****

複素関数論を勉強する（３）

２００１．９

by ＫＥＮＺＯＵ

****

３回目に入った。3回目は*Caushy*の積分表示から留数までを勉強する。

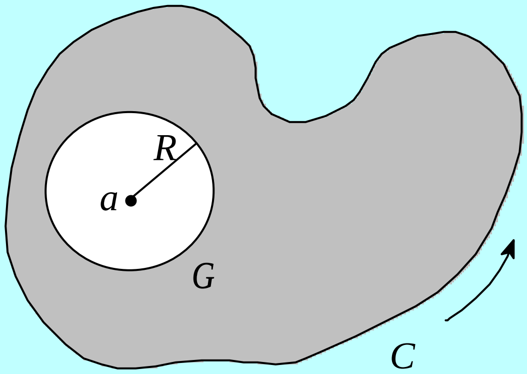
５．*Caushy*の積分表示

◆コーシーの積分表示

【定理１】

・$f(z)$は領域Dで正則であるとする。D内に単一閉曲線Cがあって、Cの内部は領域Dに含まれているとする。点aがCの内部にあれば

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$



［証明］点aを中心とし、十分小さい半径Rの円を描けば、GはCの内部にある。ゆえに $f(z)/z-a$はCろGで囲まれた領域で正則である。したがって ４.*Caushy*の定理【定理４】より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_G \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad ①$$

となる。①の右辺の積分を考える。円Gの上の任意の点は $z=a+Re^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq2\pi)$と表せる。$dz=iRe^{i\theta}d\theta$ であるから

$$\oint_G \frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_0^{2\pi}\frac{f(a+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta$$

$$\therefore\ \oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=i\oint_0^{2\pi}f(a+Re^{i\theta})d\theta$$

ところで上式の左辺はRを含まないので、十分に小さい$R(>0)$に対して、この積分の値はRに無関係である。したがって$f(z)$が連続であることを利用すれば

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=i\lim_{R\to+0}\oint_0^{2\pi}f(a+Re^{i\theta})d\theta=i\oint_0^{2\pi}f(a)d\theta=2\pi i f(a)$$

ゆえに

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

<例題１＞ 次の積分を求めよ。ただし、Cは円$|z|=4$ とする。

(1)$\displaystyle\oint_C \frac{z^3}{z-i}dz$ (2)$\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz$ (3)$\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^2-2z}dz$ (4)$\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z+2)(z-5)}dz$

[解答] ① $z=i$ はCの内部にあり、$f(z)=z^3$ はCの内部で正則であるから

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^3}{z-i}dz=f(i)=(i)^3=-i \quad \therefore \oint_C \frac{z^3}{z-i}dz=2\pi$$

② $z=\pi$ はCの内部にあり、$f(z)=\cos z$ はCの内部で正則であるから

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz=f(\pi)=-1 \qquad \therefore \oint_C \frac{z^3}{z-i}dz=-2\pi i$$

③ $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^2-2z}dz=\frac{1}{2}\left\{\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz-\oint_C \frac{e^z}{z}dz\right\}$ $z=0,2$はCの内部にあり、e^zはCの内部で正則であるから

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz=2\pi if(2)=2\pi ie^2, \qquad \oint_C \frac{e^z}{z}dz=2\pi if(0)=2\pi i$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{z^2-2z}dz=\pi\left(e^2-1\right)i$$

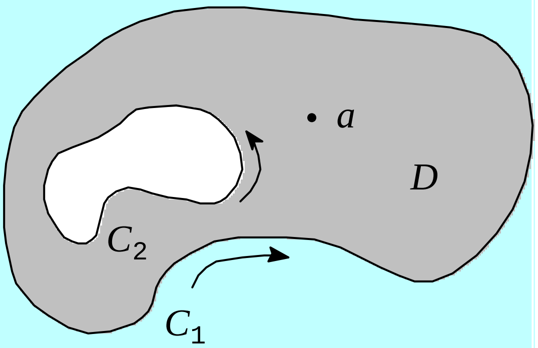
④ $z=-2$はCの内部にあり、$z=5$はCの外部にある。したがって関数$f(z)=\dfrac{z}{z-5}$はCの内部で正則である。よって

$$\oint_C \frac{1}{z+2}\left(\frac{z}{z-5}\right)dz=2\pi if(-2)=\frac{4}{7}\pi i$$

【定理２】・・・定理１の拡張

・単一閉曲線C_1の内部に単一閉曲線C_2があり、C_1とC_2で囲まれた領域Dで関数 $f(z)$は正則であるとする。点 a が領域 D の内部にあれば

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-a}dz$$



いま、定理２の条件が成り立っているとする。点 $a+h$ がCの内部にあるように$|h|$を小さくとる。このとき$Caushy$の積分表示によって

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{2\pi hi}\oint_C \left(\frac{f(z)}{z-(a+h)}-\frac{f(z)}{z-a}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi hi}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)}dz$$

ここで、$h\to 0$ とすれば上式より

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi hi}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz \qquad ①$$

同様にして、①を利用して $f(z)$の代わりに $f'(z)$について上と同じ推論をすれば

$$f''(a)=\frac{2!}{2\pi hi}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

が得られる。
以下同様にして次の公式が成り立つ。

【公式１】

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad (n=1,2,\cdots)$$

【定理２】

・正則な関数$f(z)$は何回でも微分できる。$f(z)$の導関数 $f^{(n)}(z)$ $(n=1,2,\cdots)$は $f(z)$が正則である領域で正則である。

この定理２は正則関数の特徴の一つである。

<例題１> 次の積分を求めよ。ただし、Cは円 $|z|=2$ とする。

(1) $\displaystyle\oint_C \frac{3z^2+z+2}{(z-i)^3}dz$　　　(2) $\displaystyle\oint_C \frac{z+2}{(z-3)(z-1)^2}dz$

[解答] ① 点 $z=i$ はCの内部にあり、関数$f(z)=3z^2+z+2$ はCの内部で正則である。
$f''(i)=6$である。よって

$$\oint_C \frac{3z^2+z+2}{(z-i)^3}dz=\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^3}dz=\frac{2\pi i}{2}f''(i)=6\pi i$$

② 点 $z=1$ はCの内部にあり、点 $z=3$ はCの外部にある。
したがって関数$f(z)=\dfrac{z+2}{z-3}$はCの内部で正則であり、$f'(z)=\dfrac{5}{(z-3)^2}$ 。よって

$$\oint_C \frac{z+2}{(z-3)(z-1)^2}dz=\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz=2\pi i f'(1)=-\frac{5\pi}{2}i$$

６．留　数

◆留 数

関数$f(z)$が点aでは正則でないが、aのある近傍の、a以外のすべての点で正則なとき、点aを $f(z)$の孤立特異点という。このとき、点aを囲む閉曲線Cに沿った積分

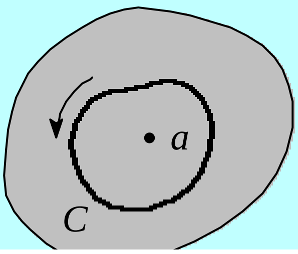
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

の値は、Cの選び方に関係なく一定である。これを$f(z)$の a における留数といい、記号

$Res(f(z);a)$ または $Res(a)$

で表す。したがって

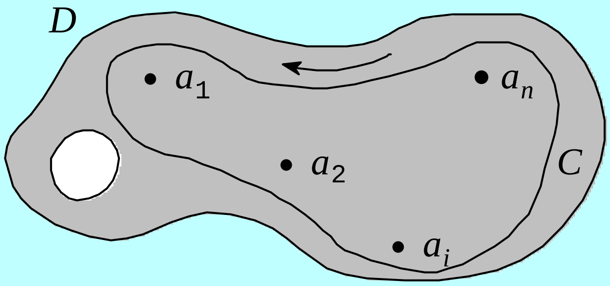
$$\oint_C f(z)dz=2\pi i Res(a)$$



【定理１】（留数定理）

・関数$f(z)$が閉曲線C内に孤立特異点$a_1, a_2, \cdots, a_n$ をもつとき

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(a_k)$$



さて、具体的に留数を計算するには次の２つの公式を用いる（これ以外の計算法はあとでローラン展開の項で述べる）。

【定理２】

・点aが関数$f(z)$の孤立特異点で、極限値

$$\alpha = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

が存在するとき、

$$Res(a) = \alpha$$

である。

【定理３】

・$f(z), g(z)$が点aで正則で、$g(a)=0, g'(a) \neq 0$ならば、$h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$に対して

$$Res(h(z); a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

《注意》$g(a)=0$ならば、$g'(a) = \lim_{z \to a} \dfrac{g(z)}{z-a}$ である。

<例題１> 次の関数の特異点を求め、そこでの留数を計算せよ。

(1) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z(z-2i)}$　　　(2) $f(z) = \dfrac{z}{z^3+8}$

[解答] ① $f(z)$は点$z=0, z=2i$ 以外で正則だからこの２つの点が特異点である。留数定理２を用いて留数を計算すると

$$Res(0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{z-2i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$$

$$Res(2i) = \lim_{z \to 2i} (z-2i) f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{\cos z}{z} = \frac{\cos 2i}{2i} = -\frac{i(e^{-2}+e^{2})}{4}$$

② $z^3+8=0$ より $a_1=-2,\ a_2, a_3 = 1 \pm \sqrt{3}i$ が特異点である。定理３より$z=a$ での留数を求めると、$Res(a) = \dfrac{a}{3a^2} = \dfrac{1}{3a}$ だから $Res(-2) = -\dfrac{1}{6}, Res(1 \pm \sqrt{3}i) = \dfrac{1 \mp \sqrt{3}i}{12}$

****

《Ｅｘｅｒｃｉｓｅ》

****

少し演習問題をやって腹ごなしをしましょう。

◆問題－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【問題】留数定理を用いて次の積分値を計算せよ。ここで、Cは円$|z|=2$とする。

(1) $\displaystyle\oint_C \frac{2z+1}{z(z-3)}dz$　　　(2) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{ax}}{z^2+1}dz$　（a：定数）

[解答] ① 関数 $f(z)=\dfrac{2z+1}{z(z-3)}$の特異点は$z=0,3$ である。このうち円Cの内部にあるのは $z=0$ である。故に定理１（留数定理）と定理２により

$$\oint_C \frac{2z+1}{z(z-3)}dz=2\pi i Res(0)=2\pi i\lim_{z\to 0} z f(z)=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{2z+1}{z-3}=-\frac{2\pi i}{3}$$

② 関数$f(z)=\dfrac{e^{ax}}{z^2+1}$の特異点は $z=\pm i$ で、いずれも円Cの内部にある。定理２により留数を計算すれば

$$Res(i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{e^{ax}}{z+i}=\frac{e^{ai}}{2i},\quad Res(-i)=-\frac{e^{-ai}}{2i}$$

ゆえに留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{ax}}{z^2+1}dz=Res(i)+Res(-i)=\sin a$$

（第３回目終了）