＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

変 分 法 小 考

2003.11.01

by　KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

解析力学などでよく出てくる変分法の基本的な考え方を書いていこうと思います。技術的な話は適当なテキストを読んで下さい。また、解析力学への応用についてはこのＨＰの 解析力学ノート」を参照してください。
さて、Coffee Breakでの話ですので、気楽に参りましょうか。

■変分法

変分法とはなにか、微分とちがうのかいな？ということになりますが、この辺はぼちぼち明らかになってくるでしょう。さて、$y=f(x)$ という関数の極値を微分で求める条件は $dy/dx=0$ でした。つまり極値を実現する点というのは、そこから任意の微少量だけ動いても関数の値が変化しないような点（定常点）であるということですね。

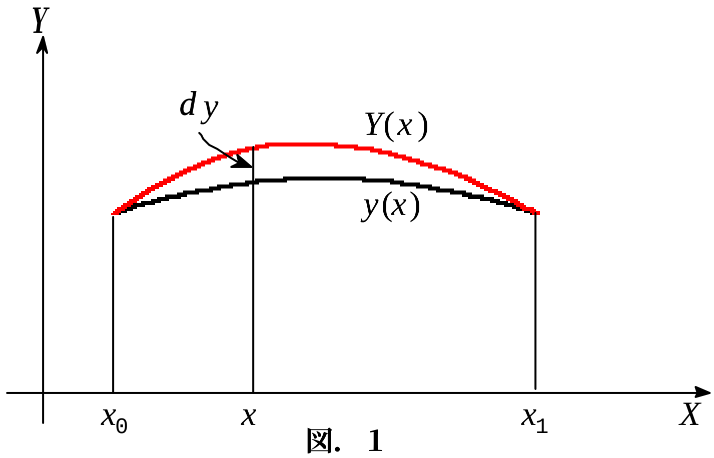
力学では関数 $y(x)$ を含むある関数(これを汎関数といいます)の定積分の停留値（極値）を求めることが極めて重要な課題となります。この問題を扱う数学は変分学といわれています。技術的には、難しいことをいわず *Euler-Lagrange* の方程式を解けばよいということになりますが、それではいまいち味も素っ気もないので、以下に数学的厳密性は完全に無視して、変分法について少し考えていこうと思います。「解析力学ノート」も併せて参照すればよいかと思います。

⑴ 1独立変数及び１従属変数の場合

いま、積分 I

$$I=\int_{x_0}^{x_1} dxL(x, y, dy/dx) \qquad (1)$$

が停留値を持つような関数 $y(x)$ を見つけていきましょう。被積分関数 L は従属変数 $y(x)$、独立変数 x および dy/dx の関数（汎関数）とします。下限 x_0、上限 x_1 はそれぞれ固定されており、その点における y の値も与えられているとします。（1）の値は当然、点 $(x_0,\ y_0)$ と $(x_1,\ y_1)$ を結ぶ道筋によって異なります。図-1で、この道筋の一つを $Y(x)$ とし、積分値 I を最大または最小にする道筋を



図．１

$y(x)$ としましょう。ここで、$Y(x)$ は $y(x)$ のごく近傍にある道筋としておきます。言いかえると $Y(x)-y(x)$ が x_0, x_1 間のすべての x の値に対して微小であるということですね。そこで点 x における $Y(x)$ と $y(x)$ の量の差を $dy(x)$ とします。この d を変分と呼んでいます。

$$d\,y(x) \equiv Y(x) - y(x) \tag{2}$$

同様に、

$$d\,L \equiv L(x, Y, dY/dx) - L(x, y, dy/dx) \tag{3}$$

次ぎに関数 $Y(x), y(x)$ の点 x における微分 $dY/dx, dy/dx$ の差を $d(dy/dx)$ とすると

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Y - y) = \frac{d}{dx}(d\,y) \tag{4}$$

となり、**変分 d と微分演算子 d/dx は交換可能**という重要な性質がでてきます。（3）に（2）と（4）を使うと、

$$d\,L = L\left(x, y + d\,y, y_x + d\,y_x\right) - L\left(x, y, y_x\right) = \frac{\partial L}{\partial y} d\,y + \frac{\partial L}{\partial y_x} d\,y_x \tag{5}$$

となります。これは**変分計算の形式的な規則は微分計算の規則と同じ**ということを意味しますね。

積分 I が停留値を持つための条件は、y に沿った積分が $y + d\,y$ に沿った積分と同じ値を与えるということになりますから、変分記号 d を使うとその条件は

$$d\,I = \int_{x_0}^{x_1} dx\, d\,L = 0 \tag{6}$$

となります。これは普通の微分学において $y(x)$ が定常であるための条件 $dy = 0$ に相当します。

（6）の計算を具体的に実行しましょう。（5）を（6）に代入し、（4）を使って

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left[\frac{\partial L}{\partial y} d\,y + \frac{\partial L}{\partial y_x} \frac{d}{dx}(d\,y) \right] = 0 \tag{7}$$

（7）の左辺第2項を部分積分すると

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left[\frac{\partial L}{\partial y_x} \frac{d}{dx}(d\,y) \right] = \left| \frac{\partial L}{\partial y_x} d\,y \right|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y_x} \right) d\,y \tag{8}$$

ここで積分の両端は固定されているということから $d\,y(x_0) = d\,y(x_1) = 0$。結局（8）の右辺は第２項だけが残ることになります。そこで（7）を整理すると

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y_x} \right) d\,y = 0 \tag{9}$$

（9）は x の区間 $[x_0, x_1]$ における任意の $d\,y$ について成り立つから被積分関数は恒等式にゼロでなければなりません。従って求める条件は

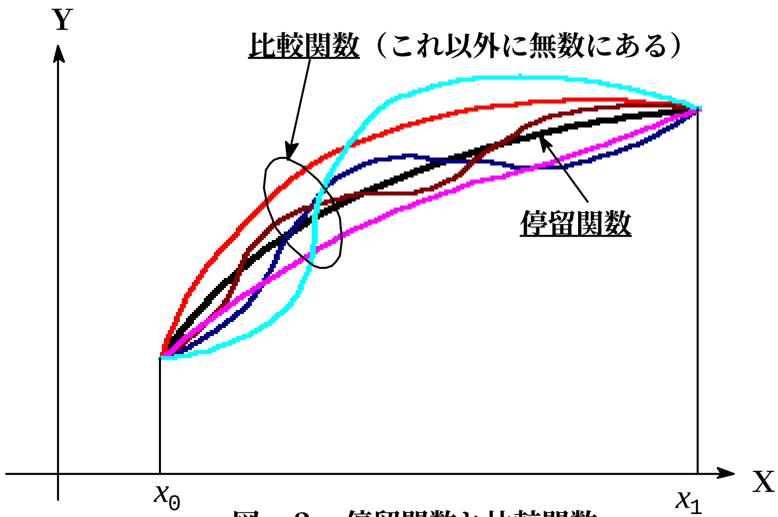
$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y_x} = 0 \tag{10}$$

これは Euler の方程式と呼ばれています。

これはEulerの方程式と呼ばれています。

【補足】

図－１を見ていただきたい。この図には求める真の関数$y(x)$の近傍にそれに限りなく近い関数として$Y(x)$を一つだけ書きました（ちなみにこの関数のことを**比較関数**とか**許容関数**、**ためし関数**と呼び、求めるべき真の関数を**停留関数**と呼んでいる）。それは説明の便宜上そうしただけで、（１０）式を導くときにδyを任意としましたが、この意味はあらゆる比較関数が対象になっているということで、図－１に書いたような一つの比較関数だけをイメージするのはマズイ。つまり、比較関数は無数あるということ。図－２にこのあたりの事情を示しておきます。



図－２　停留関数と比較関数

なぜ、こんなことをくどくど書いたかというと、ある微分方程式（例えば非線型振動とか）が与えられたとき、その解を求めるのに変分法を使って求めるやり方があり、そのやり方を理解する上でこの点をきちんと理解しておかないと、一体何していることやらサッパリ分からんということになりかねないからです（もっともそういうのは私だけかしら？）。この点はあとで演習問題をやることで理解を深めたいと思います。それまで先のお楽しみ。

さて、例によって慣例の問題をやってみましょう。

[問題]平面内における２点の最短距離は直線であることを証明せよ。

[答え]直角座標における距離要素（線素）は$ds^2=dx^2+dy^2$で与えられるから

$$s=\int_{x_0}^{x_1} ds=\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+(dy/dx)^2}$$

が極小となる関数yを求めればよい。（１）より$L=\sqrt{1+(dy/dx)^2}$であるから（１０）より$Euler$の方程式を求めると

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y_x}\sqrt{(1+y_x^2)}\right]=0$$

これから

$$\frac{y_x}{\sqrt{(1+y_x^2)}}=const$$

これは$y_x=const$を意味する。つまり求める停留関数は直線である。

⑵ 1独立変数及び数個の従属変数の場合

独立変数を時間t、従属変数を座標q_iとする次ぎの定積分の停留問題を考えましょう。

$$I=\int_{t_0}^{t_1} dtL\,(\,t,q_1,q_2,\cdots,q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_f\,) \tag{11}$$

定積分Iを定常にする関数（停留関数）$q_i(t)$を見つけましょう。例によって

$$d\,I=\int_{t_0}^{t_1} dtd\,L=0 \tag{12}$$

ここで$d\,L$を計算すると

$$d\,L=\sum_{i=1}^{f}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)d\,q_i+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)d\,\dot{q}_i\right\} \tag{13}$$

となるから、（１２）は

$$d\,I=\int_{t_0}^{t_1} dt\sum_{i=1}^{f}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)d\,q_i+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)d\,\dot{q}_i\right\} \tag{14}$$

（１４）の右辺第２項を部分積分すると

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)d\,\dot{q}_i=\int_{t_0}^{t_1} dt\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{d}{dt}\left\langle d\,q_i\right\rangle dt$$

$$=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\,q_i\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} dt\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)d\,q_i dt$$

ここで$d\,q_i(t_0)=d\,q_i(t_0)=0$であるから

$$=-\int_{t_0}^{t_1} dt\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)d\,q_i dt \tag{15}$$

したがって（１２）は

$$d\,I=\int_{t_0}^{t_1} dt\sum_{i=1}^{f}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right\}d\,q_i=0 \tag{16}$$

これが成り立つには$d\,q_i$は任意で、tと無関係な関数なので、被積分関数のそれぞれの項が０でなければならない。ということから

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0,\quad i=1,2,\cdots,f \qquad (17)$$

が得られます。解析力学でお馴染みの ***Euler-Lagrange*** の方程式ですね。

ここでお約束の演習問題を頭の整理もかねてやってみましょう。

[演習問題]
非線型方程式

$$\ddot{x}+w_0^2 x+e x^3=0 \qquad ①$$

の解を求めよ。ただし定数 e は小さい値とする。

[答え]
①の左辺の第３項がいわゆる非線型項（これがなければ1次元の調和振動子の方程式）というやつです。そこで①を満たす解 x を求めるのに変分法を使ってみます。
①の運動方程式を与える *Lagrangian* は

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2-w_0^2 x^2\right)-\frac{e}{4}x^4 \qquad ②$$

となります。そこで作用積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2} dtL \qquad ③$$

を作り、これに②を代入して I が極値となる条件を求めればいける！と思うのは早合点。やってみるとなんのことはない出発点の方程式①に戻ってしまう。これは当たり前で、すべての可能な関数 x を考慮したからなんですね。そこであらかじめパラメータを含んだ関数を考え、そのパラメータがどのような値をとったとき③が定常値をとるか、という風に考えるわけです。これは図－２でいろんな比較関数をたくさん書きましたが、例えばこの中の一つの（パラメータを含ませた）関数をピックアップし、もっとも停留関数に近い姿に近づくようにパラメータを決めていくというイメージを浮かべればいいでしょう。
②の非線型項がなければ $x=A\sin w_0 t$ という解がある。そこで e が小さいときには求める解はこの解とあまり離れていないだろうと考えられるので、あてずっぽうに

$$x=A\sin w\,t \qquad ④$$

とおいてみる。ここで A と w は、まだ何もわからないパラメータです。③の積分範囲は④が周期関数なので１周期 $[0,2p/w]$ をとればいいでしょう。そこで③を計算すると

$$I=\int_0^{\frac{2p}{w}} dtL=\int_0^{\frac{2p}{w}} dt\left\{\frac{1}{2}\left[A^2w^2\cos^2 w\,t-A^2w_0^2\sin^2 w\,t\right]-\frac{e}{4}A^4\sin^4 w\,t\right\} \qquad ⑤$$

$$\int_0^{\frac{2p}{w}} dt\,\sin^2 w\,t=\frac{p}{w} \qquad ⑥$$

$$\int_0^{\frac{2p}{w}} dt\,\cos^2 w\,t=\frac{p}{w} \qquad ⑦$$

$$\int_0^{\frac{2p}{w}} dt\,\sin^4 w\,t=\frac{3}{4}\frac{p}{w} \qquad ⑧$$

を使うと⑤は

$$I=\frac{1}{2}A^2\frac{p}{w}\left(w^2-w_0^2\right)-\frac{e}{4}\frac{3}{4}\frac{p}{w}A^4 \qquad ⑨$$

となる。ここでパラメータ A のある値で I は定常値をとるところを探す。それには I を A^2 で微分して0とおけばよい。

$$\frac{\partial I}{\partial A^2}=\frac{1}{2}\frac{p}{w}\left(w^2-w_0^2-e\frac{3}{4}A^2\right)=0 \qquad ⑩$$

つまり、

$$w^2=w_0^2+e\frac{3}{4}A^2 \qquad ⑪$$

が得られます。従って、**ためし関数**④で振幅と振動数に⑪という関係をおくと、それが I の極値を与えることになります。

ところで、以上のやり方で分かることは、**始めに採用するためし関数としてうまいものをとればとるほど近似がよくなる**、ということです。つまり、逆にいえばこの点が変分法の限界かも知れません。いずれにしてもこの点は頭に入れておきましょう。

ちなみに①の厳密解は見いだされていて、それは

$$\frac{2p}{w}=\frac{4}{w_0}\int_0^{2p}dq\left[1+e\frac{A^2}{w_0^2}\left(1-\frac{1}{2}\cos^2 q\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad ⑫$$

で与えられています。εが小さいとして⑫を展開して求めると

$$\frac{2p}{w}=\frac{2p}{w_0}\left[1-\frac{3e}{8w_0^2}A^2+\cdots\right] \qquad ⑬$$

となるが、これは⑪とεの1次の項で一致しています。

---*---

■エピローグ

この小考でいいたかったのは、実は補足のところだけ。解析力学で変分法からE.L方程式を導出する際、テキストに載っている絵は大抵真の関数とその近傍に書かれる一つの関数だけで、実は無数の比較関数をトライアルした結果、もっとも真の関数に近い関数を選ぶという変分原理の考えを素直に描いていないと思ったからなんですね。しからばそこだけを書けば良かったのですが、ついだらだらと長くなってしまったというのが舞台裏です。お疲れさまでした。

（以上）