＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

レヴィ・チヴィタ（Levi Civita）の全反対称テンソル

2003．06．21 by KENZOU

[2003.12.13・・問題７:角運動量表示を追加]

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

1. はじめに

Levi-Civitaの記号は、ベクトル計算において、とくに **外積から内積に変換する** 際に大きな効能があります。ここでは、電磁気学再入門の「おまけ」として、また、今までベクトル計算でいろいろ計算させられた御礼（？）として、Levi-Civitaの記号を使った具体的計算法をレポートします。また、練習問題ものせていますので、ＴＲＹしてみてください。

2．Levi-Civitaの全反対称テンソル

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & i,j,k \text{ が1，2，3の偶置換であるとき} \quad \{i\,j\,k\}=\{123\},\{231\},\{312\} \\ -1 & i,j,k \text{ が1，2，3の奇置換であるとき} \quad \{i\,j\,k\}=\{132\},\{213\},\{321\} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \qquad (1)$$

この定義から

$$e_{123} = 1 \quad \text{であり、}$$

$$e_{ijk} = -e_{jik} = -e_{ikj} = e_{jki} = e_{kij} = e_{kji} \qquad (2)$$

となります。また、

$$e_{ijk}e_{klm} = d_{il}d_{jm} - d_{im}d_{jl} \qquad (3)$$

$$e_{ijk}e_{ilm} = d_{jl}d_{km} - d_{jm}d_{kl} \qquad (4)$$

$$e_{ijk}e_{jkl} = 2!\,d_{il} \qquad (5)$$

$$d_{ij} = 1(i=j),\ 0\ (i \neq j) \qquad (6)$$

が成り立ちます。

以上、たったこれだけです。これがベクトル計算で大いに威力を発揮します。

演習問題をやる前に 便利な［表記］を以下に載せておきます。

【表 記】－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_iB_i \qquad ①$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i = e_{ijk}\,A_jB_k \qquad ②$$

$$(\nabla y)_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad ③$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad ④$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_i = e_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad ⑤$$

$$(\nabla \boldsymbol{B})_{ij} = \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \quad ⑥$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \nabla y = A_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad ⑦$$

$$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B})_i = A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \quad ⑧$$

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = A_i B_j \quad ⑨$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{AB}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle A_i B_j \rangle \quad ⑩$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

■練習問題（Practice＆ Practice!！）

[問題 1]

2個のベクトル A とB のベクトル積 の i 成分は

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_i = e_{ijk} A_j B_k$$

と書けることを示せ。

[答え]

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}] = \langle A_2 B_3 - A_3 B_2 \ , A_3 B_1 - A_1 B_3 \ , A_1 B_2 - A_2 B_1 \rangle$$

であるから、各成分を書くと

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 = e_{1jk} A_j B_k \ ,$$

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 = e_{2jk} A_j B_k$$

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 = e_{3jk} A_j B_k$$

$\therefore \quad [\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_i = e_{ijk}A_j B_k$

[問題 2]
３個のベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ について

$$[\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]]_i = e_{ijk}A_j\left(e_{klm}B_l C_m\right) = \left(d_{il}d_{jm} - d_{lm}d_{jl}\right)A_j B_l C_m$$

$$= B_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - C_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$[\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

と書けることを示せ。

[答え]
問題（1）より

$$[\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]]_i = e_{ijk}A_j[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]_k$$

$$= e_{ijk}A_j\left(e_{klm}B_l C_m\right) = e_{ijk}e_{klm}A_j B_l C_m$$

$$= \left(d_{il}d_{jm} - d_{im}d_{jl}\right)A_j B_l C_m \quad \leftarrow \text{（4）を使った。}$$

$$= d_{il}d_{jm}A_j B_l C_m - d_{im}d_{jl}A_j B_l C_m$$

$$= B_i d_{jm}A_j C_m - C_i d_{jl}A_j B_l$$

$$= B_i\left(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3\right) - C_i\left(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\right)$$

$$= B_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - C_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$\therefore \quad [\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ **が導かれます。**

[問題 3]

$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]\cdot[\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}] = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ **を導け。**

[答え]

$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_i = e_{ijk}A_j B_k$, $[\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}]_i = e_{ilm}C_l D_m$

$$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]\cdot[\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}]_i = e_{ijk}A_j B_k e_{ilm}C_l D_m = e_{ijk}e_{ilm}A_j B_k C_l D_m$$

$$= \left(d_{jl}d_{km} - d_{jm}d_{kl}\right)A_j B_k C_l D_m \quad \leftarrow \text{⑸を使った。}$$

$$= d_{jl}d_{km}A_j B_k C_l D_m - d_{jm}d_{kl}A_j B_k C_l D_m$$

$$= (d_{jl}\,A_j C_l)(d_{km} B_k D_m) - \left\{(d_{jm} A_j D_m)(d_{kl}\,B_k C_l)\right\}$$

$$= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

この問題は次ぎの点が勉強になりました。つまり、左辺はスカラー量で、 $\boldsymbol{i}$ 成分というのは意味がないですが、右辺はそれぞれ成分表示で書きました。計算を進めると結局ベクトルの内積のスカラー量となり、メデタシメデタシということですが、左辺の成分表示という点が気にはなりましたが。

[問題 4]

$$\left[\boldsymbol{A}\times(\tilde{\mathbf{N}}\times\boldsymbol{B})\right] = \left[(\tilde{\mathbf{N}}\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A} - (\mathbf{A}\cdot\tilde{\mathbf{N}})\boldsymbol{B}\right]$$

を導け。

[答え]

$$\left[\boldsymbol{A}\times(\tilde{\mathbf{N}}\times\boldsymbol{B})\right]_i = e_{ijk} A_j (\tilde{\mathbf{N}}\times\boldsymbol{B})_k$$

$$= e_{ijk} A_j \left(e_{klm} \frac{\partial B_m}{\partial x_l} \right) \quad \leftarrow \text{表記⑤を使った。}$$

$$= \left(d_{il} d_{jm} - d_{im} d_{jl}\right) A_j \frac{\partial B_m}{\partial x_l} \qquad \leftarrow \text{（3）を使った。}$$

$$= \frac{\partial B_j}{\partial x_i} A_j - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

$$= \left[(\tilde{\mathbf{N}}\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A} - (\mathbf{A}\cdot\tilde{\mathbf{N}})\boldsymbol{B}\right]_i$$

[問題 5]

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

を導け。

[答え]

$$\left[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]_i = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla\times\boldsymbol{A})_k$$

$$= e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(e_{klm} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right)$$

$$= \left(d_{il} d_{jm} - d_{im} d_{jl}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \qquad \leftarrow \text{（3）を使った。}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A_j}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j^2}$$ **← 第1項の微分の順序を入れ替えた。**

$$= \left[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}\right]_i$$

[問題 6]

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

を導け。

[答え]

$$[\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]_i = \boldsymbol{e}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_k$$

$$= \boldsymbol{e}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{e}_{klm}A_l B_m\right)$$

$$= \left(\boldsymbol{d}_{il}\boldsymbol{d}_{jm} - \boldsymbol{d}_{im}\boldsymbol{d}_{jl}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}A_l B_m$$

$$= \boldsymbol{d}_{il}\boldsymbol{d}_{jm}\frac{\partial}{\partial x_j}A_l B_m - \boldsymbol{d}_{im}\boldsymbol{d}_{jl}\frac{\partial}{\partial x_j}A_l B_m$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}A_i B_j - \frac{\partial}{\partial x_j}A_j B_i$$

$$= \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i}B_j + A_i\frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_j}B_i + A_j\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= \left[\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\right]_i$$

[問題 7]（2003.12.13 追加）

量子力学での軌道角運動量を$\boldsymbol{L}(L_1, L_2, L_3)$ とすると$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ と書ける。これから

$$L_i = \boldsymbol{e}_{ijk}x_j p_k$$

となることを示せ。また次ぎの交換関係が成立することを示せ。

$$[L_i\ ,L_j]=i\hbar e_{ijk}L_k$$

[答え]

問題１と同じであるから

$$L_i=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_i=e_{ilk}\,x_l p_k \qquad ①$$

が成り立つ。また、

$$L_j=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_j=e_{jmn}x_m p_n \qquad ①'$$

と書ける。ここで e の足をどう書くか迷うところだが、一番左の足は L_j の j を受け継ぐから j でよいが、次ぎの足は L_i で j,k が既に使われているからそれ意外の例えば m,n と書く、ここがポイント。従って交換関係は

$$[L_i\ ,L_j]=L_iL_j-L_jL_i=e_{ilk}e_{jmn}[x_lp_k\ ,x_mp_n] \qquad ②$$

となる。公式 $[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$ を使うと $A=x_lp_k\ ,B=x_m\ ,C=p_n$ とおいて

$$[L_i\ ,L_j]=e_{ilk}e_{jmn}\{x_m[x_lp_k,p_n]+[x_lp_k,x_m]p_n\}$$

$$=e_{ilk}e_{jmm}\{x_m(-(x_l[p_n,p_k]-[p_n,x_l]p_k))+(-(x_l[x_m,p_k]-[x_m,x_l]p_k)p_n)\}$$

$$=i\hbar e_{ilk}e_{jmn}(x_mp_kd_{nl}-x_lp_nd_{mk})$$

$$=i\hbar(e_{ilk}e_{jml}x_mp_k-e_{ilk}e_{jkn}x_lp_n) \qquad ③$$

ここで交換関係　$[x_i,\ p_j]=i\hbar d_{ij}\ ,[p_i,\ p_j]=0,\ [x_i,x_j]=0$　を使った。　**（2）（3）より**

$$e_{ijk}=-e_{jik}=-e_{ikj}=e_{jki}=e_{kij}=e_{kji} \qquad （2）$$

$$e_{ijk}e_{klm}=d_{il}d_{jm}-d_{im}d_{jl} \qquad （3）$$

③の右辺第1項のイプシロンの積を (3) の足の並びとなるように (2) を使って足の並び替えをしてやると

$$e_{ilk}e_{jml}=-e_{ikl}e_{lmj}=-d_{im}d_{kj}+d_{ij}d_{km} \qquad ④$$

となり、同様に③の右辺第2項のイプシロンの積を同様に並び替えてやると

$$e_{ilk}e_{jkn}=-e_{ilk}e_{kjn}=-d_{ij}d_{ln}+d_{in}d_{lj} \qquad ⑤$$

④、⑤を③に代入すると

$$\left[L_i\ ,\ L_j\right]=i\hbar\left(e_{ilk}e_{jml}x_m p_k - e_{ilk}e_{jkn}x_l p_n\right)$$

$$=i\hbar\left\{\left(d_{im}d_{kj} - d_{ij}d_{km}\right)x_m p_k - \left(d_{ij}d_{ln} - d_{in}d_{lj}\right)x_l p_n\right\}$$

$$=i\hbar\left(x_i p_j - x_j p_i\right)$$

$$=i\hbar e_{kij}x_i p_j = L_k$$

＜おまけ＞

$$\left[L_x, L_y\right]=i\hbar L_z\ ,\ \left[L_y, L_z\right]=i\hbar L_x\ ,\ \left[L_z, L_x\right]=i\hbar L_y$$

（以上）