==

ベクトルのスケッチ

2004.01.09 by KENZOU

(ref) http://wwwdanso4.mech.okayama-u.ac.jp/index.html

==

インターネットは凄い！今更ながらその凄さ、有難味がよく分かる。さて、ベクトルのスケッチということで *(ref)URL* に記載されていた「ベクトル」は非常にビジュアルで分かりやすくに書かれており、この要点だけを自分用のメモとしてまとめることにした。*(ref)* の作者に感謝します。

○スカラー積　（グー・チョキ・パーのイメージ）

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = d_{ij}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left(a_i \boldsymbol{e}_i\right) \cdot \left(b_j \boldsymbol{e}_j\right) = a_i b_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = a_i b_j d_{ij} = a_i b_i$$

○ベクトル積　(右ねじの進む方向のイメージ)

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = e_{ijk}\boldsymbol{e}_k \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, & \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = 0, & \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = 0, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0 \end{array}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(a_i \boldsymbol{e}_i\right) \times \left(b_j \boldsymbol{e}_j\right) = a_i b_j \left(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j\right) = a_i b_j e_{ijk} \boldsymbol{e}_k$$

$e_{ijk} = 1$　$\cdots$ i, j, k が１,２,３の偶置換であるとき　　$e_{123}=1$

$e_{ijk} = -1$　$\cdots$ i, j, k が１,２,３の奇置換であるとき

$e_{ijk} = 0$　$\cdots$ それ以外

具体的には　$e_{ijk} = -e_{jik} = e_{jki} = -e_{kji} = -e_{ikj} = e_{kij}$

この e_{ijk} はエディントンの e_{ijk} とか *Levi-Civita* の全反対称テンソルとか呼ばれる。

【重要公式】

(1)　$e_{ijk} e_{lmk} = d_{il} d_{jm} - d_{lm} d_{jl}$

(2)　$e_{ijk} e_{ljk} = 2d_{il}$

(3)　$e_{ijk} e_{ijk} = 6$

○テンソル積

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

テンソル

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\left[a_i\,b_j\right]=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$$

【公式】

$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a})^T$ ・・・非交換則

$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c})$ ・・・結合則

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}$ ・・・分配則

$\boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}$

$(c\boldsymbol{a})\otimes(d\boldsymbol{b})=(cd)\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ ・・・スカラー倍

○微分演算子∇と座標変換

$$\boldsymbol{e}_i'=Q_{i1}\boldsymbol{e}_1+Q_{i2}\boldsymbol{e}_2+Q_{i3}\boldsymbol{e}_3=Q_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

微分演算子も通常のベクトルと同じように変換される。

$$\nabla'_i=Q_{ij}\nabla_j$$

$$\nabla=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

＜座標変換＞

$$\nabla'=\boldsymbol{e}'_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\boldsymbol{e}'_1\frac{\partial}{\partial x'_1}+\boldsymbol{e}'_2\frac{\partial}{\partial x'_2}+\boldsymbol{e}'_3\frac{\partial}{\partial x'_3}$$

$$=\boldsymbol{e}'_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1'}\right)+\boldsymbol{e}'_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_2'}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_2'}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2'}\right)$$

$$+\boldsymbol{e}'_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_3'}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_3'}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_3'}\right)$$

$$=\boldsymbol{e}'_1\left(Q_{11}\frac{\partial}{\partial x_1}+Q_{12}\frac{\partial}{\partial x_2}+Q_{13}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\boldsymbol{e}'_2\left(Q_{21}\frac{\partial}{\partial x_1}+Q_{22}\frac{\partial}{\partial x_2}+Q_{23}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$+\boldsymbol{e}'_3\left(Q_{31}\frac{\partial}{\partial x_1}+Q_{32}\frac{\partial}{\partial x_2}+Q_{33}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\quad \partial x_1 \qquad \partial x_2 \qquad \partial x_3 \right)$$

$$= \boldsymbol{e}'_1 Q_{1j}\frac{\partial}{\partial x_j} + \boldsymbol{e}'_2 Q_{2j}\frac{\partial}{\partial x_j} + \boldsymbol{e}'_3 Q_{3j}\frac{\partial}{\partial x_j} = \boldsymbol{e}'_1 Q_{1j}\nabla_j + \boldsymbol{e}'_2 Q_{2j}\nabla_j + \boldsymbol{e}'_3 Q_{3j}\nabla_j$$

〇ベクトル場の勾配

$$grad\boldsymbol{a} = \nabla\otimes\boldsymbol{a} = \left[\nabla_i a_j\right]$$

スカラー場$f(x,y,z)$**の勾配は**$grad\ f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3$ **でおなじみである。以下はベクトル場の勾配についてであることに留意されたい。**

$$grad\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} <e_1> & <e_2> & <e_3> \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \end{array}$$

〇ベクトル場の発散

$$div\ \boldsymbol{a} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} = tr(grad\boldsymbol{a})$$

$$= \left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(a_j\boldsymbol{e}_j\right) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\boldsymbol{d}_{ij} = \nabla_i a_i$$

$=\nabla\otimes\boldsymbol{a}$ **テンソル積の項を見よ**

$$= \left[\nabla_j\boldsymbol{a}_i\right] = \begin{pmatrix} \nabla_1 a_1 & \nabla_2 a_1 & \nabla_3 a_1 \\ \nabla_1 a_2 & \nabla_2 a_2 & \nabla_3 a_2 \\ \nabla_1 a_3 & \nabla_2 a_3 & \nabla_3 a_3 \end{pmatrix}$$

〇ベクトル場の回転

$$rot\ \boldsymbol{a} = \nabla\times\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\times\left(a_j\boldsymbol{e}_j\right) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}e_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

$$rot\ \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$rot\,\boldsymbol{a} = \nabla\times\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\times\boldsymbol{a}$$

$$=\boldsymbol{e}_1\times\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\times\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\times\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_3}$$

$$=\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3$$

$(rot\boldsymbol{a})_1=\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)$ ・・・・$\boldsymbol{e}_1$ **軸回りの回転**

$(rot\boldsymbol{a})_2=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)$ ・・・・$\boldsymbol{e}_2$ **軸回りの回転**

$(rot\boldsymbol{a})_3=\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)$ ・・・・$\boldsymbol{e}_3$ **軸回りの回転**

<エピローグ>――

テンソル関係はまた別にやるとして、以上、ベクトルのスケッチで何か参考になるところがあればなによりです。まぁ、自分用のメモとして書いていますから、読みにくい点があるかもしれません。まぁ、その辺は適当に読み流してください。エディントンのイプシロン（*Levi-Civita*）は使い慣れると便利ですね。これは別項で纏めていますので詳細はそちらを参照してください。おつかれさまでした。