****
複素関数論を勉強する（１）
２００１．９
by ＫＥＮＺＯＵ
****

０．序

　これから複素関数論を勉強していく。どこまでいけるか保障の限りではない。あくまで趣味での勉強である。また、数学的に厳密な議論は一切省略する。あくまで実用本位をこころがけていくことにする。したがって厳密な議論を希望する方には不向きである。

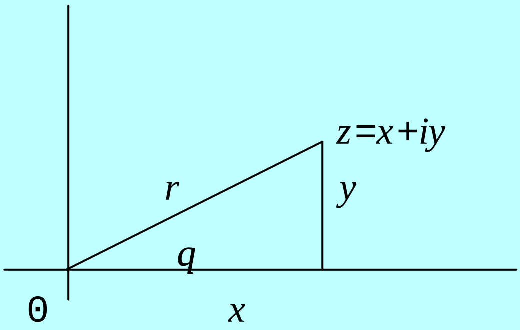
１．複素数と複素平面

$$z = x + iy$$

$$z = r(\cos q + i \sin q)$$

$$\arg z = q + 2np \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$



[定理１]

・点 z が点 a, b を通る直線上にあるとき、$z = a + t(b - a)$　(t：実数)

・点 z が中心 a、半径 r の円上にあるとき、$|z - a| = r$, $z = a + r(\cos q + i \sin q)$

[定理２]

・$z_1 = r_1(\cos q_1 + i \sin q_1)$, $z_2 = r_2(\cos q_2 + i \sin q_2)$のとき

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(q_1 + q_2) + i \sin(q_1 + q_2)\right), \quad \arg\left(z_1 z_2\right) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2)\right), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

・ド・モアブルの公式

$$\left(\cos q + i \sin q\right)^n = \cos nq + i \sin nq \qquad (n：整数)$$

[定理３]

・nが自然数で、$a = r(\cos q + i \sin q)$のとき、$z^n = a$ の根は

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{q + 2kp}{n} + i \sin\frac{q + 2kp}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \cdots, n - 1)$$

２．正則関数

◆ 複素関数

　複素数の集合Dの各点 z にそれぞれ１つの複素数 w が対応しているとき、w は z の関数であるといい $w = f(z)$ で表わす。集合Dをこの関数の定義域という。

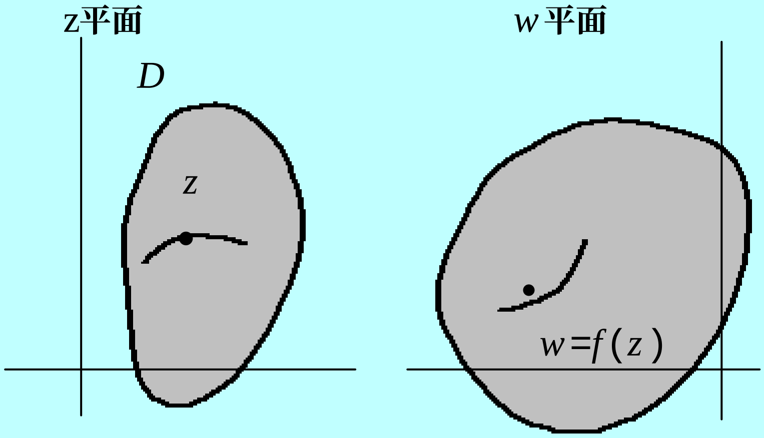
$z=x+iy$, $w=u+iv$とおくと、u, vは実数の変数 x, y の関数となる。したがって

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

と書くことができる。

wがzの関数のとき、zの変動する平面を z平面 、wの変動する平面を **w平面**という。

関数は z平面の点をw平面の点にうつす写像であると考えられる。zが曲線上を動けば、対応するw もある曲線上を動く。



◆ 微分係数

$f(z)$がz_0で微分可能であれば次の極限値が存在する。この極限値を$f(z)$のz_0における微分係数という。

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

◆ 正則関数

$f(z)$が領域Dの各点で微分可能なとき、$f(z)$は$\boldsymbol{D}$で正則であるという。このとき、Dで定義された関数 $f'(z)$を$f(z)$の導関数という。$f(z)$が点 z_0 のある近傍で正則なとき、単に、$f(z)$は z_0 で正則という。

[定理１]

・多項式$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ はすべての点で正則である。

$$P'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$$

公約数をもたない多項式$P(z)$, $Q(z)$に対し、$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$を有理関数という。これは$Q(z)\neq 0$であるすべての点で正則である。

[定理２]

・領域Dで恒等的に$f'(z)=0$ならば、$f(z)$はDで定数である。

◆*Caushy-Rieman*の方程式

[定理３]

・$z=x+iy$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$とする。$f(z)$が領域Dで正則ならば、$u(x,y)$, $v(x,y)$はDで偏微分可能で

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

が成り立つ。これを*Caushy-Rieman*の方程式という。極座標r, qを用いるとき、*Caushy-Rieman*の方程式(1)は

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial q}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial q}$$

となる。

また、つぎが成り立つ。

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

[定理４]

・実数値関数$u(x,y),v(x,y)$が領域Dで連続な偏導関数をもち、$Caushy$-$Rieman$の方程式(1)が成り立つとき、関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$はDで正則である。

◆調和関数

実数値関数$h(x,y)$が領域Dで連続な２階偏導関数をもち、ラプラスの方程式

$$\Delta h=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \tag{3}$$

を満たすとき、$h(x,y)$はDで調和であるという。

$u(x,y),v(x,y)$が調和関数で、$Caushy$-$Rieman$の方程式(1)が成り立つとき、$v(x,y)$を$u(x,y)$の共役調和関数という。

[定理５]

・$u(x,y),v(x,y)$が領域Dで連続な２階偏導関数をもつときつぎの条件は同値である。

(1) $u(x,y),v(x,y)$が領域Dで調和で、$v(x,y)$は$u(x,y)$の共役調和関数である。

(2) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$はDで正則である。

****

《Ｅｘｅｒｃｉｓｅ》

****

少し演習問題をやって腹ごなしをしましょう。

◆問題――――――――――――――――――

【問題１】関数 $f(z)=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$は平面全体で正則であることを示し、導関数を求めよ。ただし、$z=x+iy$。

【問題２】関数$u(x,y)=x^2-y^2-2x$ が調和関数であることを示し、その共役調和関数$v(x,y)$を求めよ。

【問題３】$u=ax^3+bx^2y+3xy^2+y^3$が調和関数となるように、実数の定数a,bを定めよ。

【問題４】$v(x,y)$が$u(x,y)$の共役調和関数ならば、$-u(x,y)$は$v(x,y)$の共役調和関数であることを示せ。

【問題５】$u(x,y),v(x,y)$が調和関数ならば、$f(z)=(u_y-v_x)+i(u_x+v_y)$は正則関数であることを証明せよ。

◇解答

1）$f=u+iv$ とおくと $u=e^{-y}\cos x$, $v=e^{-y}\sin x$

$u_x=-e^{-y}\sin x$, $u_y=-e^{-y}\cos x$, $v_x=e^{-y}\cos x$, $v_y=-e^{-y}\sin x$,

これらは平面全体で連続で、*Caushy-Rieman* の方程式(1)

$$u_x=v_y,\ u_y=v_x$$

が成り立つ。故に $f(z)$ は平面全体で正則である。
つぎに(2)より

$$f'(z)=u_x+iv_x=-e^{-y}\sin x+ie^{-y}\cos x=i(e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x)=if(z)$$

2）$u_x=2x-2$, $u_{xx}=2$, $u_y=-2y$, $u_{yy}=-2$ より

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$$

となり、関数 $u(x,y)$ は調和関数である。共役調和関数 $v(x,y)$ は *Caushy-Rieman* の方程式(1)より

$$v_x=-u_y=2y \cdots ①,\quad v_y=u_x=2x-2 \cdots ②$$

①より $v=2xy+f(y)$, ここで $f(y)$ は y のみの関数である。これを y で微分すると

$$v_y=2x+f'(y)=2x-2$$

$$\therefore\ f'(y)=-2,\qquad \therefore\ f(y)=-2y+C\qquad (C:\text{定数})$$

したがって

$$v(x,y)=2xy-2y+C$$

3) $u_x=3ax^2+2bxy+3y^2$, $u_{xx}=6ax+2by$, $u_y=bx^2+6xy+3y^2$, $u_{yy}=6x+6y$

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=6ax+2by+6x+6y=6x(a+1)+2y(b+3)=0$$

より $a=-1, b=-3$

4) v が u の共役調和関数であるから

$$u_x=v_y,\ u_y=-v_x$$

これから

$$v_x=(-u)_y,\ v_y=-(-u)_x$$

$\therefore -u$ が v の共役調和関数となる。

5) $p=u_y-v_x$, $q=u_x+v_y$ とおくとき

$$p_x=u_{yx}-v_{xx},\quad p_y=u_{yy}-v_{xy},\quad q_x=u_{xx}+v_{yx},\quad q_y=u_{xy}+v_{yy}$$

仮定より $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$, $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0$, また、$u_{yx}=u_{xy}$, $v_{xy}=v_{yx}$ が成り立つので $p_x=q_y$, $p_y=-q_x$ となり、*Caushy-Rieman* の方程式が成立する。
$\therefore f=p+iq$ は正則関数である。

（第１回目終了）

****

複素関数論を勉強する（２）

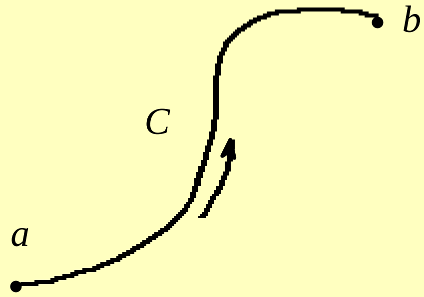
２００１．９

by ＫＥＮＺＯＵ

****

いよいよ２回目に突入する。２回目は複素積分から$Caushy$の定理まで勉強する。

３．複素積分



◆ 曲線

複素平面の点aからbに至る曲線Cの方程式を

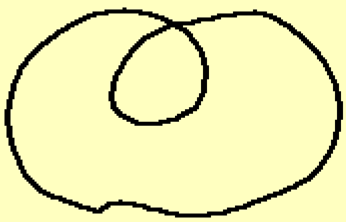
$$z=z(t)=x(t)+iy(t),\quad (a\le t\le b)$$

とし、$z(a)=a, z(b)=b$とする。点aをCの始点、bをCの終点という。

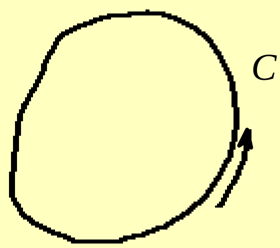
なお、曲線Cの長さLは

$$L=\int_a^b |z'(t)|dt=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

始点と終点の一致するような曲線を閉曲線という。また、それ以外に一致するような点がないとき、単一であるという。点が単一閉曲線C上を時計の針と反対向きに１回りするとき、これをCの正の向きの回転という。今後単に閉曲線といえば、つねに正の向きをもった単一閉曲線を指すものと約束する。



[単一でない閉曲線]



[正の向きをもった単一閉曲線]

◆複素関数の積分

実数 $t\,(a\le t\le b)$の連続関数 $f(t)=u(t)+iv(t)$に対し、その積分を次のように定義する。

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$$

[定理１]

・$F'(t)=f(t)$ならば

$$\int_a^b f(t)dt=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$$

aからbに至る曲線Cの方程式を

$$z=z(t),\quad (a\le t\le b,\ z(a)=a, z(b)=b)$$

とする。C上で連続な関数$f(z)$に対して、$f(z)$の曲線Cに沿った積分を

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

と定義する。Cを積分路という。

［定理２］

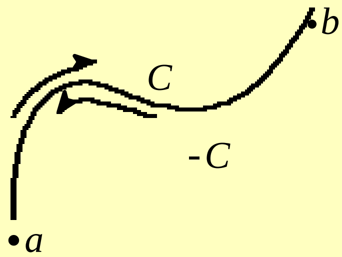
(1) $\int_C (f(z)+g(z))dz=\int_C f(z)dz+\int_C g(z)dz$

(2) 定数 k に対し、$\int_C (kf(z))dz=k\int_C f(z)dz$

[定理３]

・aからbに至る曲線Cを逆向きにbからaにたどるとき
これを$-C$で表わす。このとき

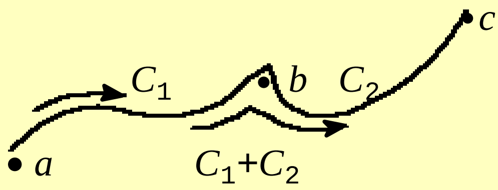
$$\int_{-C} f(z)dz=-\int_C f(z)dz$$



[定理４]

・aからbに至る曲線C_1、bからcに至る曲線をC_2とするとき、これらを続けてaからcまでたどる曲線をC_1+C_2と表わす。このとき

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$$



[定理５]

・曲線C上での$|f(z)|$の最大値をM、曲線Cの長さをLとすれば

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leq\int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt\leq ML$$

[定理６]

・$f(z)$が領域Dで正則ならばD内のaからbに至る曲線Cに対し

$$\int_C f'(z)dz=[f(z)]_a^b=f(b)-f(a)$$

[公式１]

・Cを中心aの円、nを整数とすると

$$\int_C (z-a)^n dz=\begin{cases}2\pi i & (n=-1)\\ 0 & (n\neq-1)\end{cases}$$

∵ $z-a=re^{i\theta}$ とおくと、$dz=rie^{i\theta}d\theta$ より

$$\int_C (z-a)^n dz=\int_0^{2\pi}\left(re^{i\theta}\right)^n rie^{i\theta}d\theta = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta = I_n$$

∴ $n=-1$のとき　$I_n=i\int_0^{2\pi} d\theta =2\pi i$

$n\neq-1$のとき　$I_n=ir^{n+1}\left[\dfrac{e^{i(n+1)\theta}}{n+1}\right]_0^{2\pi}=0$

****

《 Exercise 》

****

少し演習問題をやって腹ごなしをしましょう。

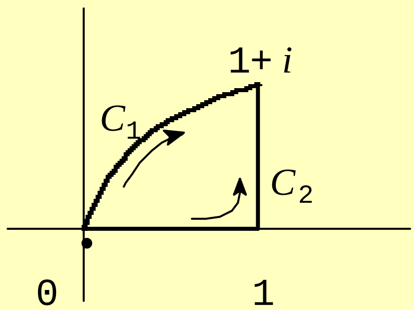
◆問題－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【問題1】 0から$1+i$ に至る図のような曲線C_1とC_2に沿って次の関数を積分せよ。

(1) $f(z)=\bar{z}$

(2) $f(z)=z^2$

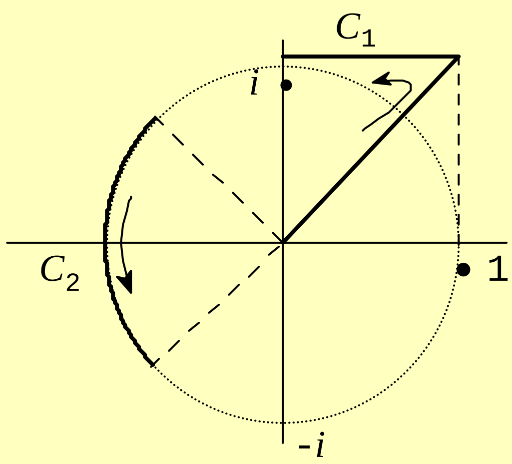
ただし、C_1は放物線 $x=y^2$の一部とする。



【問題２】右図のような曲線C_1,C_2,C_3に対し次の積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{C_1}(z+iz)dz$

(2) $\displaystyle\int_{C_2}\frac{z+1}{z}dz$



【問題３】次の積分の値を求めよ。ただし、Cは単位円とする。

(1) $\displaystyle\int_C\left(z^2-\frac{i}{z}+\frac{2}{z^3}\right)dz$

(2) $\displaystyle\int_C z^3\bar{z}^2dz$

◇解答

1)①曲線C_1の方程式：$z=z(t)=t^2+it \quad (0\le t\le 1)$, $dz=(2t+i)dt$

$t=0$のとき$z=0$（C_1の始点）、$t=1$のとき、$z=1+it$（C_1の終点）。したがって

$$\int_{C_1}\bar{z}\,dz=\int_0^1 (t^2-it)(2t+i)\,dt=1-\frac{i}{3}$$

曲線C_2を点１で分けると、C_2の方程式は

前の部分： $z=t \quad (0\le t\le 1)$, $dz=dt$

後の部分： $z=1+it \quad (0\le t\le 1)$, $dz=idt$

∴ $$\int_{C_2}\bar{z}\,dz=\int_0^1 t\,dt+\int_0^1 i(1-it)\,dt=1+i$$

②[定理６]を活用する。

$f(z)=z^2=\left(\frac{1}{3}z^3\right)'$、 定理６より

$$\int_{C_1}z^2dz=\int_{C_2}z^2dz=\left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^{1+i}=\frac{-2+2i}{3}$$

2)①曲線C_1の方程式

前半：$z=z(t)=t(1+i) \quad (0\le t\le 1)$, $dz=(1+i)dt$

$z(0)=0$, $z(1)=1+i$

後半：$z=z(t)=(1-t)+i \quad (0\le t\le 1)$, $dz=-dt$

$z(0)=1+i$, $z(1)=i$

$$\int_{C_1}(z+i\bar{z})\,dz=\int_{C_1}z\,dz+i\int_{C_1}\bar{z}\,dz$$
$$=\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{i}+i\left\{\int_0^1(t-it)(1+i)\,dt+\int_0^1(1-t-i)(-dt)\right\}$$
$$=\frac{-3+i}{2}$$

②曲線C_2の方程式 $z=e^{i\theta} \quad \left(\frac{3}{4}\pi\le\theta\le\frac{5}{4}\pi\right)$, $dz=ie^{i\theta}d\theta$

$$\int_{C_2}\frac{z+1}{z}\,dz=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\left(1+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)ie^{i\theta}d\theta=\left(-\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\right)i$$

3)①[公式１]より

$$\int_C\frac{1}{z}\,dz=2\pi i,\quad n\ne -1 \text{に対して} \int_C z^n dz=0$$

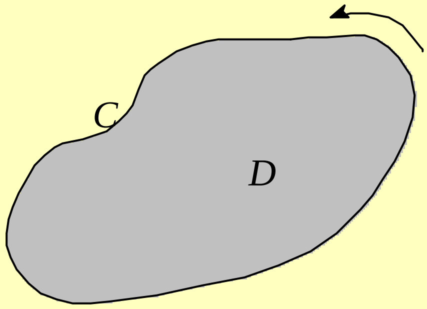
$$\therefore \oint_C \left(z^2-\frac{i}{z}+\frac{2}{z^3}\right)dz=2\pi$$

②単位円のとき、$\bar{z}=z^{-1}$であるから $z^3\bar{z}^2=z$

$$\therefore \oint_C z^3\bar{z}^2 dz=\oint_C z dz=0$$

4. *Caushy* の定理

◆ コーシーの定理



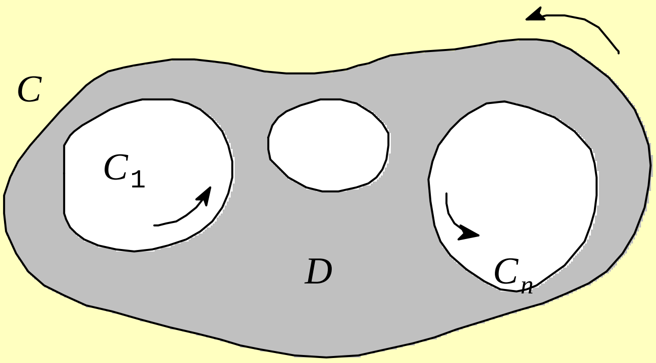
【定理１】(コーシーの定理)

・関数$f(z)$が閉曲線CおよびCで囲まれた領域Dのすべての点で正則ならば

$$\oint_C f(z)dz=0$$

【定理２】

・関数$f(z)$が右図のような閉曲線$C, C_1, \cdots, C_n$, およびこれらで囲まれた領域Dのすべての点で正則ならば



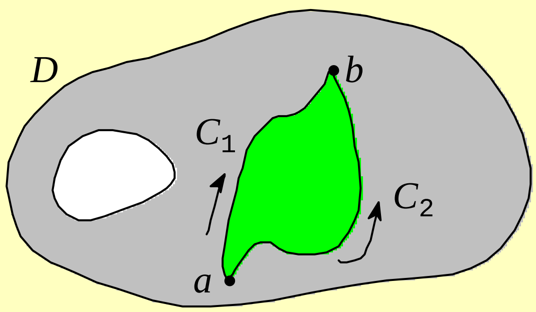
$$\oint_C f(z)dz$$

$$=\oint_{C_1} f(z)dz+\cdots+\oint_{C_n} f(z)dz$$

◆ 積分路の変形

【定理３】

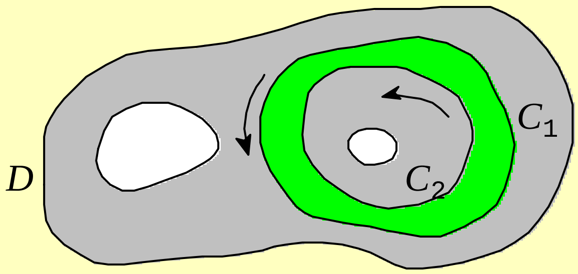
・関数$f(z)$は領域Dで正則とし、a, bをDの点とする。aからbに至るD内の曲線C_1, C_2に対し、これらによって囲まれた右図のような範囲がDに含まれるとき



$$\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz$$

【定理４】

・関数$f(z)$は領域Dで正則とする。D内の閉曲線C_1, C_2に対し、右図のような範囲がDに含まれるとき



$$\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz$$

<例題 1> 単一閉曲線C_1, C_2があり、点aはC_2の外部にあるとする。次の等式をを証明せよ。ただし、nは正の整数である。

(1) $\oint_{C_1}(z-a)^n dz=0$　　　　(2) $\oint_{C_2}\dfrac{1}{(z-a)^n}dz=0$

[解答] ① $(z-a)^n$はn次の多項式でz平面全体で正則である。したがって、C_1の内部で正則であるから、$Caushy$の定理によって

$$\oint_{C_1}(z-a)^n dz=0$$

②関数$\dfrac{1}{(z-a)^n}$は点 $z=a$を除いて正則である。点aはC_2の内部にないからこの関数はC_2の内部で正則である。よって$Caushy$の定理から

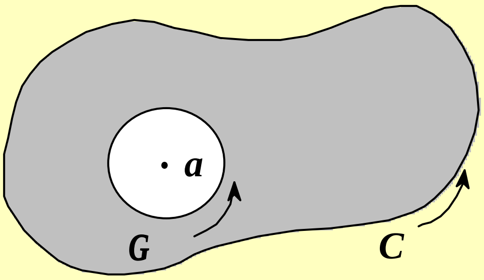
$$\oint_{C_2}\frac{1}{(z-a)^n}dz=0$$

<例題 2> 点aは単一閉曲線Cの内部にあるとする。次の等式を証明せよ。

(1) $\oint_C \dfrac{1}{z-a}dz=2\pi i$　　　　(2) $\oint_C \dfrac{1}{(z-a)^n}dz=0$　$(n>1)$

[解答] 単一閉曲線Cの内部に点aを中心とする小円Gをかく。CとGで囲まれる領域で $1/(z-a)^n$ (nは正の整数)は正則であるから、定理４により

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=\oint_G \frac{1}{(z-a)^n}dz$$



ところで、2-<公式 1>より

$$\oint_G \frac{1}{z-a}dz=2\pi i,\ \oint_G \frac{1}{(z-a)^n}dz=0\quad(n>1)$$

<例題 3> 積分 $\oint_C \dfrac{z}{z^2+1}dz$ を求めよ。ただし、Cは円$|z|=2$である。

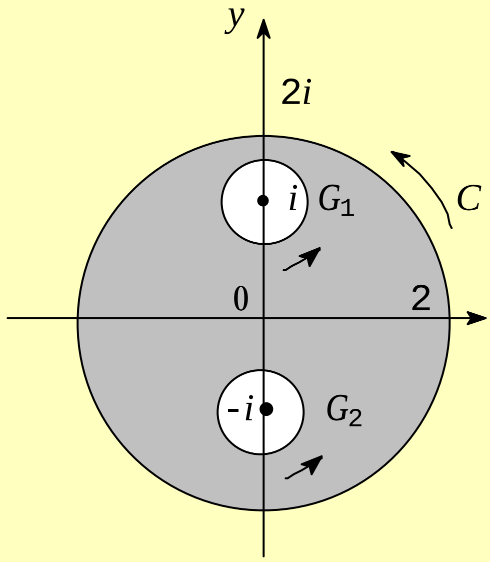
[解答] $\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{z}{(z-i)(z+i)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z+i}\right)$

この関数は２つの点 $z=i$と $z=-i$ で正則でない。下図のように点$z=i$ と$z=-i$ を中心とする小さい円G_1とG_2を互いに交わらないように円Cの内部にかく。この時、関数$\dfrac{z}{z^2+1}$はCと

G_1およびG_2で囲まれた領域で正則であるから、定理２により

$$\oint_C \frac{z}{z^2+1}dz=\oint_{G_1}\frac{z}{z^2+1}dz+\oint_{G_2}\frac{z}{z^2+1}dz$$

さて、



$$\oint_{G_1}\frac{z}{z^2+1}dz=\frac{1}{2}\left(\oint_{G_1}\frac{1}{z-i}dz+\oint_{G_1}\frac{1}{z+i}dz\right)$$

$\dfrac{1}{z+i}$はG_1の内部で正則であるから、$Caushy$の定理

によって $\oint_{G_1}\dfrac{1}{z+i}dz=0$である。また２－<公式１>

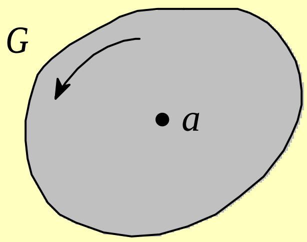
より$\oint_{G_1}\dfrac{1}{z-i}dz=2\pi i$である。よって

$$\oint_{G_1}\frac{z}{z^2+1}dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=\pi i$$ ，同様にして

$$\oint_{G_2}\frac{z}{z^2+1}dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=\pi i$$

$$\therefore\ \oint_C\frac{z}{z^2+1}dz=2\pi i$$

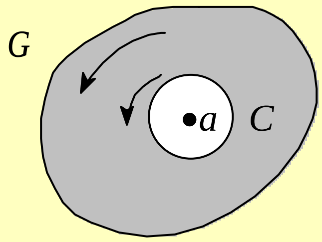
<例題４> a を囲む閉曲線Gに対し



$$\oint_G\frac{1}{z-a}dz=2\pi i$$

[解答]

右図のように中心aの円Cをとる。



$\dfrac{1}{z-a}$は $z=a$ 以外のすべての点で正則だから、

定理４より

$$\oint_G\frac{1}{z-a}dz=\oint_C\frac{1}{z-a}dz$$

ところで[公式１]より $\oint_C\dfrac{1}{z-a}dz=2\pi i$

$$\therefore\ \oint_G\frac{1}{z-a}dz=2\pi i$$

◆ 不定積分

関数$f(z)$は閉曲線で囲まれた領域Dで正則とする。Dの点aを固定し、aからzに至る曲線に沿って$f(z)$を積分すると、積分の値は曲線の選び方に関係なく一定なのでそれを単に

$$F(z)=\int_a^z f(z)dz$$

と表す。このようにして決まる関数$F(z)$を$f(z)$の不定積分という。

【定理５】

・上のような$F(z)$に対し、$F'(z)=f(z)$である。

領域Dで定義された関数$f(z)$に対して

$$F'(z)=f(z)$$

を満たす関数$F(z)$を$f(z)$の原始関数という。原始関数は定数の違いを除いてただ一通りに定まる。

【定理６】

・閉曲線で囲まれた領域Dで正則な関数$f(z)$に対し、その原始関数を$F(z)$とすれば、Dの点a,bに対して

$$\int_a^b f(z)dz=[F(z)]_a^b=F(b)-F(a)$$

【定理７】（部分積分法）

・閉曲線で囲まれた領域Dで正則な$f(z),g(z)$に対し、Dの点a,bをとれば

$$\int_a^b f(z)g'(z)dz=[f(z)g(z)]_a^b-\int_a^b f'(z)g(z)dz$$

<例題４> 次の積分の値を求めよ。

$$\int_1^{\pi i} ze^{-z}dz$$ （積分経路は、1からπiに至る曲線）

[解答] z,e^{-z}は平面全体で正則である。$z'=1$, $e^{-z}=(-e^{-z})'$であるから、定理７より

$$\int_1^{\pi i} ze^{-z}dz=\left[-ze^{-z}\right]_1^{\pi i}+\int_1^{\pi i} e^{-z}dz=\left(1+\frac{2}{e}\right)+\pi i$$

整級数の積分は次のように項別積分で求められる。

【定理８】

・収束半径 r の整級数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$に対し、$|z|<r$ のとき

$$\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z a_nz^ndz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$$

この右辺の整級数の収束半径は r である。

****

《Ｅｘｅｒｃｉｓｅ》

****

少し演習問題をやって腹ごなしをしましょう。

◆問題－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

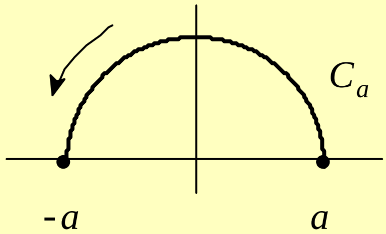
【問題１】円C：$|z-1|=1/2$に沿って、次の関数を積分せよ。

(1) $\dfrac{z}{3z-2}$　　　　(2) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$

【問題２】円 $|z|=a$ 上の点aから$-a$に至る右図ような半円をC_aとする。$0<\varepsilon<\rho$ ならば

$$\oint_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz-\oint_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}dz=2i\int_\varepsilon^\rho\frac{\sin x}{x}dx$$

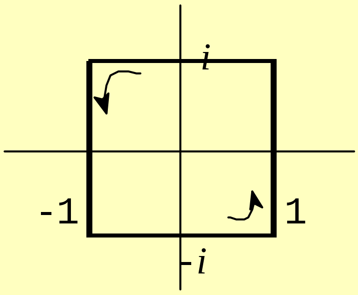
であることを$Caushy$の定理より証明せよ。



【問題３】下図のような正方形の周をCとするとき、次の積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\oint_C\frac{z}{z^2+2}dz$

(2) $\displaystyle\oint_C\frac{1}{\sin(z-2)}dz$



◇解答

1) ① $\dfrac{z}{3z-2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3(3z-2)}$，円$C$は点$2/3$を囲むから、

例題４の結果より $\displaystyle\oint_C\frac{1}{z-2/3}dz=2\pi i$

$$\therefore\quad\oint_C\frac{z}{3z-2}dz=\oint_C\frac{1}{3}dz+\frac{2}{9}\oint_C\frac{1}{z-2/3}dz=\frac{4}{9}\pi i$$

② $\displaystyle\oint_C\frac{1}{z^2-3z+2}dz=\oint_C\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=-2\pi i$

2)下図のような閉曲線をΓとする。$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$は $z=0$ 以外で正則。$Caushy$の定理より

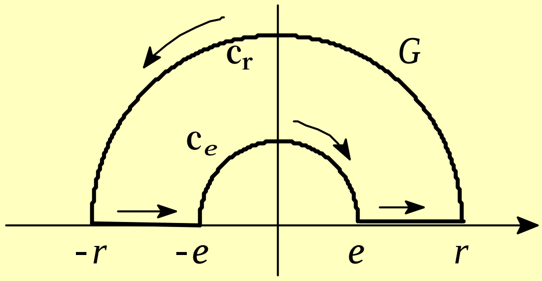
$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

となる。

$$\therefore \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx-\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

ところで

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx=-\int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{-ix}}{x}dx \text{だから}$$



$$\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx$$

$$=2i\int_{\varepsilon}^{r} \frac{\sin x}{x}dx$$

3) ① $z^2+2=0$の根は $z=\pm\sqrt{2}i$であるから、z/z^2+2は曲線Cおよびその内部のすべての点で正則である。したがって$Caushy$の定理より$\oint_C \frac{z}{z^2+2}dz=0$

② $\sin(z-2)=0$の根は $z=2+n\pi$ (n：整数）したがって$1/\sin(z-2)$はCおよびその内部のすべての点で正則である。したがって$Caushy$の定理より与式は0となる。

(第２回目終了）