

感染症流行モデル ver.2.2

2020.4.17 by KENZOU

新型コロナウイルスが猛威を振っていますね。コロナというのは太陽の火災のイメージからネーミングされたそうですが、中国湖北省武漢市から発した新型コロナウイルス。中国以外ですでに約40カ国で感染が確認され、中国を含む世界全体の感染者数は8万人を超えたといわれています(2月26日WHO情報)。小生も騒がれ始めてからアルコール消毒スプレーを買いに走ったのですが、既にどこも売り切れで、防疫意識の高さを痛感しました。入荷予定はまったく立たないとのことなので、自衛手段として手洗い励行、アルコールティッシュなどで対処しています。

以上は3月7日にUPLDしたレポートの序文ですが、4月に入った現時点では新型コロナウイルスの感染者は世界全体の累計で82万人を超え、死者は4万人を上回るに至っています。くれぐれも感染対策に万全の注意が必要です。ver.2.2では付録に総人口数で規格化したSIRモデルとExcelでのシミュレーションを載せました。

1. もっともシンプルなモデル

まず小手調べとして、未感染者が感染者に接触したときに伝染が起こり、一度感染すると二度目は感染しないという免疫は一切考慮しないというもっともシンプルなモデルを考えます。

いま、人口が N の都市で伝染病が発生しました。他都市からの人の出入りはないものとします。ある時刻において未感染者の数を $S(t)$ 、感染者の数を $I(t)$ とすると、この都市の全人口は一定なので

$$I(t) = N - S(t) \quad (1.1)$$

さて、感染は未感染者が感染者と接触することで広がるとすると、単位時間(期間)あたりの感染者の発生 dI/dt は未感染者の数 $S(t)$ と感染者の数 $I(t)$ の積に比例すると考えられるので

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) = \beta S(N - S) \quad (1.2)$$

と表せます。 β は感染率¹です。(1.1)より $dI/dt = -dS/dt$ となるので、これを(1.2)に入れると

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI = \beta S(S - N) \quad (1.3)$$

となり、未感染者数 $S(t)$ の単位時間当たりの変化率を表す方程式が得られます。なお、(1.2)と(1.3)を足し合わせると

$$\frac{d}{dt}(I + S) = 0, \quad \therefore I + S = \text{一定}(N) \quad (1.4)$$

で、都市人口は変わらないことに対応しています。

(1.3)は変数分離型の微分方程式で両辺を

$$\frac{1}{S(S - N)} dS = \left(\frac{1}{S - N} - \frac{1}{S} \right) dS = N\beta dt$$

と書き直すと容易に積分できて

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{S - N}{S} \right| &= N\beta t + C \quad (C: \text{積分定数}) \\ \therefore \frac{S - N}{S} &= \pm e^{N\beta t + C} = \pm e^C e^{N\beta t} = A e^{N\beta t} \quad (A = \pm e^C) \end{aligned}$$

¹集団の人数を N 、1人が毎日接触する人数を平均 m 人、それぞれの接触ごとに感染が生じる1日あたりの確率を p とすると $\beta = mp/N$ 。

となり，時刻 t における未感染者の数は

$$S(t) = \frac{N}{1 - Ae^{N\beta t}} \quad (1.5)$$

と得られます。積分定数は時刻 $t=0$ で $I(0) = 1$ ， $S(0) = N - 1$ として (1.5) より

$$S(0) = N - 1 = \frac{N}{1 - A}, \quad \therefore A = \frac{1}{1 - N}$$

と求められ，(1.5) は

$$S(t) = \frac{N(N - 1)}{N - 1 + e^{N\beta t}} \quad (1.6)$$

感染者の増加率 $v(t) \equiv dI/dt$ は (1.2) と (1.6) より

$$v(t) = \frac{dI}{dt} = \beta S(N - S) = \frac{\beta(N - 1)N^2 e^{N\beta t}}{(N - 1 + e^{N\beta t})^2} \quad (1.7)$$

また，時刻 t における感染者の総数を $I(t)$ とすると

$$I(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{(N - 1)(e^{N\beta t} - 1)}{N - 1 + e^{N\beta t}} \quad (1.8)$$

いま，人口が N の都市に 1 人の感染者が紛れ込んだ場合の感染の拡がり具合を見てみましょう。図 1 に都市人口 $N = 10,000$ 人，感染率 $\beta = 0.0001$ とした場合の $S(t)$ ， $I(t)$ ， $v(t)$ のグラフを示します。

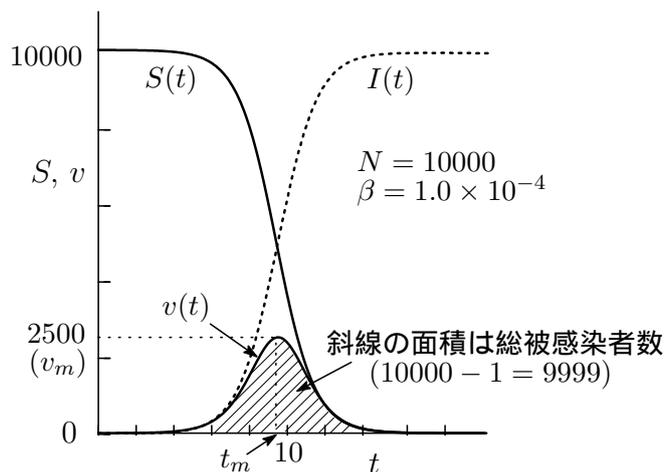


図 1: シンプルモデル

感染者の増加率 $v(t)$ はある時刻でピークを示し，それを過ぎると急速に減少に転じて最後は 0 となります（全員が感染すればそれ以上感染は拡がらない ^^;）

感染者増加率のピーク値を v_m ，またその時刻を t_m とすると， $t = t_m$ で $dv/dt = 0$ となるので

$$t_m = \frac{\ln(N - 1)}{\beta N}, \quad v_m = \frac{\beta N^2}{4} \quad (1.9)$$

が得られます。いま仮に時刻 t の刻み幅を 1 日とすると，感染は最初は緩慢に広がるが 4 日目辺りから急速に拡大しはじめ，9 日目あたりで一日あたり 2500 名が感染するというピークを迎え，その後感染は終息に向かうという推移となります。

2.SIR モデル

ケルマックとマッケンドリックが 1927 年に発表した伝染病流行モデル²で、現代の感染症流行モデルの基礎となった古典的モデルといわれています。具体的に見ていきましょう。

外部からの人の出入りはない閉ざされた人口集団に伝染病が発生したとし、この集団を次の 3 つのクラスの分類し、各クラスの時間変化追跡していきます。

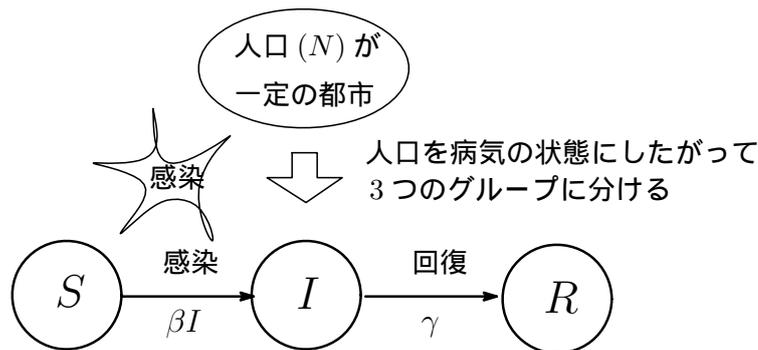
- (1) 感受性保持者 (Susceptible) = まだ病気に感染していなくて (免疫なし) 感染の可能性のある人
- (2) 感染者 (Infectious) = 病気に感染して感染させる能力のある人
- (3) 免疫保持者 (Removed) = 病気から回復した免疫保持者

それぞれの頭文字をとって「SIR モデル」(Susceptible Infectious Recoverd model) と呼ばれます。全人口は一定としているので

$$S + I + R = N \tag{2.1}$$

SIR モデルでは次の 3 つの仮定をおきます³。

1. 感受性保持者は感染者との接触により感染する
感染症は S と I の接触においてのみ発生し、 S と S , S と R , I と R , 等々の接触では発生しない
2. 感染者 I は感受性保持者 S と感染者 I の積に比例する
 S と I 両方が多いと感染症の広がり速度は速く、どちらか、あるいは両方が少ないと遅い
3. 感染者 I は一定の率で免疫保持者 R に移行する
ある感染期間を経て免疫保持者となる



$S \rightarrow I : \beta I, I \rightarrow R : \gamma$ という率で状態が遷移する

図 2: SIR モデルの状態遷移図

このモデルの基本的な特徴は、感染力 (感受性保持者の単位時間あたりの感染率) は感染人口サイズに比例、感染者は一定の率で回復ないし隔離されるということで、次の連立微分方程式で表されます。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \tag{2.2}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) = (S(t) - \rho) \beta I(t), \quad (\rho = \gamma/\beta) \tag{2.3}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \tag{2.4}$$

²W.O.Kermack and A.G.McKendrick, "Contributions to the mathematical theory of epidemics I, Proc.Roy.Soc 115A,1927

³最初に取り上げたもっとも簡単なモデルは SIR モデルの仮定 3 を含まないのに当たりますね。

ここで、

- β : 感染率 ($\beta = mp/N$: 1 ページの脚注参照)
- $\beta I(t)$: 感染力 (単位時間あたり単位人口あたりの感染率)
- γ : 回復率, 死亡率, 隔離率
- $1/\gamma$: 感染性期間が指数分布に従う (単位時間あたり γ の率で感染者が回復していく) と仮定した場合の感染期間の平均値⁴

なお, (2.2) ~ (2.4) の 3 式を足し合わすと

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = \frac{dN}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

で, 人口数に変動がないことに対応しています。

【蛇足】 図 2 の状態遷移図からわかることですが, 3 つの方程式の意味を簡単に説明しておきます。

- (2.2) : 非感染者は流行に罹って刻々と減少していくので dS/dt の符号は負。その大きさは非感染者と感染者の接触頻度 $S(t)I(t)$ に比例。
- (2.3) : 感染者数の時間的増加割合は発症した感染者の数 $\beta S(t)I(t)$ の中から回復していった人の数 $\gamma I(t)$ を差し引いたものに等しい。
- (2.4) は感染からの回復レートを表す。

2.1 感染は流行拡大するのか ~ 基本再生産数 R_0 がカギを握る ~

さて, 感染の初期段階を考えます。この時期は免疫保持者は $R(0) = 0$ ですね。感染性保持者の数 (未感染者数) を $S(0)$ とすると, 初期における感染者数の時間的変化の割合は (2.3) より

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\beta S(0) - \gamma)I(t) = \lambda_0 I(t) \quad (\lambda_0 = \beta S(0) - \gamma)$$

と表され, これを解いて

$$I(t) = I(0)e^{\lambda_0 t} \quad (2.6)$$

が得られます。ちなみに λ_0 はマルサス係数⁵とも呼ばれます。

さて, 初期の感染状況を調べるために指数関数の肩にある λ_0 の符号に注目してみると。。。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 > 0 \quad : \quad R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} > 1 \quad \dots \quad \text{感染者は指数関数的に増加する (感染流行は拡大)} \\ \lambda_0 < 0 \quad : \quad R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} < 1 \quad \dots \quad \text{感染流行は発生しない} \\ \lambda_0 = 0 \quad : \quad R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} = 1 \quad \dots \quad \text{感染が流行するか否かの臨界条件} \end{array} \right.$$

ということが言えます。 $1/\gamma$ は平均感染期間なので R_0 は次のように表せます。

$$R_0 = (\text{感染率 } \beta) \times (\text{免疫を持たない非感染者の初期人口 } S(0)) \times (\text{平均感染期間 } 1/\gamma) \quad (2.7)$$

$\beta S(0)$ は感染初期における単位時間あたりの新規感染者数 (2 次感染者数) なので, R_0 は感染症が存在しない集団 (人口) に紛れ込んだ 1 人の 1 次感染者がその平均感染期間の間に再生産する 2 次感染

⁴ $dI/dt = -\gamma I$, $I(t) = I(0)e^{-\gamma t}$. 時刻 t までの感染期間確率は $p(t) = I(t)/I(0) = e^{-\gamma t}$. 平均感染期間を T とすると $T = \int_0^\infty t p(t) dt / \int_0^\infty p(t) dt = 1/\gamma$

⁵人口の増加速度は人口に比例するという『人口論』を唱えたマルサスの名前に由来。

者の平均数と解釈できます。したがって、 $R_0 > 1$ であれば1人以上の2次感染者を生みだし、感染が指数関数的に拡がることを示しています。つまり、 R_0 の値で感染流行の兆しが想定できるわけですね。 R_0 は基本再生産数 (basic reproduction number) と呼ばれます。

なお、感受性保持者の数ですが、 $S(0) \leq \gamma/\beta$ であれば感染は拡大しないので、仮に大きな規模の集団でも事前のワクチン接種により免疫保持者を増やし感受性保持者の数 $S(0)$ を減らしておけば感染拡大を防ぐことができると考えられます。ワクチン接種は感染拡大を防ぐためにも有効な手段となっているわけですね。

表1にいろいろな感染症の基本再生産数を載せておきます。いま猛威を振るっている新型コロナは $R_0 \simeq 1.4 \sim 6.6$ と幅広いバラツキが見られるようです。

表 1: いろいろな感染症と基本再生産数

感染症	基本再生産数 R_0
麻疹 (はしか)	12 ~ 18
風疹	5 ~ 7
ポリオ	5 ~ 7
おたふく風邪	5 ~ 7
新型コロナ	1.4 ~ 6.6
インフルエンザ (スペイン風邪)	2 ~ 3

2.2 何人が感染してしまうか ~ 基本再生産数からの推定 ~

次に感染が進んでいった先の十分に時間が経過した最終状態 (感染流行が終息) がどうなるかを見ていきます。 $S(t)$ は (2.2) から単調減少ですが当然負の値はとらないので、その極限值として

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S(+\infty) \quad (2.8)$$

が存在するはずですが、同様に、 $I(t)$ も $S(t) < \rho = \gamma/\beta$ という領域 (感染は拡がらない) では単調減少しますが、負値はとらないので、そのような極限はもうこれ以上感染は進まないという平衡点と考えられるので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \quad (2.9)$$

となるはずですが、(2.2) と (2.3) より時間 dt を消去すると

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\gamma SI - \gamma I}{-\gamma SI} = -1 + \frac{\rho}{S} \quad (\rho \equiv \gamma/\beta) \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{S} > 1: \quad \frac{dI}{dS} > 0 \dots \text{増加関数} \\ \frac{\rho}{S} = 1: \quad \frac{dI}{dS} = 0 \dots \text{極値をとる} \\ \frac{\rho}{S} < 1: \quad \frac{dI}{dS} < 0 \dots \text{減少関数} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

となることが分かります。(2.10) はすぐ積分できて

$$I(t) = -S(t) + \rho \ln S(t) + C \quad (C: \text{積分定数}) \quad (2.12)$$

初期値として $t = 0 : I = I(0), S = S(0), R(0) = 0$ とすると積分定数は

$$C = I(0) + S(0) - \rho \ln S(0)$$

と求められ, (2.12) は

$$I(t) = I(0) + S(0) - S(t) + \rho \ln \frac{S(t)}{S(0)} \quad (2.13)$$

となります。これは縦軸を I , 横軸を S とした (S, I) 相平面における軌道の式⁶で, 相平面上に描けば図 3 となります。 (S, I) で示される座標点は t の経過とともに矢印で示したように左から右へ移動していくことに留意してください。時間の経過とともに S は減って I は増え, $S = \rho$ を境に今度は I が急減していく様子が分かります。

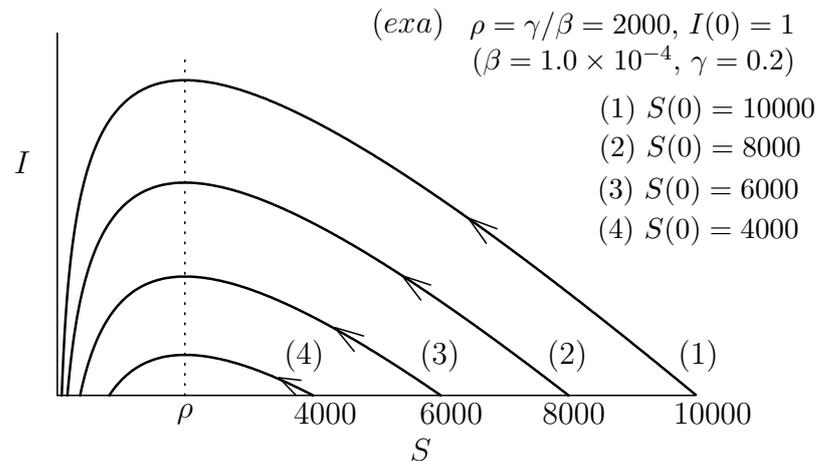


図 3: $S - I$ 相平面軌道

2.2.1 最終規模方程式

(2.13) で $t \rightarrow \infty$ の極限をとると, $I(\infty) = 0$ であることに留意すれば

$$S(\infty) = S(0) + I(0) + \rho \ln \frac{S(t)}{S(0)} \quad (2.14)$$

が得られます。ここで

$$p(t) = \frac{S(0) - S(t)}{S(0)} = 1 - \frac{S(t)}{S(0)} \quad (2.15)$$

という量を定義すると $t \rightarrow \infty$ の極限では

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p(\infty) = \frac{S(0) - S(\infty)}{S(0)} \quad (2.16)$$

となり, 分子は初期感受性保持者の数から感染終息後の最終的な未感染者の数を差し引いた総感染者数を表すので, $p(\infty)$ は感染者の割合を示します。これを使えば (2.14) は

$$-S(0)p(\infty) = I(0) + \rho \ln(1 - p(\infty)) \quad (2.17)$$

と表されます。初期感染者 $I(0)$ は初期の感受性保持者 $S(0)$ の数に比べて非常に小さいと考えられるので, $I(0) \sim 0$ とおくと

⁶一般に $x = x(t), y = y(t)$ に対して t をパラメータとする xy 平面内の曲線 $(x(t), y(t))$ を軌道, xy 平面を相平面と呼んでいます。

$$1 - p(\infty) = \frac{S(\infty)}{S(0)} = e^{-R_0 p(\infty)} \quad (2.18)$$

が得られます。左辺は感染が終息したときに、感染を免れた感受性保持者の数 $S(\infty)$ の割合を示している、(2.18) は最終規模方程式 (final size equation) と呼ばれます。

この方程式の解 $p(\infty)$ は直接解いて求めるより直線 $1 - p(\infty)$ と曲線 $e^{-R_0 p(\infty)}$ の交点から求めるほうが容易です。先程の (exa) の場合は図 4・左のようになります。

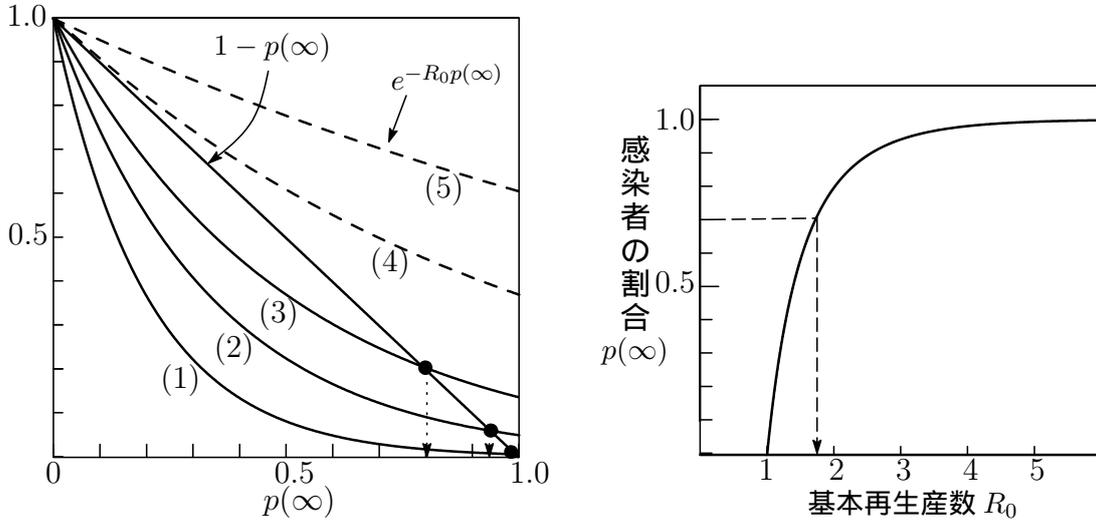


図 4: 最終規模方程式の解と基本再生産数の推定

最終的に感染しなかった人口の割合 ($1 - p(\infty)$) が分かれば、基本再生産数 R_0 は最終規模方程式より

$$R_0 = -\frac{\ln(1 - p(\infty))}{p(\infty)} \quad (2.19)$$

と求めることができ、 $p(\infty)$ と R_0 の関係を図 4・右に示しておきます。

表 2: 最終感染者数の割合 ($\beta = 1.0 \times 10^{-4}$, $\gamma = 0.2$)

初期人口 $S(0)$	基本再生産数 $R_0 = \beta S(0)/\gamma$	感染者の割合 $p(\infty)$
(1) 10,000	5	99.3
(2) 6,000	3	94.0
(3) 4,000	2	79.7
(4) 2,000	1	感染は広がらない

2.2.2 感染拡大を防ぐための予防接種

表 2 に感受性保持者の数 $S(0)$ 、基本再生産数 $R(0)$ 、最終感染者の割合 $p(\infty)/100(\%)$ を示しました。仮に初期人口が 10,000 人であっても 8 割の人がワクチン接種等で免疫を保持されていれば、 $S(0)$ は実質的に 2,000 人となるので $R_0 = 1$ となり感染は広がらないこととなります。感染拡大を防ぐには事前の予防が大事ということですね。

感染拡大を防ぐには予防接種が有効ですがどの程度実施すればいいのが調べてみます。いま、予防接

種率を $r(\%)$, 予防接種を受けた人は免疫を保持し 2 度と感染しないとします。そうすると初期の感受性保持者の数は全体からこれらの数を除いた

$$S(0)' = (1 - r)N$$

ですね。この集団の基本再生産数を R_0' とすると $R_0' \leq 1$ が感染拡大しない条件なので, $S(0) \sim N$ とすれば必要な予防接種率は

$$R_0' = \frac{\beta}{\gamma} S(0)' = \frac{\beta}{\gamma} (1 - r)N = R_0(1 - r) \leq 1 \quad \therefore r \geq 1 - \frac{1}{R_0} \quad (2.20)$$

となります。

表 3: 感染拡大防止のための予防接種率 ($\beta = 1.0 \times 10^{-4}$, $\gamma = 0.2$)

初期人口 $S(0)$	基本再生産指数 $R(0) = \beta S(0)/\gamma$	必要予防接種率 $r(\%)$
10,000	5	80
6,000	3	67
4,000	2	50

2.3 SIR モデルのシミュレーション

感染が流行してからの経過時間 t における感受性保持者を $S(t)$, 感染者を $I(t)$, 免疫保持者を $R(t)$ とするとすると SIR モデルは

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

で表されました。 $S(0) = 10000$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$, $\beta = 10^{-4}$, $\gamma = 0.2$ として, この連立微分方程式を Mathematica で解いてやると図 5 のグラフが得られます。

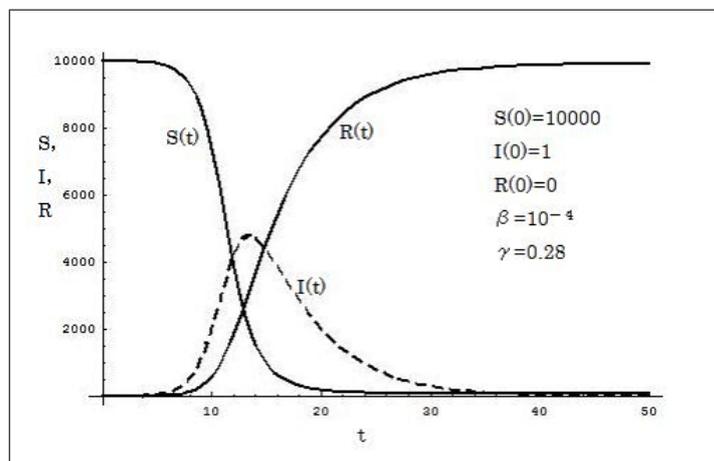


図 5: SIR モデルのシミュレーション

初期の段階では感染流行はゆっくり進みますが、それが過ぎると指数関数的に急激に進み、 I がピークを過ぎると流行の速さも衰え次第に終息に向かっていくことが分かります。いま、時間 t を「日」と見做すと、この集団では発生から 12 日目あたりで流行のピークを迎え、1 か月を過ぎるとほぼ終息すると予想されます。

「3密」を避けることの重要性： 現在新型コロナウイルスの防染対策として『換気の悪い密閉空間，多数集まる密集場所，間近で会話や発声をする密接場所の3密を避ける』ように呼びかけられていますね。この重要性を SIR モデルで検証してみましょう。3密は人と濃厚接触するので、それを避けることは感染率 β を小さくすることに相当します。そこで濃厚接触ケースとして $\beta = 5 \times 10^{-4}$ ，3密を避け $\beta = 5 \times 10^{-5}$ とした場合の感染流行の推移を見てみました。接触ごとの感染確率を $p = 0.02$ とすると前者は1日あたり平均25人に、後者はその1/10の平均2.5人に接触するのにあたります。

図6の左のグラフは濃厚接触ケースで感染者数 I が非常に短期間に急激に増え、しかもピークの時期も早期にやってきます。こうなると大量の感染者がどっと病院に押しかけるでしょう。最悪の場合、医療崩壊に繋がりがねません。一方、右のグラフは3密を避けたケースで $\beta = 5 \times 10^{-5}$ としました。この場合、感染者の数 I は減り、感染も穏やかに拡がってピークも後ろにずれ（グラフの時間スケールに注目）、医療現場の混乱は生じないと想定されます。

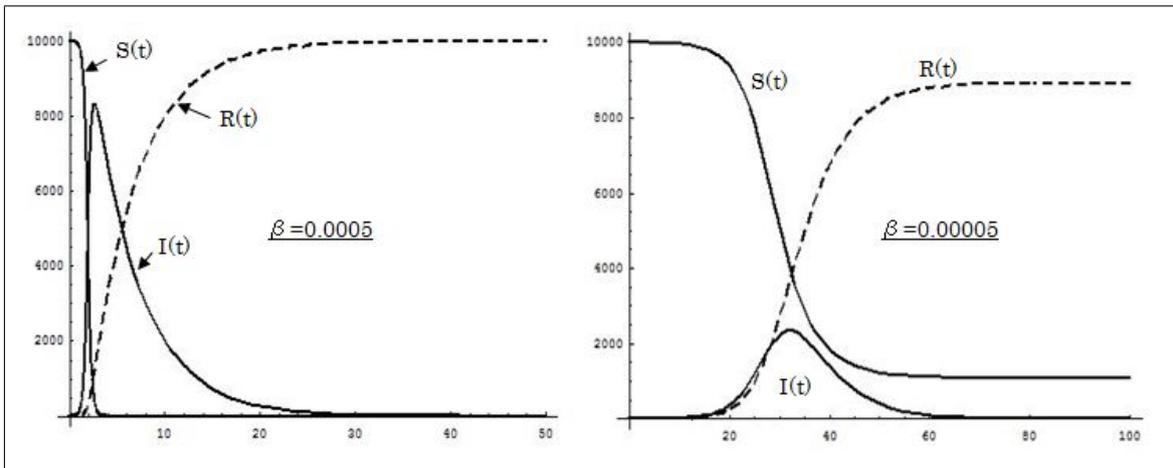


図 6: SIR モデルのシミュレーション (1)

次に回復率 γ の大きさと感染流行の推移を見てみましょう。 $\gamma = 0.1$ と $\gamma = 0.5$ とした場合の流行推移を図7に示します。感染しても短期間で回復する場合は、右グラフに示すように流行の終息も早く、感染しない人もこのケースでは2割程度存在することが予想されます。

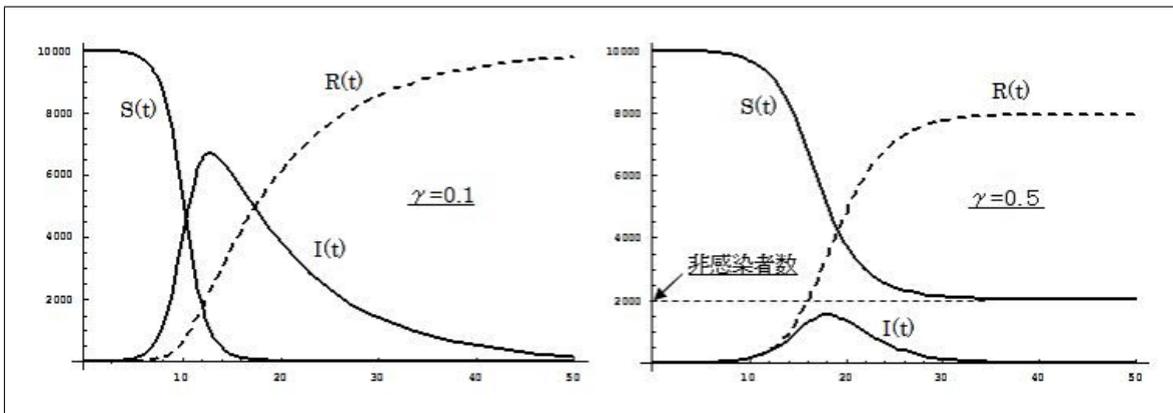


図 7: SIR モデルのシミュレーション (2)

2.3.1 ワクチン接種を想定した SIR モデルのシミュレーション

ワクチン接種を想定した SIR モデルは次のように表されます⁷。なお，このモデルではワクチンを接種した人でもある割合で再び感染する（免疫取得率は 1 ではない）という比較的現実的なモデルです。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta u(1-\alpha)S(t)I(t) - \beta(1-u)S(t)I(t) - u\alpha S(t) \quad (2.22)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta u(1-\alpha)S(t)I(t) + \beta(1-u)S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (2.23)$$

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (2.24)$$

$$\frac{dR_2(t)}{dt} = u\alpha S(t) \quad (2.25)$$

(ただし, $S + I + R_1 + R_2 = N$: 一定)

- u : ワクチンの単位時間ごとの接種率 ($0 \leq u < 1$)
- α : ワクチン接種による免疫取得率 ($0 \leq \alpha < 1$)
- R_1 : ワクチンを接種したが感染した個体
- R_2 : ワクチン接種により抗体ができた個体

上の式で $\alpha = 1, u = 0$ とおけば SIR モデルの基本式 (2.21) になりますね。

(2.22) はやや複雑な式となっていますが，この式の内容がわかれば残りの式は容易に理解できるので少し簡単に説明しておきます。まず右辺の 2 つの項ですが，時刻 t における感受性保持者の数に注目すると「ワクチンを接種したが免疫が取得できていない集団： $u(1-\alpha)S(t)$ 」と「ワクチン接種をしていない集団： $(1-u)S(t)$ 」が感染者 $I(t)$ との接触により感染率 β で感染者となっていく ($S \rightarrow I$)。第 3 項は「ワクチン接種・免疫獲得 $u\alpha S(t)$ 」したものは感受性保持者から外れ ($S \rightarrow R_2$) ていきますね。

さて，上の方程式をシミュレーションして流行の推移を見ていきましょう。初期人口 $S(0) = 10000, I(0) = 1, R_1(0) = R_2(0) = 0, u = 0.01, \alpha = 0.5$ とした場合の感染流行の推移は図 8 の左のようになります。図 8 の右のグラフは $u = 0.05$ の場合で， R_2 が増加するとともに $I(t)$ の山が低く抑えられていることがわかります。

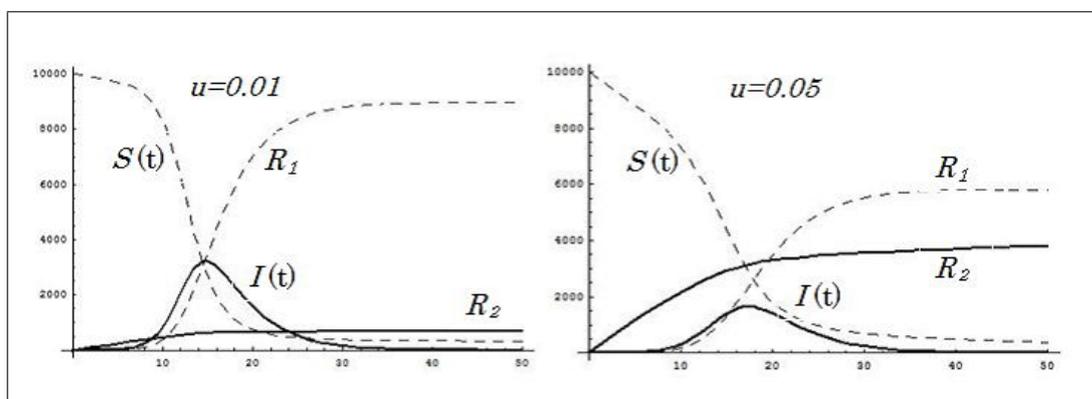


図 8: ワクチン接種を考慮した SIR モデルのシミュレーション

⁷龍谷大・井場氏の「SIR モデルと感染症の数理」<https://www.math.ryukoku.ac.jp/iida/lecture/gr/gr17/iba-prs.pdf>

基本再生産数 このモデルの基本生産指数 R'_0 を求めます。(2.23) を整理して

$$\frac{dI(t)}{dt} = \{\beta S(t)(1 - u\alpha) - \gamma\} I(t)$$

上の式を解いて初期段階では

$$\begin{aligned} I(t) &= I(0) \exp \{[\beta S(0)(1 - u\alpha) - \gamma]t\} \\ &= I(0)e^{\lambda'_0 t} \quad (\lambda'_0 = \beta S(0)(1 - u\alpha) - \gamma) \end{aligned} \tag{2.26}$$

と得られます。したがって、基本生産指数を R'_0 とすると

$$R'_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma}(1 - \alpha u) = \begin{cases} R'_0 > 1 & \text{流行は拡大} \\ R'_0 < 1 & \text{流行しない} \end{cases} \tag{2.27}$$

となります。いまのケースでワクチン接種による免疫取得率を $\alpha = 1.0$ とした場合、感染流行を防ぐにはワクチン接種率を 7 割程度までする必要がありになります。

表 4: ワクチン接種の場合の基本再生産数

免疫取得率 α	ワクチン接種率 u	基本再生産数 R'_0
0.5	0.01	3.55
0.5	1.0	1.79
1.0	0.7	1.07

() Mathematica ソースコード

```
(*SIR Model*)
p = 9999 (*総人数*); β = 0.0001 (*感染率*); γ = 0.2 (*回復率*);
SIR = {s'[t] = -β*s[t]*i[t], i'[t] = β*s[t]*i[t] - γ*i[t],
  r'[t] = γ*i[t]};
initialconditions = {s[0] = p, i[0] = 1, r[0] = 0};
soln = Last@NDSolve[{SIR, initialconditions},
  {s[t], i[t], r[t]}, {t, 0, 50}];
Plot[Evaluate[{s[t], i[t], r[t]} /. soln], {t, 0, 50},
  PlotStyle -> {Thickness[0.006], Thickness[0.006],
  {Dashing[{0.015}], Thickness[0.006]}}
```

3.SIRS モデル

SIR モデルでは感染した人は一定の割合で回復し、一度回復した人は2度と感染しないことを前提にしています。ここでは、一度感染して回復した人たちが一定の割合で免疫を失って再び感染する ($S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$) 可能性を考慮した SIRS モデルについて簡単に触れておきます。

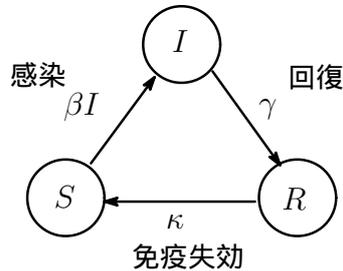


図 9: SIRS モデルの状態遷移図

免疫を失う⁸人の割合を κ とすると SIRS モデルは次の連立微分方程式で表されます⁹。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \kappa R(t) \tag{3.1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \tag{3.2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \kappa R(t) \tag{3.3}$$

もうこの式の説明は不要と思われるので、シミュレーションの結果を図 10 に示します ($S(0) = 10000, I(0) = 1, R(0) = 0, \beta = 10^{-4}, \gamma = 0.28$)

SIRS モデルでは $R \rightarrow S$ に戻る経路があるため、感染がピークを過ぎてから時間が経過しても感染者が 0 になることはありません。もし免疫失効率 κ が大きければ $I(t)$ がピークを過ぎてもその後の感染人口は図 10 の右図に示すように大きいまま持続することがわかります。

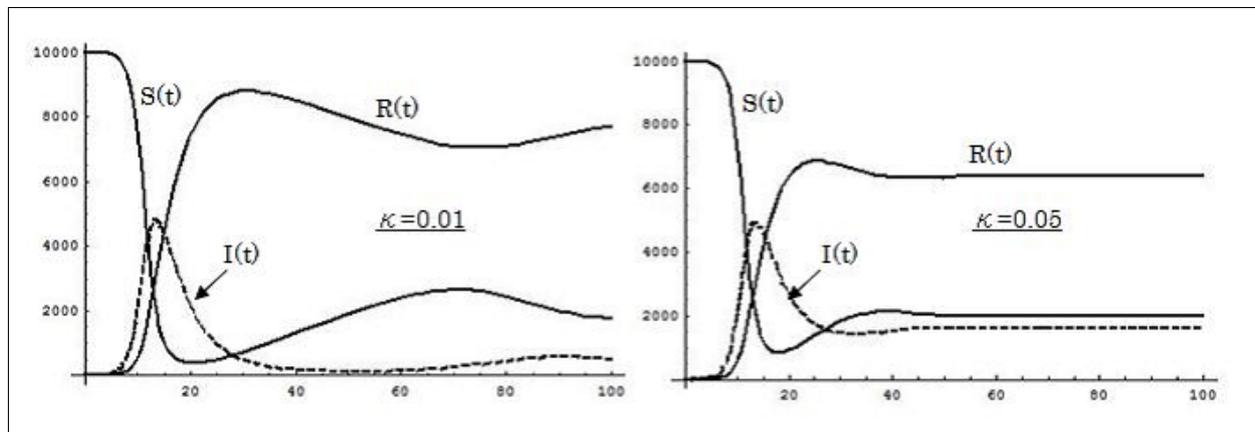


図 10: SIRS モデルのシミュレーション

⁸例えばウィルスがある時突然変異した場合などでは、一度感染して免疫を保持したとしても突然変異ウィルスに対しては免疫が効かず、新たな感染の危機に曝されます。

⁹<https://rpubs.com/ktgrstsh/tokyor84>

4. SEIR モデル

いままで感染の潜伏期間を考慮しませんでした。感染の潜伏期間を考慮したモデルを SEIR モデルといいます。E は感染症が潜伏期間中のもの (Exposed) の頭文字からきています。

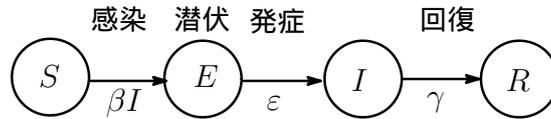


図 11: SEIR モデルの状態遷移図

ϵ を感染症の発症率, $1/\epsilon$ を潜伏期間の平均値とすると, この SEIR モデルは次の連立微分方程式で表されます。ただし, 総人口の変動はなく一定としています。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (4.1)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \epsilon E(t) \quad (4.2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \epsilon E(t) - \gamma I(t) \quad (4.3)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (4.4)$$

図 12 は 5000 人の集団の中に 10 人の感染者が紛れ込んでいた場合の感染拡大の様子をシミュレーション ($S(0) = 4990, I(0) = 10, R(0) = 0, \beta = 10^{-4}, \gamma = 0.33$) したもので, 潜伏期間をそれぞれ $\epsilon = 0.5$ とした 2 日間と $\epsilon = 0.143$ とした 7 日間としました。潜伏期間が長い場合は時間的な経過が緩やかになるだけで (グラフの時間スケールに注意), いずれのケースも最終的には約 3000 人程度と半分以上の人が感染を経験するということがわかります。

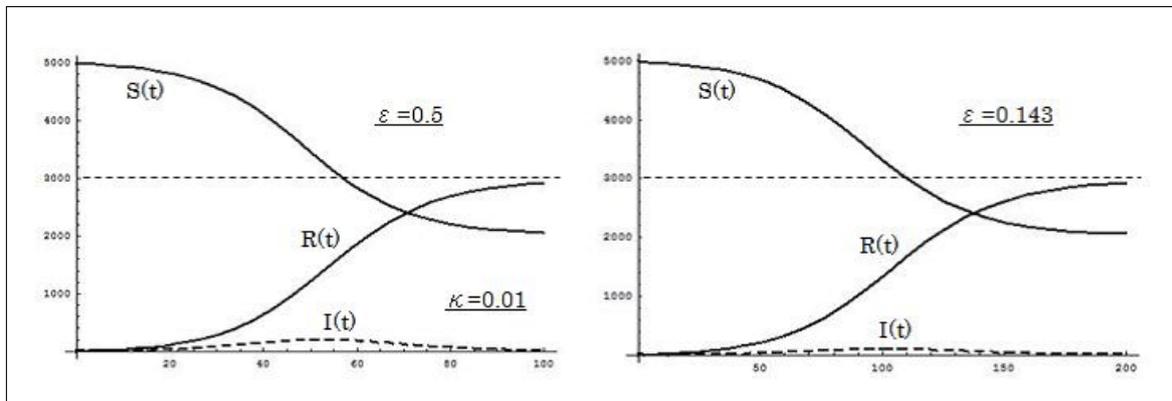


図 12: SEIR モデルのシミュレーション

・後記: いま世界を席巻している新型コロナウイルスの流行モデルも SIR モデルがベースとなっているとのことですが, 一刻も早い終息を願うばかりです。

本レポートは, 感染症はどのように拡がっていくのかということに興味を持ち, 少し調べたものをまとめたものです。残念ながら, 小生この方面の知識はほとんど持ちあわせていませんので, おかしな説明や間違いなどがあるかも知れません。ご指摘, ご教示いただければありがたいです。いずれにしても何かの参考にでもなれば幸いです。

付録.1 Excelシミュレーター

本レポートでは Mathematica を使ってシミュレーションしてきましたが、なにも Mathematica を使わなくても Excel でシミュレーションができますので、付録にその処方箋を載せておきます。

「感染症 Excel シミュレーター」をダウンロードしてご活用してください。

Excel でのシミュレーションの処方箋は以下のとおりです。

連立微分方程式を差分方程式に書き換えることがポイントです。具体的にやってみましょう。

$$\frac{dS(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\beta S(t)I(t)$$

これから \lim を外して分母の Δt を右辺に掛ければ次の差分方程式が得られます。

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t$$

このようなやり方で各モデルの差分方程式をまとめると

- SIR モデル

$$\begin{cases} S(t + \Delta t) = S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t \\ I(t + \Delta t) = I(t) + \beta S(t)I(t)\Delta t - \gamma I(t)\Delta t \\ R(t + \Delta t) = R(t) + \gamma I(t)\Delta t \end{cases} \quad (\text{付録.5})$$

- SIR モデル (ワクチン接種)

$$\begin{cases} S(t + \Delta t) = S(t) - \beta u(1 - \alpha)S(t)I(t)\Delta t - \beta(1 - u)S(t)I(t)\Delta t - u\alpha S(t)\Delta t \\ I(t + \Delta t) = I(t) + \beta u(1 - \alpha)S(t)I(t)\Delta t + \beta(1 - u)S(t)I(t)\Delta t - u\alpha S(t)\Delta t \\ R(t + \Delta t) = R(t) + u\alpha S(t)\Delta t \end{cases} \quad (\text{付録.6})$$

- SIRS モデル

$$\begin{cases} S(t + \Delta t) = S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t + \kappa R(t)\Delta t \\ I(t + \Delta t) = I(t) + \beta S(t)I(t)\Delta t - \gamma I(t)\Delta t \\ R(t + \Delta t) = R(t) + \gamma I(t)\Delta t - \kappa R(t)\Delta t \end{cases} \quad (\text{付録.7})$$

- SEIR モデル

$$\begin{cases} S(t + \Delta t) = S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t \\ E(t + \Delta t) = E(t) + \beta S(t)I(t)\Delta t - \varepsilon E(t)\Delta t \\ I(t + \Delta t) = I(t) + \varepsilon E(t)\Delta t - \gamma I(t)\Delta t \\ R(t + \Delta t) = R(t) + \gamma I(t)\Delta t \end{cases} \quad (\text{付録.8})$$

あとはエクセルシートに上の差分方程式の数式を書き込むだけです。

図 13 で、A 列は時刻 t で Δt の刻み幅を $\Delta t = 0.1$ に設定しています。4 行目は初期値で適当な数値を入力します。5 行目以降は差分方程式を入力し、パラメータの感染率 β 、回復率 γ に適当な数値を設定します。

細かい説明よりも具体的に手を動かしたほうが早いので、Excel シミュレーターを DWNLD してエクセルシートをご覧ください。グラフ描画に必要な領域をクリックし、散布図を選択すればシミュレーションしたグラフが表示されます。

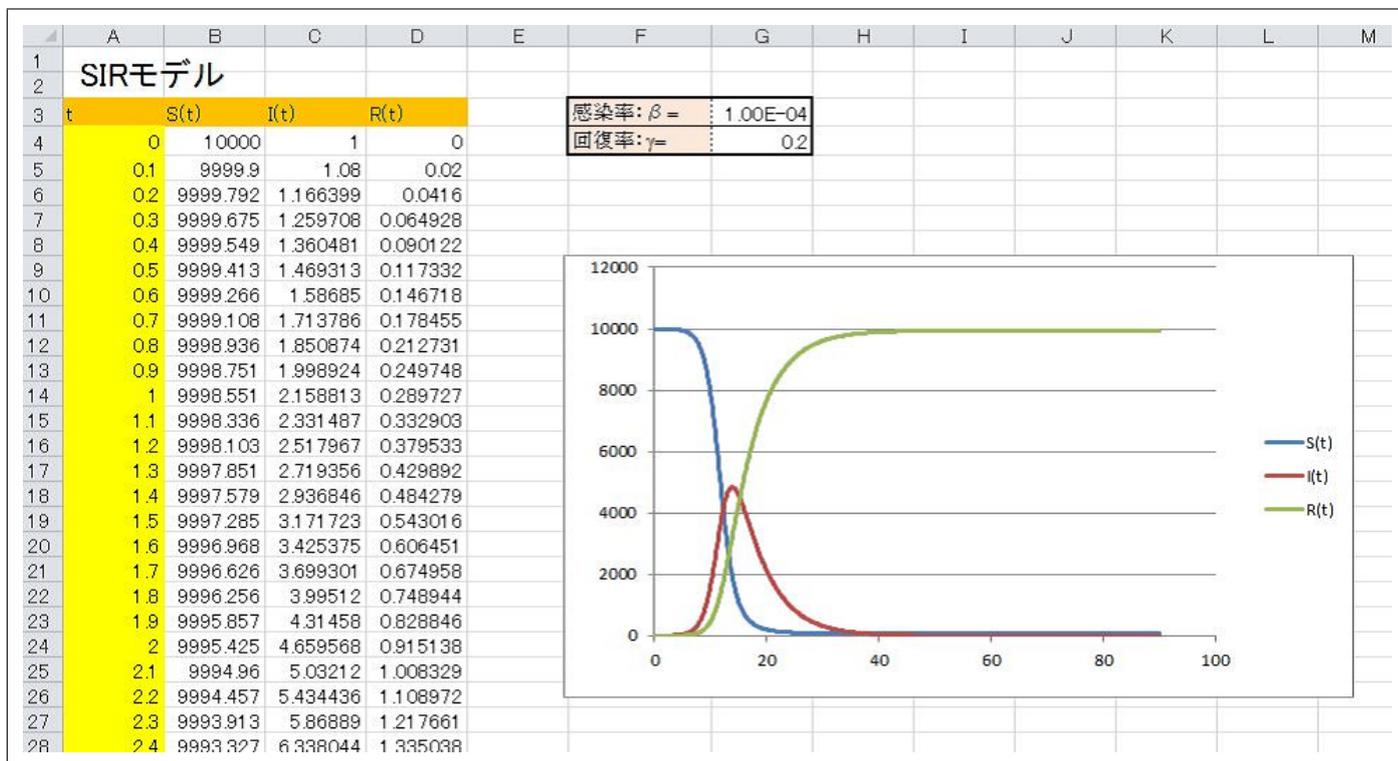


図 13: SIR モデルの Excel でのシミュレーション

付録.2 規格化 SIR モデルの Simulation ~ 振る舞いがわかりやすい ~

全人口を N として S や I を全人口 N に対する割合で表し (全人口で規格化), SIR モデルの方程式を書き直してみます。

$$S_N = S/N = (1 - I_N - R_N), \quad I_N = I/N, \quad R_N = R/N \quad (\because S + I + R = N)$$

とおくと SIR モデルの方程式は次のように表せます。

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I & \rightarrow \frac{dI_N}{\gamma dt} = \frac{N\beta}{\gamma}(1 - I_N - R_N)I_N - I_N \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I & \rightarrow \frac{dR_N}{\gamma dt} = I_N \end{cases}$$

ここで $dt \equiv \gamma dt$ と時間スケールを変換してやると

$$\frac{dI_N}{dt} = R_0(1 - I_N - R_N)I_N - I_N \quad (\text{ただし } R_0 = N\beta/\gamma) \quad (\text{付録.9})$$

$$\frac{dR_N}{dt} = I_N \quad (\text{付録.10})$$

となり、この方程式で表される系の時間的振る舞い（感染者の割合、回復者の割合の時間的推移）はパラメータは R_0 だけで決まり、モデルの振る舞いを調べるのに非常に便利なものとなります。なお、 $S(0) \sim N$ なので、この R_0 は以前定義した基本再生産数ですね。

それでは差分方程式を立てて Excel でシミュレーションしてみましょう。差分方程式は次のようになります。

$$I_N(t + \Delta t) = I_N(t) + R_0(1 - I_N - R_N)I_N\Delta t - I_N\Delta t$$

$$R_N(t + \Delta t) = R_N(t) + I_N\Delta t$$

未感染者の割合 $S_N(t)$ は

$$S_N(t) = 1 - I_N(t) - R_N(t) \tag{付録.11}$$

から求めることができます。

基本再生産数として $R_0 = 2.6, 1.8, 1.4, 1.2$ の4つのケースのシミュレーション結果を図 14 に示します。初期値は $I_N(0) = 0.0001$ としました。これは1万人の人口の中に感染者が1人いるという勘定になります。 $R_N(0) = 0$ は当然ですね。なお、実時間スケールはグラフの時間メモリを $1/\gamma$ 倍したものになることに留意してください。

さて、この結果の解説はもう改めていう必要もないとは思いますが、念のために書いておくと

- $R_0 = 2.6$: 最終的に約9割の人が罹患する
- $R_0 = 1.8$: " 約7割強 "
- $R_0 = 1.4$: " 約5割 "
- $R_0 = 1.2$: " 約3割 "

$R_0 = 1.2$ でも感染を免れることはできず、何も対策を講じなければ全人口の約3割の人が感染することが推測されます。添付の「Excelシミュレーター」で R_0 や $I_N(0)$ の値をいろいろ変えてシミュレーションしてみてください。

R_0 を低く抑える手立ては β を小さくすることですね。 $\beta = mp/N$ で m は1人の人が毎日接触する人の平均的な数、 p は感染確率でした。感染者を早期に発見して隔離することは感染機会が遠のくので実質的に p を小さくすることにもなります。有効なワクチンが開発途上の現時点では、手洗い、消毒の励行はもとより、くれぐれも「3密」を避け、感染者の早期発見による隔離が最も効果的な手段といえるでしょう。

最後に、おまけとしてある時刻で基本再生産数 R_0 が変化した場合を調べてみましょう。ちなみに

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma} = \frac{mp}{\gamma}$$

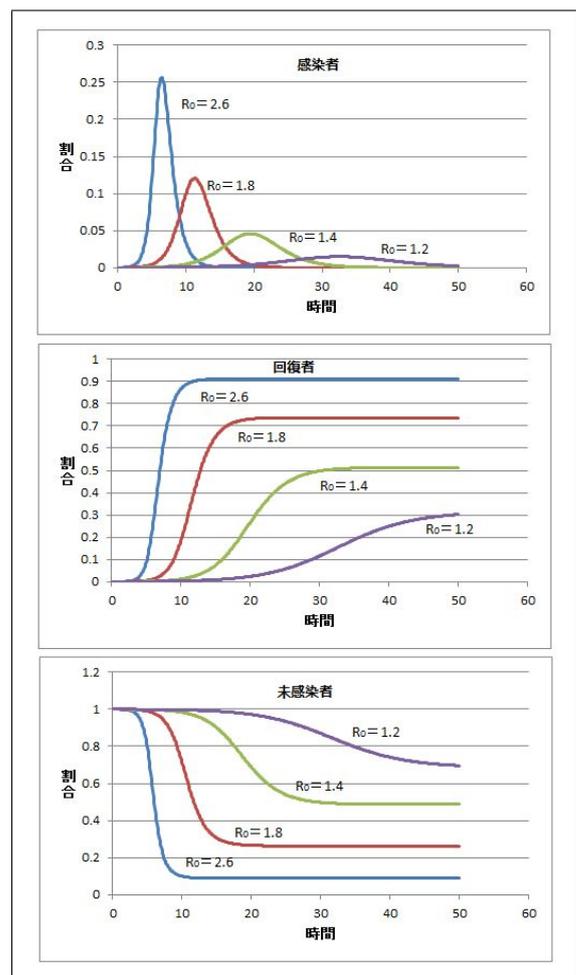


図 14: 基本再生産数と感染の推移

で、 m は 1 人の人の一日平均の接触回数、 p は感染確率でしたね。

さて、基本再生産数 $R_0=2.5$ の感染が広がっていましたが、感染防止対策の徹底化（人と人の接触を徹底して減らすなど）により時刻 $t = 5$ の時点で R_0 を小さくすることに成功したとします。具体的な R_0 値として $R_0 = (2.5, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5)$ となった場合のシミュレーション結果を図 15 に示します。

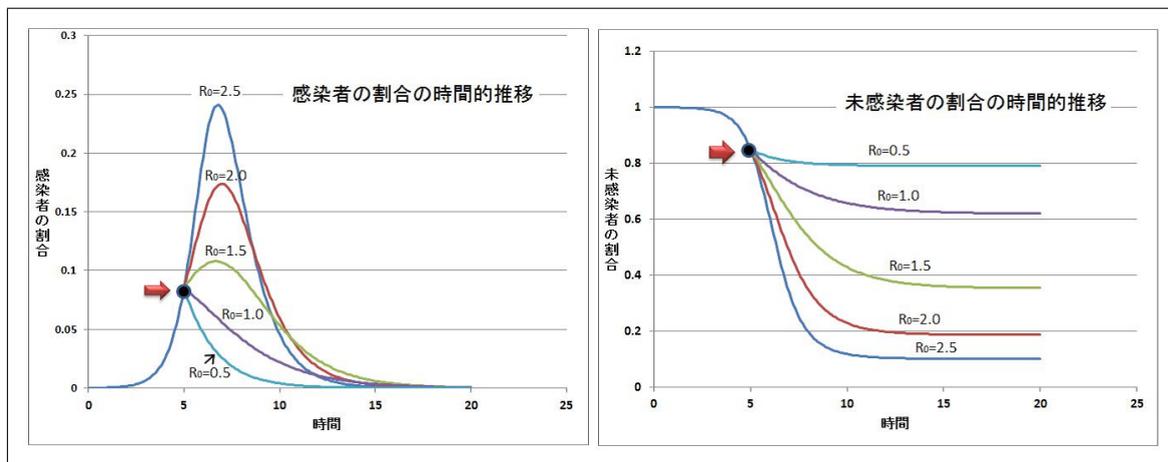


図 15: R_0 の変化と感染推移

$R_0 \rightarrow$ 小につれて感染者のピークは抑えられ、8 割減の $R_0 = 0.5$ となればその時点から感染は終息に向かうことがわかります。厚生労働省新型コロナウイルス対策班の北大教授・西浦博氏が提言された「人と人との接触を 8 割減らす対策を取れば感染は急速に収まっていく」という予測と符合するように思えます。

- ・ 2020.4.19 おまけを追加
- ・ 2020.4.17 付録 2 を追加