==

生成消滅演算子(a , a^*)の由来について

2001.8.10

by KENZOU

==

表題を見ただけでは何のことか分からないと思いますが、いわゆる生成消滅演算子は次のように定義されて導入されますね。

$$a=c(\,p - iw\,q\,) \qquad ①$$

$$a^*=c(\,p + iw\,q\,) \qquad ②$$

$$c=1/\sqrt{2\hbar w}$$

これを使うと調和振動子(質量m=1とする)の$Hamiltonian$ H は

$$H=\frac{1}{2}\hbar w\left(aa^*+a^*a\right)=\hbar w\,aa^*-\frac{1}{2}\hbar w=\hbar w\left(a^*a+\frac{1}{2}\right)$$

と書かれます。

ところで表題の意味は、生成消滅演算子がどうして①、②式の表式で書くことができるのか、言い換えると、どうしてこのような表式を思い付くことができたのか、という点を解明することにあります。まぁ、そんなことにナンの興味もなければ本稿は全く無用の長物となりますが、多少ともその辺りに興味があれば少しは何かのお役に立つのではないかと思います。普通のテキストにはこの辺の事情は全く書かれていませんものね。。。(^^)

さぁ、それでは本論に入ります。その前に本論の流れを概説しておきます。

○１次元調和振動子の*Schrödinger Equation* を立てる

↓

○$\partial/\partial x$, x についての２次式となるので、因数分解的手法で次数を下げる

（*Dirac*が相対論的波動方程式を導入した場合のやり方に似ている）

↓

○固有値をアップダウンさせる「階段演算子」が定義できる

⇓

◎この「階段演算子」が生成消滅演算子に該当する

■１次元調和振動子

Hamiltonian

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}mw^2x^2 \qquad (1)$$

Schrödinger Equation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}Y(x,t)=HY(x,t)$$

$$=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}mw^2x^2\right)Y(x,t) \qquad (2)$$

ここで、$i\hbar\partial/\partial t \to E$, $k=mw^2$ と置きかえると、(2)式は

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{2}mw^2x^2+E\right)Y(x,t)=0 \tag{3}$$

また、$x=\sqrt{\hbar/mw}\ X$, $E=\hbar we/2$ と置くと、(3)式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-X^2\right)Y(X,t)=-e\ Y(X,t) \tag{4}$$

さて、(4)式をこれから解くわけであるが、ここで次のことに留意する

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial X}-X\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y - X\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y \\ &=\frac{\partial^2}{\partial X^2}Y+Y+X\frac{\partial}{\partial X}Y-X\frac{\partial}{\partial X}Y-X^2Y\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial X}-X\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y &=\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 X}-X^2+1\right)Y \\ &=-(e-1)Y\end{aligned} \tag{5}$$

同様にして

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}-X\right)Y &=\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-X^2-1\right)Y \\ &=-(e+1)Y\end{aligned} \tag{6}$$

(5)式より、(4)式を使って

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial X}-X\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y &=\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 X}-X^2+1\right)Y \\ &=-(e-1)Y\end{aligned} \tag{7}$$

続けて(7)式の左から$(\partial/\partial X+X)$を掛けると、(6)式を使って

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}-X\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y=\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-X^2-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y \tag{8}$$

ところで(8)式の左辺で2番目と3番目の括弧を先に掛けると,(7)式を使って

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 X}-X^2+1\right)Y &=\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)\{-(e-1)\}Y \\ &=\{-(e-1)\}\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y\end{aligned} \tag{9}$$

(8)式と(9)式は等しいから

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-X^2-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y=\{-(e-1)\}\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y$$

これを整理して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-X^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y=\{-(e-2)\}\left(\frac{\partial}{\partial X}+X\right)Y \qquad (10)$$

ここで(4)式を想い出すと、$(\partial/\partial X+X)Y$ を新しい波動関数F と考えることができる。
すると(10)式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-X^2\right)F=-(e-2)F \qquad (11)$$

となり、波動関数F は固有値$(e-2)$を持つということになる。
つまり、方程式に左から$(\partial/\partial X+X)$を掛けてやると、固有値が２つ下がることになるのである。すると$(\partial/\partial X-X)$を掛けてやると固有値が２つ上がるのかということになる訳だが、これは各自で試していただきたい。このように固有値をアップダウンさせる演算子を「階段演算子」と呼んでいる。

ところで、階段演算子$(\partial/\partial X+X)$を掛けてやると、固有値が２つ下がると言ったが、エネルギーはプラスでないと困るから、$(\partial/\partial X+X)$を何回か掛けた時点でそれ以上固有値は下げられなくなる。つまり、どこかで波動関数$(\partial/\partial X+X)Y$ はゼロにならなければならない。

$$(\partial/\partial X+X)Y=0 \qquad (12)$$

これに$(\partial/\partial X-X)$を掛けると

$$(\partial/\partial X-X)(\partial/\partial X+X)Y=\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 X}-X^2+1\right)Y=-(e-1)Y=0 \qquad (13)$$

つまり、最低のエネルギー固有値は $e=1$ であることが判明する。そこで

$$e-2n=1,\ e=2n+1$$

元のエネルギーは $E=\hbar we/2$ であるから、最終的に

$$E=(n+1/2)\hbar w$$

となる。

さて、いよいよ第４コーナに差しかかった（＾＾）。

$$p_x=-ih\frac{\partial}{\partial x}=-i\hbar\sqrt{\frac{mw}{\hbar}}\frac{\partial}{\partial X}\ \text{より}\ \frac{\partial}{\partial X}=i\sqrt{\frac{1}{\hbar mw}}p_x \qquad (14)$$

$$x=\sqrt{\frac{\hbar}{mw}}X\ \ \text{より}\ \ X=\sqrt{\frac{mw}{\hbar}}x \qquad (15)$$

ここで「階段演算子」を p, x を使って書きなおすと

$$\partial/\partial X - X = i\sqrt{\frac{1}{\hbar mw}}\, p_x - \sqrt{\frac{mw}{\hbar}}\, x$$

$$= \frac{i}{\sqrt{m\hbar w}}\left(p_x + imw\,x\right) \approx a^* \qquad (16)$$

$$\partial/\partial X + X = i\sqrt{\frac{1}{\hbar mw}}\, p_x + \sqrt{\frac{mw}{\hbar}}\, x$$

$$= \frac{i}{\sqrt{m\hbar w}}\left(p_x - imw\,x\right) \approx a \qquad (17)$$

この(16),(17)式はまさに生成消滅演算子に該当している。

（以上）