。

$$a_1\frac{d^2g(t)}{dt^2}+a_2\frac{dg(t)}{dt}+a_3g(t)=f(t)$$

をフーリエ変換すると次の代数方程式となる。

$$\begin{aligned}&a_1(i\omega)^2G(\omega)+a_2(i\omega)G(\omega)+a_3G(\omega)=F(\omega)\\&\left[(i\omega)^2a_1+(i\omega)a_2+a_3\right]G(\omega)=F(\omega)\\\therefore\quad&G(\omega)=\frac{F(\omega)}{(i\omega)^2a_1+(i\omega)a_2+a_3}\end{aligned}$$

$G(\omega)$ をフーリエ逆変換して $g(t)$ が求められる。
例えば次の微分方程式を解いてみます。

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)=V\delta(t)$$

[16]留数計算

両辺をフーリエ変換して

$$\omega L\mathcal{I}(t) + R\mathcal{I}(t) = E, \qquad \therefore\ \mathcal{I}(t) = \frac{E}{R + i\omega L}$$

$$\left(\mathcal{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)e^{-i\omega t}dt, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1\right)$$

逆フーリエ変換し，フーリエ変換型の複素積分公式を使えば

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{E}{2\pi i}\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\frac{R}{L}}d\omega = \frac{E}{L}e^{-(R/L)t}$$

2017.03.27