弦の振動と音色について

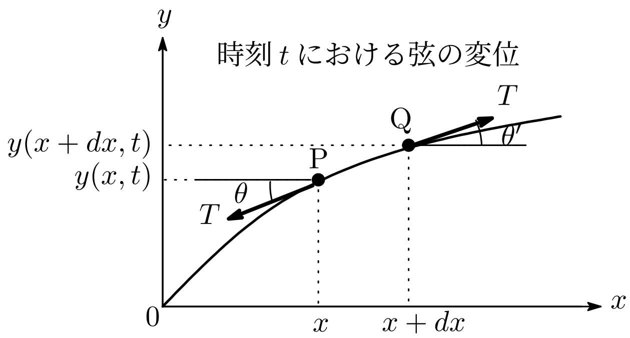
大袈裟なタイトルとなりましたが，中身は大したことはありません。要するに弦を弾く位置を変えると高次の倍音の含まれる割合が変化し，その結果音色が違って聞こえてくるといった内容です。

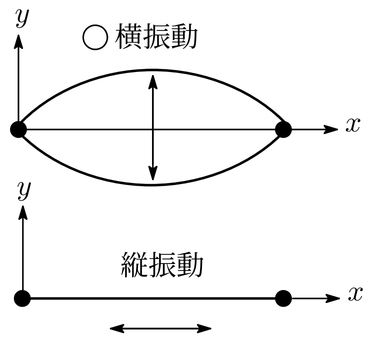
0.1　弦の運動方程式（1 次元波動方程式）

両端が固定された全長 L，単位長さあたりの質量（線密度）σ の弦があり，弦の一部を y 軸方向に変位させてパッと手放した時の弦の振動を考えます。

弦の振動は弦の長さの方向（x 軸方向）と垂直の方向に振動する**横振動の運動**と弦の長さの方向に振動する**縦振動の運動**が生じますが，縦振動の成分は非常にわずかなのでこれを無視し，横振動だけを考えることにします[1]。

下図をご覧ください。弦の微小部分 PQ の運動を考えます。張力を T とし，弦の各部分の y 軸方向の変位は弦の全長に比べてはるかに小さいとます。





弦の張力は弦の接線方向に向いているので、弦の微小部分 PQ に働く力の y 方向の成分 F_y は

$$F_y = T\sin\theta' - T\sin\theta \tag{1}$$

で与えられます。弦の y 軸方向の変位は全長 L に比べてはるかに小さいとしているので、θ, θ' は非常に小さいですね。そうすると

$$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta \simeq \sin\theta \qquad (\theta \to 0)$$

[1] よくギターで縦振動と横振動といいますが，これは表板と垂直あるいは平行の振動のことをいっているので，弦の振動としてはここでいう横振動です。弦を表板に向けて弾くと（縦振動）力強い音がでるとかいわれますね。紛らわしいですが間違われないように！

とおけるので，微小部分 PQ に働く y 方向の力の成分 F_y は

$$
\begin{aligned}
F_y &= T\sin\theta' - T\sin\theta \\
&= T\tan\theta' - T\tan\theta \\
&= T\left(\frac{\partial y(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

となり，$y(x+dx,t)$ をテイラー展開して 1 次の項までとった $y(x+dx,t) = y(x,t) + \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}dx$ を定式に代入して整理すると

$$
\begin{aligned}
F_y &= T\left(\frac{\partial y(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) \\
&= T\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\} \\
&= T\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx \qquad (2)
\end{aligned}
$$

となります。微小部分 PQ の質量は σdx，加速度は $\partial^2 y/\partial t^2$ であるので，この部分の運動方程式として

$$\sigma dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

が得られます。これを整理すると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (3)$$

$v^2 = T/\sigma$ とおいて

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (4)$$

と表されます。この方程式は弦のすべての場所で成り立ち，**1 次元の波動方程式**と呼んでいます。なお，v は弦を伝わる波の速さです。

0.2 弦の運動方程式の解

弦の振動ですから運動方程式 (4) の解は sin や cos で表されるだろうとの察しはつきますね。変数分離法やフーリエ級数を使って解を求めていくのですが，ここではその詳細に立ち入ることはやめて，天下り的に一般解を示しておきます。一般解は

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}vt + \alpha_k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \alpha_n) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

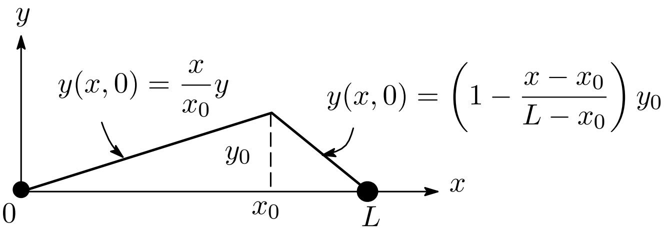
で与えられます。ただし，

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = vk_n \qquad (6)$$

一般解はその名が示すようにまだカスタマイズされていない解で，係数 C_n は未定です。初期条件を満たすようにカスタマイズすることで係数 C_n が決まります。弦を弾く場所を x_0 とすると，初期条件は

$$
y(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{x_0} y_0 & (x \leqq x_0) \\ \left(1 - \dfrac{x - x_0}{L - x_0}\right) y_0 & (x > x_0) \end{cases} \tag{7}
$$

$$
\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad (t = 0 \text{ で弦は静止}) \tag{8}
$$



です。初期条件 (8) より $\alpha_n = 0$ となることが分かります。また，(5) で $t = 0$ とすると

$$
y(x,0) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \cdots + C_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) + \cdots \tag{9}
$$

となり，この両辺に $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ を掛けて弦の全長にわたって積分すると，右辺は

$$
\begin{aligned}
\int_0^L y(x,0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx &= \int_0^L \left\{ C_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \cdots + C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \cdots \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&= \frac{L}{2} C_n
\end{aligned}
$$

となって係数 C_n の項がでてきます。一方，左辺は

$$
\begin{aligned}
\int_0^L y(x,0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx &= \int_0^{x_0} \frac{x}{x_0} y_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \int_{x_0}^L \left(1 - \frac{x - x_0}{L - x_0}\right) y_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&= \frac{L^3 y_0}{\pi^2 x_0 (L - x_0) n^2} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)
\end{aligned}
$$

となるので，これから係数 C_n は

$$
C_n = \frac{2}{\pi^2} \frac{L^2 y_0}{x_0 (L - x_0)} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \tag{10}
$$

と求められます。したがって初期条件を満たす弦の運動方程式の解は

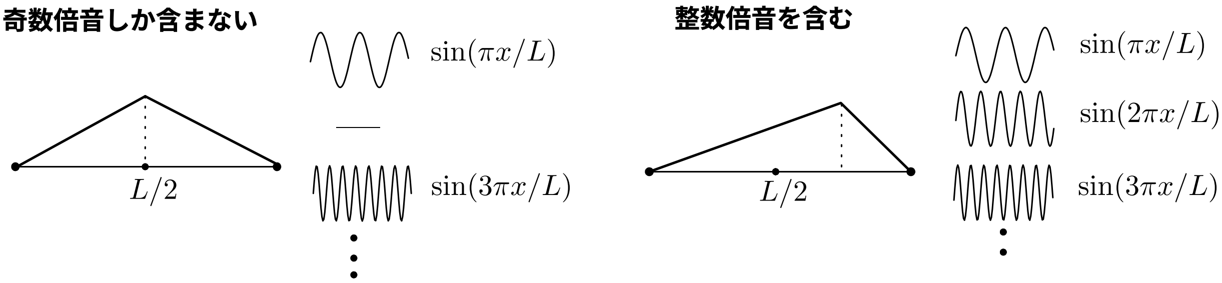
$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) \\
&= \frac{2}{\pi^2} \frac{L^2 y_0}{x_0 (L - x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)
\end{aligned} \tag{11}
$$

となります。

この解をよく眺めてください。無数の $\sin(n\pi/L)$ を 重ねあわせ（合成）たものになっていますね。$n = 1$ は基準音，$n = 2$ は 2 倍音，$n = 3$ は 3 倍音 $\cdots$ と呼ばれます。弦は時々刻々波打って振動しますが，この波は個々の倍音が重なり合った合成波であることが分かります。

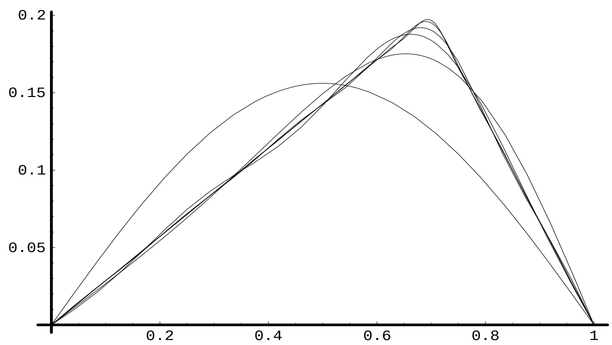
■弦を弾く位置と倍音の関係

ところで，$t = 0$ で弦の中央をつまみ上げた場合とそれ以外の場合では，成分波として含まれる倍音に違いがあります。弦の中央をつまみ上げた場合は**奇数の倍音**のみで構成されるのに対し，それ以外の箇所をつまみ上げた場合は**すべての倍音**が含まれます。



$$
\begin{cases}
x_0 = L/2 \quad y(x,0) = \dfrac{8y_0^2}{\pi^2}\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{L}x\right) - \dfrac{1}{3^2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{L}x\right) + \dfrac{1}{5^2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{L}x\right) - \dfrac{1}{7^2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{L}x\right) + \cdots\right\} \\[2ex]
x_0 \neq L/2 \quad y(x,0) = \dfrac{2}{\pi^2}\dfrac{L^2 y_0}{x_0(L-x_0)}\left\{\sin\left(\dfrac{\pi x_0}{L}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{L}x\right) + \dfrac{1}{2^2}\sin\left(\dfrac{2\pi x_0}{L}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{L}x\right)\right. \\[2ex]
\qquad\qquad\left. + \dfrac{1}{3^2}\sin\left(\dfrac{3\pi x_0}{L}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{L}x\right) + \dfrac{1}{4^2}\sin\left(\dfrac{4\pi x_0}{L}\right)\sin\left(\dfrac{4\pi}{L}x\right) + \cdots\right\}
\end{cases}
\tag{12}
$$

右図は $x_0 = 0.7$, $y_0 = 0.2$ とした場合の $y(x,0)$ 近似曲線で，下から順番に $n = 1, 3, 5, 10, 20, 30$ の場合にあたります。n が増えるにしたがって先端の尖りが鋭くなり，初期の弦の形状 $y(x,0)$ に近づいている様子がわかります。

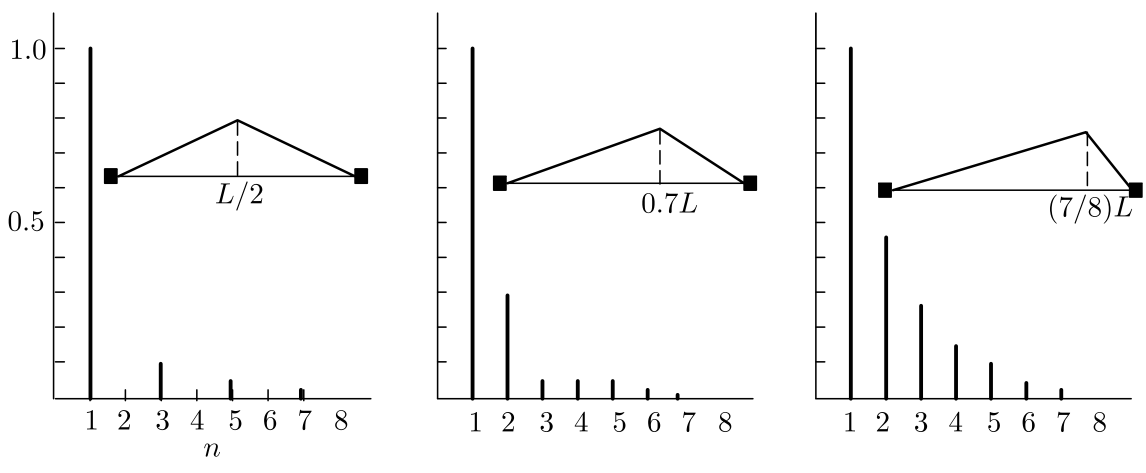


■弦を弾く位置と含まれる倍音の割合

弦の振動に含まれる第 n 倍音の割合は次式から求められます。

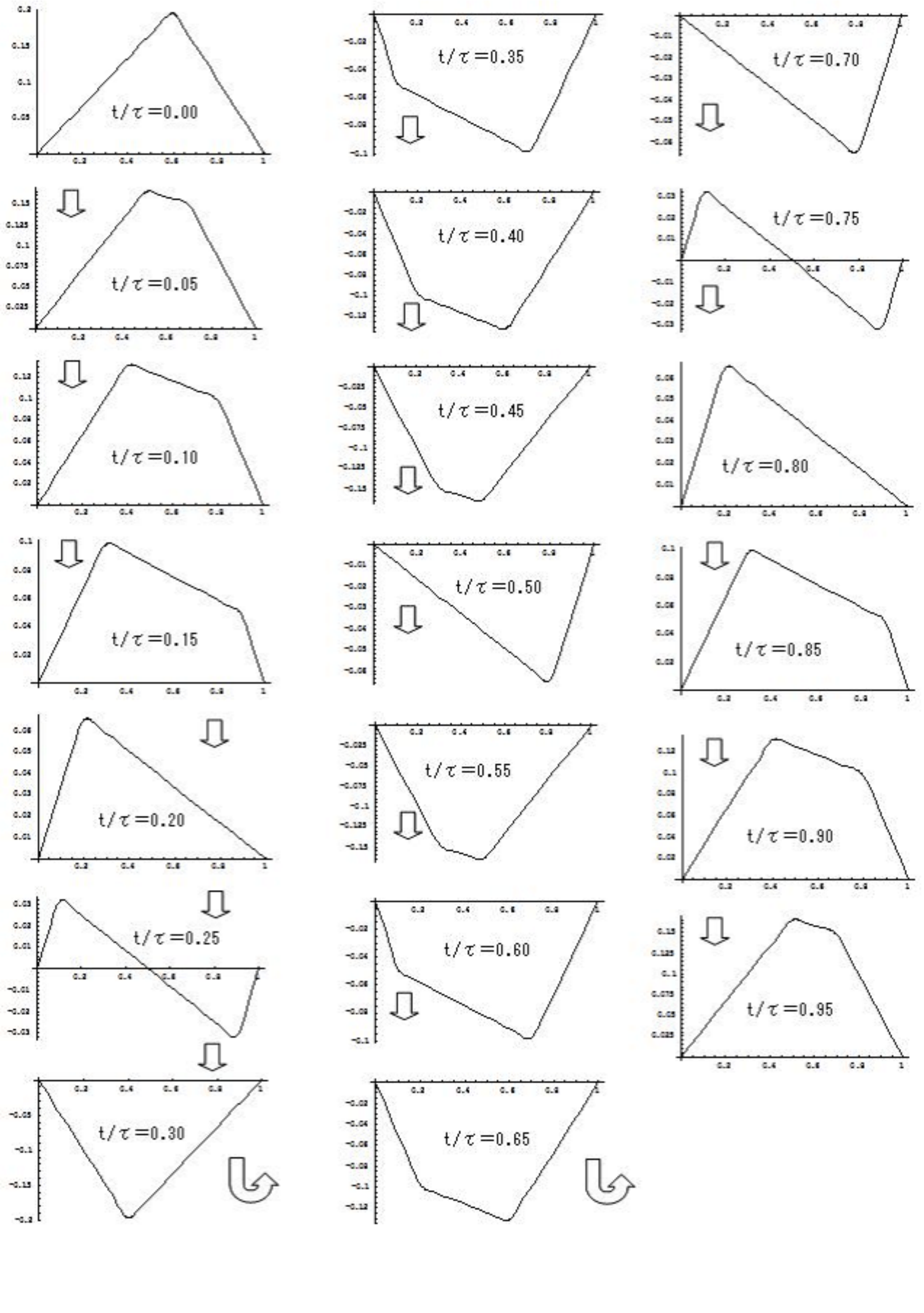
$$
\frac{C_n}{C_1} = \frac{1}{n^2}\frac{\sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x_0}{L}\right)} \tag{13}
$$

この n 倍音の割合をグラフに描くと下図のようになります。弾く位置によって倍音の割合がかなり変わることが分かりますね。



■弦の変位 $y(x,t)$ の時間変化

$t=0$ から 1 周期[2]の間の弦の振動の様子を 0.05 間隔で示します。なお，(11) の解 $y(x,t)$ で n=20 としています。



0.3　弦の振動と音色

ここからクラシックギターの音色の話に入ります。クラシックギターの音がでる仕組みは，単純に考えると弦の振動をブリッジが拾って表面板を振動・共鳴させ，ボディの中の空気も共鳴してサウン

[2]弦の振動数 $f=\dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\sigma}}=\dfrac{v}{2L}$，周期 $\tau=\dfrac{1}{f}=2L/v$

ドホールから音が外にでていくということになります[3]（「クラシックギター一口メモ」も参照されたし）。

Naoaki Maeda 氏のブログ（https://plus.google.com/107796914480005845140/posts/dWNxT6Ai9PA）から引用させていただくと

****

クラシックギターは、基本的に弦の振動方向が表面板と並行ではなくて垂直方向に振動させることで深い音がでるように設計されています。クラシックギターをピックで弾いたり、クラシックのトレーニングを受けていない Jazz 系のギタリストがクラシックギターを弾いた場合、エレキギターと同様に弦を表面板と水平方向に振動させるので、同じギターを弾いていても本来の性能を生かしきれず、か細く、爪やピックが弦にあたる音がカチャカチャとする（私にとっては）耳障りな音しか出すことができませ。

クラシックギターの音色は 7 割がギタリストの腕で、残りの 3 割がギターの性能 と言われているぐらいなので、上手い人が最低限の性能を持った 7 万円台のギターを弾いてもいい音がしますし、クラシックギター本来の弾き方を知らない人が 300 万円のギターを弾いても、決していい音は出せません。

弦を表面板と垂直方向に振動させるといっても、ピチカートのように弦を引っ張り上げてはいけません。逆に弦をボディー側に押し込んで離すことで、クラシックギター本来の音がするようになります。

もう一つの注意点は、弦を引くときに、先ずは指の肉の部分で弦に触れて、確実に弦の振動を止めてから、弦をボディー方向に押しこみ、最後に爪の内側で滑らすようにして指を振りぬくことです。決して、弦が振動している間に、右手の爪の部分を弦に当ててはいけません。クラシックギターの世界では、いわゆる爪カチャと言わている非常に耳障りな音がします。

また、音量のコントロールは指の動かす速さではなくて、弦を押し込む量で調整 します。指の腹の部分で弦の振動を止めてから、指を振りきるまでの時間はマチマチですが、指を振り切るスピード自体は常に一定です。

さらに、音色のコントロールは、基本的に弦の振動方向の垂直成分と水平成分の割合を調整することで行います。具体的には、弦を押し込んでから指を振りぬく角度をブリッジと並行にすれば、水平成分が多くなって細くて硬い音色になりますし、逆に角度をつけるほど垂直成分の割合が多くなって深くて甘い音がします。

もちろん ブリッジ側を弾けば固い音になりますし、逆にサウンドホール側で弾くと甘い音 になりますが、それだけでしか音色をコントロールできないと、サウンドホールに近い人差し指で弾けば甘い音になるし、逆に、ブリッジに最も近い薬指で弾けば固くなってしまうという、非常に音色がギクシャクした演奏になりますし、薬指はメロディーを弾くことが最も多い、音楽の要の指なので、ここの音がか細く硬くては、まともな演奏になりません。

このあたり、何が良い音で何が悪い音なのかは、実際に目の前で生音を出してもらわないと、CD/DVD 教材では会得しにくいものがあるので、先生に師事するのが早道なのです。しかしながら、地理的に先生を探すのが難しい場合は、クラシックギターのコンサートの前に陣取って聞き耳を立てるだけでも効果がありますよ。下手な教則本や DVD をいくつも購入するよりは、生音を体験する機会を多く作った方が上達することうけあいです。

****（引用終わり。下線は筆者）

[3]近代クラシックギター製作の祖とされるアントニオ・デ・トーレス (スペイン，1817 − 1892）は,「ギターは表板が最も大切である」と提唱し，それを裏付けるように表板以外の胴の部分をボール紙で作ったギターを作りました。そのギターを実際に弾いたドミンゴ・プラト（スペインのギタリスト，1886 − 1944）によれは，その音色は「やや虚ろで柔らかで重々しいが並々ならぬ音色をもっていた」ということです。（湯浅ジョウイチ：ギター面白雑学辞典）。

以上，興味深々，深くて大変参考になるお話ですね。

“ ブリッジ側を弾けば固い音になり、サウンドホール側で弾くと甘い音になる“ というのは何故かというあたりをまともに取り上げて説明しようとすると，クラシックギターの音のでる仕組みという大変むつかしい問題になり私の手には負えません。そこで，この節では問題を思い切って単純化し，弦の運動方程式の解から得られた知見にもとづいて簡単に説明することにします（ここまで読まれた方はもう説明不要かもしれませんは。。。）。

- **ピックで弾くと音色が鋭いのはなぜ？**
  ピックが当たっている弦の部分の形状は三角形の頂点にように尖っていますね。一方，指頭で弾く場合は弦の形状は丸みをもっています。したがって弾弦すると，ピックのケースでは指頭で弾く場合に比べて非常に高い倍音成分（高周波数成分）まで含んだ波となり，この結果音色が鋭くなるわけです。

- **ブリッジ側を弾けば固い音になり、サウンドホール側で弾くと甘い音になるのはなせ？**
  クラシックギターで 12 フレット（弦長の半分の位置）あたりを弾いた場合とブリッジに近いあたりを弾いた場合，前者はピアノピアニッシモ（ppp），後者はフォルテッシモ (ff) に当たると思いますが,「柔らかい音」と「硬くて強い音」というように明らかに音色は違いますね。これも倍音成分の違いで説明できます。12 フレットで弾いた場合には奇数の倍音しか含まれないのに対し，ブリッジよりの場合は偶奇整数の倍音が含まれるからです。

- **太い弦の音が低いのはなぜ？**
  弦の振動数は
  $$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} \tag{14}$$
  で与えられ[4]，長さ L と張力 T そして線密度 σ で決まります。一般的なクラシックギターの場合，6 本の弦はすべて同じ長さの $L = 65\text{cm}$，張り具合も大体 40Kgf（重量キログラム）で 6 本の弦が張られています。6 弦や 5 弦などの太い弦は線密度 σ が大きいので上の式より振動数が小さくなることが分かります。この結果，より低い音がでることになるわけです。

2017.3.10 by *KENZOU*

[4]「弦の振動からわかること」を参照。