＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Poisson 括弧　について

2001.6.10 by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[*Poisson* 括弧のポイント]

・*Poisson* 括弧を不変に保つ変換は正準変換である

・*Poisson* の括弧式を使えば正準方程式を対称的な形に書ける

・*Poisson* の括弧式[F , G]は、無限小変換により F の変わる割合を表わす

　等

1.*Poisson* 括弧の定義

$$A=A\left(q_1,\cdots,q_f,p_1,\cdots,p_f\right)$$

$$B=B\left(q_1,\cdots,q_f,p_1,\cdots,p_f\right)$$

$$[A,B]_c=\sum_k\left(\frac{\P A}{\P q_k}\frac{\P B}{\P p_k}-\frac{\P A}{\P p_k}\frac{\P B}{\P q_k}\right) \qquad (1)$$

①正準変数 q_i, p_i とすると

$$\left[q_i,q_j\right]_c=0,\ \left[p_i,p_j\right]_c=0,\ \left[q_i,p_j\right]_c=-\left[p_j,q_i\right]_c=d_{ij} \qquad (i,j=1,¼,f)$$

②正準変換 $\langle q,p\rangle\to\langle Q,P\rangle$ に対して

$$\left[Q_i,Q_j\right]_c=0,\ \left[P_i,P_j\right]_c=0,\ \left[Q_i,P_j\right]_c=-\left[P_j,Q_i\right]_c=d_{ij} \qquad (i,j=1,¼,f)$$

2.*Poisson* 括弧の性質

1) $[A,B]_c=-[B,A]_c$

2) $[A,a\,B+b\,C]_c=a\,[A,B]_c+b\,[A,C]_c$ 　　　a , b :任意定数

3) $\left[A,[B,C]_c\right]_c+\left[B,[C,A]_c\right]_c+\left[C,[A,B]_c\right]_c=0$

4) $\dfrac{d}{dt}[A,B]_c=\left[\dfrac{dA}{dt},B\right]_c+\left[A,\dfrac{dB}{dt}\right]_c$

5) $[A,B]_c=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\P A}{\P a_k}\left[a_k,B\right]_c$

[証明] --

1) $[A,B]_c=\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right)=-\sum_k\left(\frac{\partial B}{\partial q_k}\frac{\partial A}{\partial p_k}-\frac{\partial B}{\partial p_k}\frac{\partial A}{\partial q_k}\right)=-[B,A]_c$

$[A,A]_c=-[A,A]_c=0$

2) $[A,\alpha B+\beta C]_c=[A,\alpha B]_c+[A,\beta C]_c=\alpha[A,B]_c+\beta[A,C]_c$

3) $[A,[B,C]_c]_c=\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}[B,C]_c-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}[B,C]_c\right)$

$$= \sum_{kj}\Big[\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial^2 B}{\partial p_k\partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_j}+\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial^2 C}{\partial p_k\partial p_j}-\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial^2 B}{\partial p_k\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_j}-\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial^2 C}{\partial p_k\partial q_j}$$

$$-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial^2 B}{\partial q_k\partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_j}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial^2 C}{\partial q_k\partial p_j}+\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial^2 B}{\partial q_k\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_j}+\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial^2 C}{\partial q_k\partial q_j}\Big] \qquad ①$$

$$[B,[C,A]_c]_c = \sum_{kj}\Big[\frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial q_k}\frac{\partial^2 C}{\partial p_k\partial q_j}+\frac{\partial^2 A}{\partial p_k\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial q_k}\frac{\partial C}{\partial q_j}-\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial q_k}\frac{\partial^2 C}{\partial p_k\partial p_j}-\frac{\partial^2 A}{\partial p_k\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial q_k}\frac{\partial C}{\partial p_j}$$

$$-\frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial p_k}\frac{\partial^2 C}{\partial q_k\partial q_j}-\frac{\partial^2 A}{\partial q_k\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial p_k}\frac{\partial C}{\partial q_j}+\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_k}\frac{\partial^2 C}{\partial q_k\partial p_j}+\frac{\partial^2 A}{\partial q_k\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_k}\frac{\partial C}{\partial p_j}\Big] \qquad ②$$

$$[C,[A,B]_c]_c = \sum_{kj}\Big[\frac{\partial^2 A}{\partial p_k\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_k}+\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial^2 B}{\partial p_k\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_k}-\frac{\partial^2 A}{\partial p_k\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial C}{\partial q_k}-\frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial^2 B}{\partial p_k\partial q_j}\frac{\partial C}{\partial q_k}$$

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial q_k\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial p_k}-\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial^2 B}{\partial q_k\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial p_k}+\frac{\partial^2 A}{\partial q_k\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_k}+\frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial^2 B}{\partial q_k\partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_k}\Big] \qquad ③$$

∴ ①＋②＋③＝０(一つづつ丹念にあたるしかない・・・フウ～(^^);;)

4) $$\frac{d}{dt}[A,B]_c = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right)=\sum_k\left(\frac{\partial \dot A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k}-\frac{\partial \dot A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right)+\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial \dot B}{\partial p_k}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial \dot B}{\partial q_k}\right)=\left[\frac{dA}{dt},B\right]_c+\left[A,\frac{dB}{dt}\right]_c$$

5) $a_1,\dots,a_m$ が$q_i,p_i(i=1,\dots,f)$の関数で、さらにAが $a_1,\dots,a_m$ の関数とすると

$A=A(a_1,\dots,a_m)$, $a_i=a_i(q_1,\dots,q_f;p_1,\dots,p_f)$

$$\frac{\partial A}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial A}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial q_k},\quad \frac{\partial A}{\partial p_k}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial A}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial p_k},\quad \frac{\partial B}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial B}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial q_k},\quad \frac{\partial B}{\partial p_k}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial B}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial p_k}$$

となるから

$$[A,B]_c=\sum_i^f\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{f}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial A}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial q_i}\right)\right\}=\sum_{i=1}^{f}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial A}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial A}{\partial a_k}\left\{\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial a_k}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial a_k}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)\right\}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial A}{\partial a_k}[a_k,B]_c \qquad //$$

３.*Poisson*括弧と正準変換

１)*Poisson*括弧を不変に保つような変数変換は正準変換である。

任意の関数A,Bとし、正準変数 q,p,Q,Pとします。ただし、$(q,p)\to(Q,P)$は正準変換とします（←*Poisson*括弧を不変にする変換は正準変換であるをまともには証明しません。手抜き(^^);;）。

$$A=A(q_1,\dots,q_f;p_1,\dots,p_f),\qquad B=B(q_1,\dots,q_f;p_1,\dots,p_f)$$

$$q_k=q_k(Q_1,\dots,Q_f,P_1,\dots,P_f),\qquad p_k=p_k(Q_1,\dots,Q_f,P_1,\dots,P_f)$$

すると次式が成り立ちます。(逆に(2)式が成立すると$(q,p)\to(Q,P)$は正準変換である、ということになります)

$$[A,B]_{qp}=\sum_k\left(\frac{\P A}{\P q_k}\frac{\P B}{\P p_k}-\frac{\P A}{\P p_k}\frac{\P B}{\P q_k}\right)$$

$$=\sum_k\left(\frac{\P A}{\P Q_k}\frac{\P B}{\P P_k}-\frac{\P A}{\P P_k}\frac{\P B}{\P Q_k}\right) \qquad (2)$$

$$=[A,B]_{QP}$$

※下書きサフィックスに注意)

この式の証明のおまけとして(3),(4)が導かれます。

$$\left[A,Q_m\right]_C=-\frac{\P A}{\P P_m},\quad \left[A,q_m\right]_C=-\frac{\P A}{\P p_m} \tag{3}$$

$$\left[A,P_m\right]_C=\frac{\P A}{\P Q_m},\quad \left[A,p_m\right]_C=\frac{\P A}{\P q_m} \tag{4}$$

[証明] ---

1) A,Bを２つの任意の関数として、正準変数の組 p,q を用いてPoissonの括弧式を書くと

$$[A,B]_{qp}=\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

とすると、①式は

$$[A,B]_{qp}=\sum_{k,m}\left[\frac{\partial A}{\partial q_k}\left(\frac{\partial B}{\partial Q_m}\frac{\partial Q_m}{\partial p_k}+\frac{\partial B}{\partial P_m}\frac{\partial P_m}{\partial p_k}\right)-\frac{\partial A}{\partial p_k}\left(\frac{\partial B}{\partial Q_m}\frac{\partial Q_m}{\partial q_k}+\frac{\partial B}{\partial P_m}\frac{\partial P_m}{\partial q_k}\right)\right]$$

$$=\sum_{k,m}\left[\frac{\partial B}{\partial Q_m}\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial Q_m}{\partial p_j}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial Q_m}{\partial q_j}\right)+\frac{\partial B}{\partial P_m}\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial P_m}{\partial p_j}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial P_m}{\partial q_k}\right)\right]$$

$$=\sum_m\left(\frac{\partial B}{\partial Q_m}[A,Q_m]_{qp}+\frac{\partial B}{\partial P_m}[A,P_m]_{qp}\right) \quad \cdots\cdots ②$$

となる。そこで②式のAの変わりにQ_m,Bの変わりにAを入れると

$$[Q_m,A]_{qp}=\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial Q_k}[Q_m,Q_k]_{qp}+\frac{\partial A}{\partial P_k}[Q_m,P_k]_{qp}\right) \quad \cdots\cdots ③$$

$$=\sum_k\frac{\partial A}{\partial P_k}\delta_{km}=\frac{\partial A}{\partial P_m}$$ ただし、$[Q_i,Q_j]=0$, $[Q_i,P_j]=\delta_{ij}$ を使った。

③式より $[A,Q_m]_{qp}=-\dfrac{\partial A}{\partial P_m}$ (この関係式は有用です。^ ^) $\cdots\cdots$ ④

同様にして

$$[P_m,A]_{qp}=\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial Q_k}[P_m,Q_k]_{qp}+\frac{\partial A}{\partial P_k}[P_m,P_k]_{qp}\right)=-\sum_k\frac{\partial A}{\partial Q_k}\delta_{km}=-\frac{\partial A}{\partial Qm}$$

$$\therefore [A,P_m]_{qp}=\frac{\partial A}{\partial Q_m} \quad \cdots\cdots ⑤$$

④と⑤を②に入れると

$$[A,B]_{qp}=\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right)=\sum_m\left(\frac{\partial A}{\partial Qm}\frac{\partial B}{\partial P_m}-\frac{\partial A}{\partial P_m}\frac{\partial B}{\partial Q_m}\right)=[A,B]_{QP} \quad //$$

4. *Poisson*括弧と正準方程式

1)*Poisson*の括弧式を使えば正準方程式を対称的な形に書ける。

正準方程式

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1,\ldots,f)$$

Poisson 括弧を使うと

$$\dot{p}_i=\left[p_i,H\right],\ \dot{q}_i=\left[q_i,H\right] \qquad (i=1,¼,f)$$

2)力学的量の時間変化は次式で表される。

$$\frac{dF}{dt}=[F,H]+\frac{\P F}{\P t}$$

$$\frac{dF}{dt}=[F,H] \qquad （F \text{ が時間 } t \text{ を含まない場合}）$$

→ ***Hamiltonian H*とのPoissonの括弧式がゼロになるようなすべての力学的量は運動の定数となる。**

→ **逆にすべての運動の定数となる力学的量と*Hamiltonian*との*Poisson*の括弧式はゼロでなければならない。**

3) **2つの運動の定数*A*, *B*の*Poisson*の括弧式はそれ自身運動の定数となる。**

$$[[A,B],H]=0$$

4) ***Poisson*の括弧式$[F,G]$は無限小変換により F の変わる割合を表わす。**

$$DF=[F,G]$$

5) ***G*で生成される無限小変換が*Hamiltonian H*を変えないならば母関数*G*は保存される。**

$$H(Q;P)-H(q;p)=e[H,G]=-e\frac{dG}{dt}$$

→ ***H*が無限小空間推進に対して不変であれば、その系の全運動量は保存される。**

→ ***H*が無限小回転に対して不変であれば、その系の全角運動量は保存される。**

[証明] --

1) いま、Fを $q,p,(t)$の関数とすると(3),(4)式より

$$\frac{\partial F}{\partial q_i}=[F,p_i],\quad \frac{\partial F}{\partial p_i}=-[F,q_i]=[q_i,F] \qquad \cdots\cdots ①$$

と書ける。関数FとしてHamiltonian Hを選ぶと①式は

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i}=\dot{p}_i=[p_i,H],\quad \frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i=[q_i,H] \qquad \cdots\cdots ②$$

2) F を t を含まない q,p の任意の関数とすると、正準方程式を使って

$$\frac{dF}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

と書けるから

$$\frac{dF}{dt}=[F,H] \qquad \cdots\cdots ③$$

Fがtを含んでいる場合も同様にして

$$\frac{dF}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\therefore\frac{dF}{dt}=[F,H]+\frac{\partial F}{\partial t} \qquad \cdots\cdots ④$$

3) 何らかの方法である２つの運動の定数が得られたら、Jacobiの恒等式(テキスト I-5.23)を使って他の定数を構成することができる。
具体的には、Jacobiの恒等式により

$$[A,[B,C]_c]_c+[B,[C,A]_c]_c=-[C,[A,B]_c]_c=[[A,B]_c,C]_c \qquad \cdots\cdots ⑤$$

いま、力学的量A,Bとも運動の定数である場合、CとしてHamiltonianをとれば

$$[A,[B,H]_c]_c=[A,0]_c=0,\quad [B,[H,A]_c]_c=[B,0]_c=0,$$

$\therefore\ [[A,B]_c,H]=0$ ・・・・・⑥

次に、２つの運動の定数が時間をあらわに含んでいるときでも、２つの定数のPoissonの括弧式は運動の定数であることを以下に証明する。

２つの運動の定数をF,Gとすると④式より

$$\frac{dF}{dt} = [F,H]_c + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,\ \frac{dG}{dt} = [G,H]_c + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

次に$[F,G]_c$の時間微分をとると

$$\frac{d}{dt}[F,G]_c = \left[\frac{dF}{dt},G\right]_c + \left[F,\frac{dG}{dt}\right]_c = \left[[F,H]_c + \frac{\partial F}{\partial t},G\right]_c + \left[F,[G,H]_c + \frac{\partial G}{\partial t}\right]_c$$

$$= [0,G]_c + [F,0]_c = 0$$

【例】

(Q)　H およびある力学的量 F が運動の定数であれば、$\frac{\partial F}{\partial t}$も運動の定数である。

(A)　H およびある力学的量 F が運動の定数であるから、それらのPoissonの括弧式 $[H,F]_c$ も運動の定数となる。

また、Fが運動の定数であるから $\frac{dF}{dt} = [F,H]_c + \frac{\partial F}{\partial t} = -[H,F]_c + \frac{\partial F}{\partial t} = 0\ \therefore\ \frac{\partial F}{\partial t} = [H,F]_c$

となって $\frac{\partial F}{\partial t}$ も運動の定数となる。

具体例として、質量mの自由粒子の運動を考える。この場合Hamiltonian H は $H=\frac{1}{2m}p^2$

となり、Hamiltonianは保存される $\left(\frac{dH}{dt}=0\right)$。

このとき $F=x-\frac{pt}{m}$ という運動の定数が存在しますが、これは運動の定数 $\frac{\partial F}{\partial t}$ に等しいことを示す。正準方程式より $x=\frac{p}{m}$, $p = 0$, また、$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x-\frac{pt}{m}\right) = 0$ となり、確かに F は運動の定数となる。

一方、$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{p}{m}$ となりますが, $[H,F]_c$ を計算すると $[H,F]_c = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{p}{m}$ となって、$\frac{\partial F}{\partial t} = [H,F]_c$ となる。

4)　無限小変換 $Q_i=q_i+\boldsymbol{d}q_i$, $P_i=p_i+\boldsymbol{d}p_i$ により q, p の任意の関数 F(q,p) の受ける変化を $\varepsilon \boldsymbol{D}F$ と書くと

$$\varepsilon \boldsymbol{D}F = F(Q,P) - F(q,p) = \sum_i \left\{\frac{\partial F}{\partial q_i}(Q_i - q_i) + \frac{\partial F}{\partial p_i}(P_i - p_i)\right\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i\right) = \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)$$

$\therefore\ \boldsymbol{D}F = [F,G]$

ただし, ε は無限小定数、G は無限小変換の母関数で $\delta q_i = \varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}$, $\delta p_i = -\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}$ を満たす。

5)　無限小変換がHamiltonianに及ぼす変化を表わす恒等式は 4) より　$\Delta H=[H,G]_c$ となる。

正準方程式をPoisson括弧を用いて表わすと $\frac{dG}{dt} = -[H,G]_c$

$\therefore\ \varepsilon\Delta H = H(Q;P) - H(q;p) = \varepsilon[H,G] = -\varepsilon\frac{dG}{dt}$

== END ==