****

複素関数論を勉強する（４）

２００１．９

by ＫＥＮＺＯＵ

****

とうとう４回目に入った。４回目は留数の定理を利用して実定積分の計算を勉強する。

7．定積分への応用（Ｉ）

留数定理を利用して、実数変数 x の関数 $f(x)$ の定積分の計算法を考える。

◆ $\int_0^{2p} R(\cos q, \sin q)\,dq$

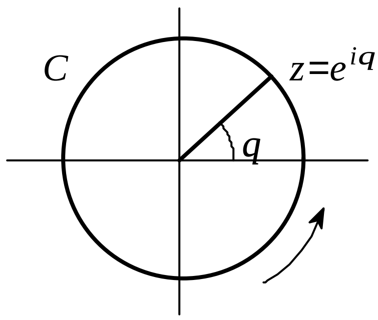
$R(\cos q, \sin q)$ を $\cos q, \sin q$ の有理関数とする。単位円上の点 z に対し

$$z = e^{iq} \quad (0 \le q \le 2p)$$

$$dz = ie^{iq}dq = izdq$$

$$\cos q = \frac{1}{2}\left(e^{iq} + e^{-iq}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin q = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$



より

$$\int_0^{2p} R(\cos q, \sin q)\,dq = \int_C R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}dz \qquad (1)$$

【定理１】

・関数

$$f(z) = \frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

の単位円内 $|z| < 1$ に含まれる特異点を $a_1, \cdots, a_n$ とすれば

$$\int_0^{2p} R(\cos q, \sin q)\,dq = 2p\, i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z); a_i)$$

<例題１＞ 積分 $\int_0^{2p} \frac{dq}{5 + 3\sin q}$ を求めよ。

［解答］ $z = e^{iq}$ とすれば (1)式より

$$\int_0^{2p} \frac{dq}{5 + 3\sin q} = \frac{1}{i}\int_C \frac{1}{5 + \frac{3}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\frac{1}{z}dz$$

$$= \int_C \frac{2}{3z^2 + i10z - 3}dz = \int_C \frac{2}{3(z + 3i)(z + i/3)}dz$$

ここでCは円$|z|$=1である。$|z|$<1 に含まれる特異点は $-i/3$ である。したがって【6－定理2】より

$$Res(i/3)=\lim_{z - \frac{i}{3}}\left\{\left(z+\frac{i}{3}\right)\frac{2}{3(z+3i)(z+i/3)}\right\}=\frac{1}{4i}$$

よって留数定理より

$$\int_0^{2p}\frac{dq}{5+3sin\ q}=\int_C\frac{2}{3z^2+i10z-3}dz=2p\ i\frac{1}{4i}=\frac{p}{2}$$

<例題2> 積分 $\int_0^{2p}\frac{1}{2+\sin q}dq$ を求めよ。

[解答] $z = e^{iq}$ とすれば (1)式より

$$\int_0^{2p}\frac{1}{2+\sin q}dq=\int_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz$$

ここでCは円$|z|$=1である。$z^2+4iz-1=0$の根は$z=(-2\pm\sqrt{3})\,i$ である。よって、$|z|$<1 に含まれる特異点は $a=(-2-\sqrt{3})i$。 したがって【6－定理2】より

$$Res(a)=\frac{2}{2a+4i}=\frac{1}{\sqrt{3}i}$$

よって留数定理より

$$\int_0^{2p}\frac{1}{2+\sin q}dq=\int_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz=2p\,i\frac{1}{\sqrt{3}i}=\frac{2p}{\sqrt{3}}$$

◆ $\int_{-¥}^{¥}R(x)dx$

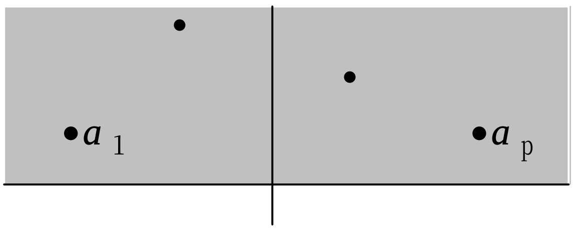
【定理2】

$$R(z)=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_m}\quad (a_n\neq 0,\ b_m\neq 0,\ m\geq n+2)$$

とする。方程式

$$Q(z)=b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_m=0$$

が実根をもたず、上半平面 Im z >0 にある根を$a_1,\cdots,a_p$ とする。点 a_k における$R(z)$の留数を$Res(a_k)$とすれば



$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)dx=2p\ i\sum_{k=1}^{p}Res(a_k)$$

<例題3> $R(z)=\frac{z}{z^4+1}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $z^4+1=0$ **の根の中で上半平面にあるもの** α_1**，**α_2 **を求めよ。**

(2) 関数$R(z)$**の**α_1**,**α_2 **における留数**$\mathrm{Res}(\alpha_1)$, $\mathrm{Res}(\alpha_2)$**を求めよ。**

(3) $r>1$ **とし、**r **から** $-r$ **に至る右図のような半円を**C_r**とするとき、つぎを示せ。**

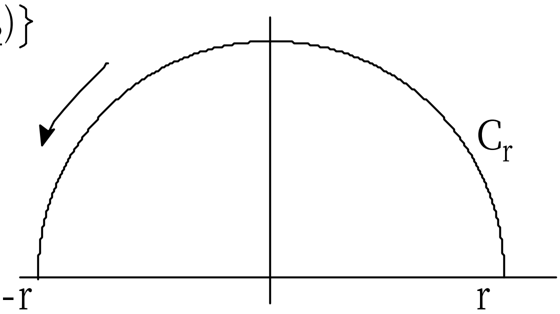
$$\int_{-r}^{r} R(x)dx+\int_{C_r} R(z)dz=2\pi i\{\mathrm{Res}(\alpha_1)+\mathrm{Res}(\alpha_2)\}$$

(4) $\left|\int_{C_r} R(z)dz\right|\leq\dfrac{\pi r^3}{r^4-1}$ **を示せ。**

(5) (2)(3)(4)を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}R(x)dx$$

を求めよ。



[解答]

(1) $z^4=-1=e^{i\pi}$**より** $z=e^{i(1+2k)\pi/4}$ $(k=0,1,2,3)$

$\mathrm{Im}\ z>0$ **となるのは** $k=0,1$**のときだから**$\alpha_1=e^{i\pi/4}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\alpha_2=e^{3\pi i/4}=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

(2) 6.[**留数の定理３**]**より**

$$\mathrm{Res}(\alpha_1)=\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_1^3}=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{8},\ \mathrm{Res}(\alpha_2)=\frac{1}{4\alpha_2}=\frac{\sqrt{2}(-1-i)}{8}$$

(3) **半円**C_r**と実軸上の区間**$[-r,r]$**をつなぎあわせた閉曲線を**G**とすると、留数の定理より**

$$\int_{-r}^{r}R(x)dx+\int_{C_r}R(z)dz=\int_G R(z)dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}(\alpha_1)+\mathrm{Res}(\alpha_2)\right]$$

(4) C_r**上の点**z**に対して**$|z|=r$, $|z^4+1|\geq|z^4|-1$ **より**

$$|R(z)|=\left|\frac{z^2}{z^4+1}\right|\leq\frac{|z^2|}{|z^4|-1}=\frac{\mathbf{r^2}}{\mathbf{r^4-1}}$$

一方、C_r**の長さは**πr **だから** 3.**複素積分 [定理５]より**

$$\left|\int_{C_r}R(z)dz\right|\leq\frac{r^2}{r^4-1}\pi r=\frac{\pi r^3}{r^4-1}$$

(5) (2),(3)**より**

$$\int_{-r}^{r}R(x)dx+\int_{C_r}R(z)dz=2\pi i\left(\frac{-2\sqrt{2}i}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(4)**より** $\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}R(z)dz=0$**だから**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}R(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$