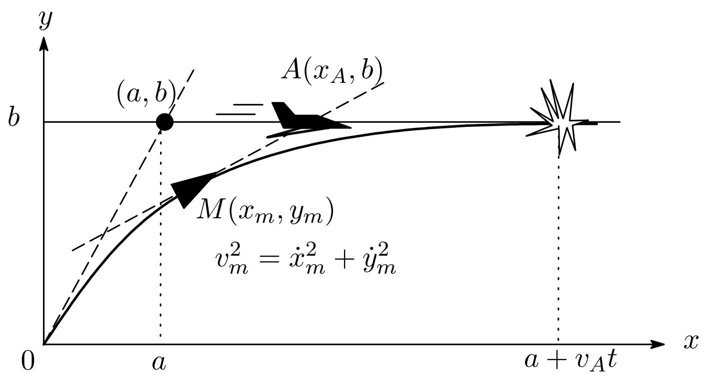
1. ミサイルの追撃

2017.7.13 by KENZOU

30 度を超える猛暑が続くある日，久しぶりにコニーがやってきた。

- コニー：毎日暑いわねー，K さんお変わりないですか？
- K氏：やぁ，コニー，久しぶりだけど相変わらず元気そうだね。こちらは暑さで少し参っているよ。
- コニー：熱中症にかからないように気を付けてくださいね。ところで今日は暑気払いをかねて何か面白い話でも聞けないかとお伺いしたのだけど出直した方がよいかしら。
- K氏：折角来てくれたんだ，そういうわけにもいかないだろう。そうだね 。。。う〜ん，いま北朝鮮の ICBM 大陸弾道ミサイルがいろいろ話題に上がっているだろ。ミサイルが日本に飛んできたら「屋外にいる場合、頑丈な建物や地下に避難してください。」とか，いろいろ放送で流れているね。物騒な時代になっものだが，話題としてミサイルの追撃を取り上げてみようか。
- コニー：どういった内容なの？
- K氏：うん，上空を飛翔するジェット機をミサイルで追撃するといった内容だけど。ミサイルの弾道軌跡と追撃までの時間を求めるといったもの。。。
- コニー：ふ〜ん，あまり感心した内容じゃないけど，お話は聞くわ。
- K氏：OK。ミサイルはジェット機から噴き出る赤外線をキャッチして常に目標に向かって飛んでいくいわゆる誘導ミサイルだ。ミサイルとジェット機の位置関係は，$t = 0$ で原点 $(0, 0)$ にミサイルがあり，ジェット機は xy 座標の (a, b) の位置にいたとする。ジェット機は水平方向に一定の速度 v_A で飛んでいて，ミサイルも一定の速さ v_m をもつとしよう。ミサイルの速さはジェット機のより速くなければ追撃できないので $v_A < v_m$ としよう。

  さて，時刻 t におけるミサイルの位置を (x_m, y_m)，ジェットの位置を (x_A, b) としよう。両者の位置関係は図に示す通りだね。



- コニー：え〜っと，ミサイルは常にジェット機に向かって飛んでいくので，ミサイルの弾道曲線の時刻 t での接線上にジェット機は常に位置しているというわけね。
- K氏：そうだね。接線の方程式は傾きが $\dfrac{dy_m}{dx_m}$ で点 (x_m, y_m) を通る直線の方程式だから

$$y - y_m = \frac{dy_m}{dx_m}(x - x_m) = \left(\frac{dy_m}{dt}\Bigg/\frac{dx_m}{dt}\right)(x - x_m)$$

となる。この直線は点 (x_A, b) を通るので，$x_A = a + v_A t$ であることを考慮すれば

$$b - y_m = (\dot{y}_m/\dot{x}_m)(a + v_A t - x_m)$$

が得られる。ところで変数 x, y に付けた添え字の m はもう要をなさないので省いて整理すると

$$\dot{x}(b - y) = \dot{y}(a + v_A t - x) \tag{1.1}$$

となるだろう。

- コニー：そうね。しかし，微分方程式が 1 つで変数は 2 つあるのでこれだけでは解けないわね。
- K氏：そうなんだ。もう一つの式は

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_m^2 \tag{1.2}$$

だね。これで 2 つ揃ったから $x(0) = y(0) = 0$ の境界条件のもとで解けばいいわけだ。しかし，2 つあれば何かと面倒なので時間微分をやめて位置微分に変えるという細工をしてやる。そうすると次の一つの微分方程式にまとめることができるだろう。

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(b - y) = \dot{y}(a + v_A t - x) \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_m^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{d^2x}{dy^2}(b - y) = c\left[1 + (dx/dy)^2\right]^{1/2}, \quad c = v_A/v_m \tag{1.3}$$

- コニー：ちょっと待ってね。第 1 式は

$$\frac{dx}{dt}(b - y) = \frac{dy}{dt}(a + v_A t - x), \quad \therefore \frac{dx}{dy}(b - y) = a + v_A t - x \tag{1.4}$$

と書け，第 2 式は

$$\dot{y}^2\left(1 + (\dot{x}/\dot{y})^2\right) = \dot{y}^2\left(1 + (dx/dx)^2\right) = v_m^2 \tag{1.5}$$

と変形できるわね。

- K氏：そうなんだ。そこで (1.4) を時間微分してやると。。。
- コニー：時間微分すれば $A = dx/dt$, $B = b - y$ とおいて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(AB) &= \frac{dA}{dy}\frac{dy}{dt}B + A\frac{dB}{dy}\frac{dy}{dt} = v_A - \frac{dx}{dt} \\ \therefore \frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{dt}(b - y) - \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} &= \frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{dt}(b - y) - \frac{dx}{dt} = v_A - \frac{dx}{dt} \\ \therefore \frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{dt}(b - y) &= v_A \end{aligned} \tag{1.6}$$

となるわ。

- K氏：そうだね。(1.5) より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{v_m}{[1 + (dx/dy)^2]^{1/2}}$$

だから，これを (1.6) に入れると

$$\frac{d^2x}{dy^2}(b - y) = c[1 + (dx/dy)^2]^{1/2}, \quad c = v_A/v_m$$

が得られる。これがミサイルの弾道を決める微分方程式だ。

- コニー：なるほど，了解したわ。この微分方程式を解いてミサイルの弾道の式を求めていくことになるのね。いわゆる 2 階の非線形微分方程式というヤツね。

- K氏：そうなんだ。チョットやってみるかい。微分方程式の演習問題みたいだけど。

- コニー：そうね。。。ややこしい形しているけど $p = dx/dy$ とおいて微分の階数を下げるという常套手段を使えば

$$\frac{dp}{dy}(b-y) = c(1+p^2)^{1/2}$$

となるわ。これは

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{1/2}} = c\frac{dy}{(b-y)}$$

と変形できるから，積分定数を K として積分すると

$$\int \frac{1}{(1+p^2)^{1/2}}dp = c\int \frac{1}{(b-y)}dy, \quad \therefore\ \ln[p+(1+p^2)^{1/2}] = -c\ln(b-y)+K \tag{1.7}$$

が得られ。積分定数 K は初期条件を放り込んで求めるわけだけど，少し厄介ね！

- K氏：うん。だけど $p = dx/dy$ はミサイルの弾道軌跡の接線の傾きの逆数だね。これに目を付ければいいんだ。原点での接線の傾きの逆数は $p = a/b$ だろう。$p = a/b = d$, $f = d+(1+d^2)^{1/2}$ とおいて上の式を整理してやると積分定数 K は

$$K = \ln[d+(1+d^2)^{1/2}] + c\ln b = \ln(f\,b^c)$$

と求めることができる。

- コニー：なるほどね。そうすると，K を (1.7) に入れて

$$\ln[p+(1+p^2)^{1/2}] = \ln(b-y)^{-c} + \ln(f\,b^c) = \ln\left[\frac{f\,b^c}{(b-y)^c}\right]$$

ここで対数を外すと

$$(1+p^2)^{1/2} = \frac{fb^2}{(b-y)^c} - p$$

となるわね。両辺を 2 乗して整理すれば

$$1+p^2 = \frac{f^2b^{2c}}{(b-y)^{2c}} - 2\frac{pf\,b^c}{(b-y)^c} + p^2$$
$$\therefore\ p = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left\{\frac{fb^c}{(b-y)^c} - \frac{(b-y)^c}{fb^c}\right\}$$

が得られる。

- K氏：そうだね。一見ややこしそうな形をしているけど。。。

- コニー：そうね，見かけはややこしそうだけど $b-y=Y$, $A=fb^c$ とおいやれば $dy=-dY$ に注意して

$$dx = -\frac{1}{2}\left\{\frac{A}{Y^c} - \frac{Y^c}{A}\right\}dY$$

と簡単な 1 階微分方程式となるわ。これはすぐに積分できて

$$x = \frac{1}{2}\left\{\frac{Y^{1+c}}{A(1+c)} - \frac{AY^{1-c}}{1-c}\right\} + K_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{f\,b^c(b-y)^{1-c}}{(c-1)} + \frac{(b-y)^{1+c}}{(c+1)f\,b^c}\right\} + K_1 \tag{1.8}$$

これがミサイルの弾道の方程式ね。積分定数 K_1 は初期条件 $x = y = 0$ を代入して

$$K_1 = \frac{b\{(f^2+1)c + f^2 - 1\}}{2f(1-c^2)}$$

と求められる。

- K氏：そうだね。ミサイルがジェット機を追撃して撃墜する位置は $x = a + v_A t,\ y = b$ だからミサイルが発射されてジェット機を追撃墜するまでの時間（sec）を t とすると

  $$a + v_A t = K_1, \quad \therefore\ t = (K_1 - a)/v_A \tag{1.9}$$

  で与えられる。そして撃墜する位置は

  $$x = a + v_A t = K_1, \quad y = b \tag{1.10}$$

  となるわけだね。

- コニー：そうなんだ。例えばジェット機が高度 5000m の上空を飛んでいて $t = 0$ で $b = 3000$m の位置にいたとする。ジェット機の速さを秒速 1000m（$v_A = 1000$），ミサイルの速さを秒速 $v_m = 2000$m とすると撃墜するまでの時間は $t = 5.554$ 秒，撃墜位置は $x = 10554$m, $y = 3000$m となるわね。また，ミサイルの速さを秒速 $v_m = 4000$m とすると追撃撃までの時間は 1.89 秒となるわね。

  ありがとう，なかなか面白いお話だったわ，少しホットになったけど。そろそろ陽も少し翳ってきたようね。それじゃそろそろ失礼するわ。

- K氏：気を付けてね。またいらっしゃい。

- コニー：今日はありがとう。K さんもお体を大切にしてください。さようなら。

————————————————————

・参考文献：D. バージェス，M. ポリー（垣田高夫・大町比佐栄 訳）「微分方程式で数学モデルを作ろう」（日本評論社，2002）